むだ時間近似法によるサンプル値系の設計法*

高井 宏 幸**・安居 院 猛**

Synthesis of Sampled Data Control Systems by Time Delay Approximation

Hiroyuki TAKAI and Takeshi AGUI

In this paper, a synthesis of sampled data control system by continuous compensating networks is described. In this method, the sample and hold operation of the system is replaced approximately by a pure time delay of half a sampling period, then, applying the "Roots Specifying Method", parameters of a compensating networks of the approximated system are calculated to achieve specified roots which satisfy the specified response. To show this procedure concretely, an illustrative example is considered.

The accuracy and the limitation of this method are also discussed and it is obtained that the compensating table and compensating chart which have been prepared already for continuous system synthesis can be used to simplify compensating calculation and residue limit can be also used as in continuous system.

As a conclusion, specification can be satisfied within 10% error, when the product of actual angular frequency and sampling period is smaller than 90° , by this method.

1. 緒 言

サンプル値系の特性補償に連続補償回路を用いて設計する方法には周波数特性による方法、不連続補償回路の設計方法を転用する方法、代表根指定法を用いる方法などがある。代表根指定法をサンプル値系の特性設計に拡張した1つの方法としては、すでに発表した「代表根指定法によるサンプル値系の設計法***」があり、これによってもじゅうぶんよい設計特性が得られ、設計手順が明確、画一的であるので、比較的経験的要素を必要とせず、設計計算自体が比較的簡単である、などの特長を持っているが、連続系における代表根指定法において提案された補償計算線図、あるいは、ベクトル計算表などを利用することができないという欠点があった。

本研究は、この欠点を取り除くためのもので、サンプル値系のサンプラとホールダをむだ時間で近似することにより、系を連続系化して、これに代表根指定法

を適用しようとする方法、および、そのさいに生ずる諸問題の解決について述べたものである。ここに述べるサンプラ・ホールダをむだ時間近似する方法によって、いくつかの実例の設計を行なった結果、2面のほぼ 90° 度以内で指定された根については、連続系において利用される線図、計算表などをそのまま利用し、サンプル値系のための簡単な数表を用意することによって、サンプル値系特有のいくつかの限界を除いて、最大約 10% の誤差をもって、連続系の場合とまったく同様にしてサンプル値系の過渡特性の設計を行なうことができることが明らかにされた。

2. むだ時間近似と代表根指定法

Fig. 1 (a) は零次ホールダを持つサンプル値系のブロック線図で、 $H_0(s)$ は零次ホールダの伝達関数、 $G_c(s)$ は連続補償回路、 $G_p(s)$ は制御対象ならびに増幅器の伝達関数であるとする。図において、その誤差信号 $e(t)$ がたとえば Fig. 2 (a) 曲線のようにであったとするとホールダの出力波形は同図 (b) のようになるはずである。ここで、サンプリング周期 T がこの系の応答速度に比べてじゅうぶん短い場合には Fig. 2 (b) の出力信号を同図 (c) のように、つまり、 $e(t)$ を $T/2$

* 昭和 40 年 3 月 25 日原稿受付

** 東京工業大学制御工学科

*** 「代表根指定法によるサンプル値系の設計法」、計測と制御、昭和 37 年、第 1 巻、第 9 号

T : sampling period

$H_0(s)$: transfer function of zero-order holder

$G_c(s)$: transfer function of compensating networks

$G_p(s)$: transfer function of plant

(a) Typical sampled data control system

(b) Approximated sampled data-control system

Fig. 1

- (a) error signal
- (b) out put from zero-order holder
- (c) approximated error signal

Fig. 2 Error signal and approximation

だけ遅らせた信号で近似してもさしつかえない。

これはつぎのようにして証明される。 $G_c(s)$ および $G_p(s)$ からなる系の伝達関数を $G(s)$ として、 $H_0G(s)$ を z 変換するとつぎようになる。

$$H_0G^*(s) = \frac{1}{2\pi j} \oint H_0G(p) \frac{1}{1-e^{-T(s-p)}} dp \quad \dots(2.1)$$

この複素積分を p 面の右半面で行なう。

$$1-e^{-T(s-p)}=0$$

から k を整数として

$$p=s+j2\pi k/T \quad \dots(2.2)$$

したがって、

$$H_0G^*(s) = - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{H_0G(p)}{d(1-e^{-T(s-p)})} \Big|_{p=s+j2\pi k/T}$$

$$= (1/T) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_0G(s+jk\omega_s) \quad \dots(2.3)$$

ここに $\omega_s = 2\pi/T$

一方、零次ホルダの伝達関数は、つぎの式で与えられる。

$$H_0(s) = (1-e^{-sT})/s \quad \dots(2.4)$$

ここで、上式に $s=j\omega$ を代入するとつぎの式が得られる。

$$H_0(j\omega) = \frac{1-e^{-j\omega T}}{j\omega} = Te^{j\omega T/2} \cdot \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \quad \dots(2.5)$$

したがって、(2.3) および (2.5) の両式から；

$$H_0G^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Te^{-jT(\omega+k\omega_s)/2}$$

$$\times \frac{\sin[(\omega+k\omega_s)T/2]}{(\omega+k\omega_s)T/2} \cdot G(j\omega+jk\omega_s) \quad \dots(2.6)$$

ここで、サンプリング周期が応答速度に比べてじゅうぶん短いとしているので、つぎの式を仮定することができる。

$$|k| \geq 1 \text{ で } G(j\omega+jk\omega_s) \approx 0 \quad \dots(2.7)$$

したがって (2.6) 式はつぎのようになる。

$$H_0G^*(j\omega) \approx e^{-j\omega T/2} \cdot \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} G(j\omega) \quad \dots(2.8)$$

ここで、 $\omega T/2$ が適当に小さければ；

$$\sin(\omega T/2)/\omega T/2 \approx 1 \quad \dots(2.9)$$

したがって、

$$H_0G^*(j\omega) \approx e^{-j\omega T/2} \cdot G(j\omega) \quad \dots(2.10)$$

上式から、零次ホルダをサンプリング周期 T の $1/2$ のむだ時間要素で近似できることがわかる。

このような近似を行なうと、Fig. 1 (a) の系は同図 (b) のように置き換えることができる。ここで、 $e^{-sT/2}$ はサンブラ・ホルダを近似したむだ時間要素の伝達関数である。このようなむだ時間近似系に対しては、すでに発表されている代表根指定法をそのまま適用することによって補償回路を決定することができる。すなわち、Fig. 1 (b) のむだ時間近似系の特性方程式はつぎのようになる。

$$e^{-sT/2} \cdot G_c(s) \cdot G_p(s) + 1 = 0 \quad \dots(2.11)$$

この特性方程式が指定根；

$$S_0 = (-\gamma_0 \pm j)\omega_0 \quad \dots(2.12)$$

を持つためには、上式の S の代わりに指定根 S_0 を代入したとき上式が成り立たなければならない。すなわち、

$$G_c(S_0) = -e^{S_0 T/2} / G_p(S_0) = g_c \angle \phi_c \quad \dots(2.13)$$

上式の右辺は既知のベクトル値であって補償ベクトル* と呼ばれるものである。

ここで、補償回路の伝達関数の形が与えられていればそのパラメータを容易に決定することができる。たとえば、補償回路の伝達関数が；

$$G_c(s) = k \left(1 + \frac{1}{\tau s} \right) \quad \dots(2.14)$$

であるとすると、(2.13) 式はつぎのようになる。

$$k(1+1/S_0\tau) = g_c \angle \phi_c \quad \dots(2.15)$$

* 「自動制御理論」高井、オーム社 (Book) p. 221

この式から、 k, τ を求めればよいのであるが、上式は複素方程式であるので、2 元連立の実数方程式に導くことができ、それを解くことによって、 k, τ はつぎのように求まる。

$$\left. \begin{aligned} k &= g_c (\cos \phi_c - r_0 \sin \phi_c) \\ \tau &= (r_0 - \cot \phi_c) / \omega_0 (1 + r_0^2) \end{aligned} \right\} \dots\dots (2.16)$$

なお、このあと指定した根が果たして設計すべき系の代表根になっているかどうかを確認する必要がある。

3. むだ時間近似による設計法の根拠と近似の精度

本方法によるサンプル値系の設計順序は、上記のように、まず、与えられたサンプル値系のサンプラ・ホールダをむだ時間要素で置き換えてむだ時間近似系を作り、それに指定された代表根を持たせるように補償回路を決定することである。このさい、むだ時間近似系に指定した代表根を持たせるということは、そのむだ時間系の応答を指定した代表根だけを持つ連続 2 次系の応答に近似させることを意味している。すなわち、指定しようとする応答は実は連続 2 次系の応答であり、これに近似した応答をむだ時間近似系に持せることになる。さらに、このむだ時間近似系の応答と設計しようとしているサンプル値系の応答とが近似していれば、けっきょくは指定した連続 2 次系の応答に対してそのサンプル値系の応答は近似することになる。しかし、このさい、2 次連続系の応答とサンプル値系の応答との間には 2 度の近似を行なうことになるので誤差を伴う可能性が多くなる。したがって、ここでは近似の精度、近似の可能な範囲などについてまず述べる。

近似の程度を知るためには、指定した根だけを持つ連続 2 次系の応答と、それを持たせるように設計したサンプル値系の応答とを比較すればよい。このとき、設計の対象となるサンプル値系は必ず 2 次系になるとは限らず、また、たとえ 2 次系であってもそれに補償回路を付加すれば高次系になるのが普通である。しかし、ここでは設計の終わった、すなわち比較的良好な応答を持ったサンプル値系だけについて考えればよい。このような系は、その系がたとえ高次系であっても、その応答は 2 次系の応答に近いのが普通である。したがって、ここでは、まず 2 次のサンプル値系を取り上げその応答と、それに指定しようとする応答、すなわち指定根だけを持つ連続 2 次系の応答とを比較する。

Fig. 3 (a) はその応答を調べるべきサンプル値系とし、同 (b) 図はそのサンプラ・ホールダをむだ時間

ω_{ns} : undamped natural angular frequency

ζ_s : damping factor

(a) Typical 2nd order sampled data control system

(b) Approximated 2nd order sampled data control system

ω_{nc} : undamped natural angular frequency of continuous system

ζ_c : damping factor of continuous system

(c) Typical 2nd order continuous system

Fig. 3

要素で近似したむだ時間近似系であるとする。また、指定しようとする応答を持つ連続 2 次系を同 (c) 図に示す。いうまでもなく、Fig. 3 (a) と同 (b) 図ではサンプラ・ホールダの部分以外の伝達関数は同一でなければならない。また、Fig. 3 (b) のむだ時間近似系と同 (c) 図の連続 2 次系では、むだ時間近似系の代表根と連続 2 次系の特性根が等しいという関係を持っていなければならない。

まず、指定根 S_0 を (2.12) 式、すなわち、 $S_0 = (-r_0 \pm j)\omega_0$ とし、これを根として持つ連続 2 次系が Fig. 3 (c) のとおりであるとする、そのパラメータ、 ζ_c, ω_{nc} はつぎのような値になっていなければならない。

$$\left. \begin{aligned} \zeta_c &= r_0 / (1 + r_0^2)^{1/2} \\ \omega_{nc} &= \omega_0 / (1 - \zeta_c^2)^{1/2} \end{aligned} \right\} \dots\dots (3.1)$$

ここに、 ζ_c は連続 2 次系の減衰係数

ω_{nc} は連続 2 次系の自然角周波数

Fig. 4 (a) は応答の一例として、 $r_0 = 0.3$ (これは最大行き過ぎ量 38% に相当する)、 $\omega_0 = 1.0$ rad/sec のときの連続 2 次系の応答をアナコムで求めた結果である。つぎに、この結果に対して、Fig. 3 (a) のサンプル値系の応答を比較するのであるが、そのために応答を比較すべきサンプル値系を決定する。それには、まず、Fig. 3 (b) の伝達関数の定数を定めなければならない。

Fig. 3 (b) の系が (2.12) 式の代表根 S_0 を持つた

(a) Response of specifying continuous system
(where, $\omega_0=1\text{ r/s}$, $\gamma_0=0.3$)

(b) Response of specified sampled data control system and its error

Fig. 4

めには、その特性方程式；

$$e^{-sT/2} \cdot \frac{\omega_{ns}^2}{S(S+2\zeta_s\omega_{ns})} + 1 = 0 \quad \dots\dots(3.2)$$

が $S=S_0$ を代入したとき成立しなければならない。すなわち；

$$e^{-(\gamma_0+j)\omega_0 T/2} \cdot \frac{\omega_{ns}^2}{(-\gamma_0+j)\{(-\gamma_0+j)\omega_0+2\zeta_s\omega_{ns}\}\omega_0} = -1 \quad \dots\dots(3.3)$$

この式から、 ω_{ns} , ζ_s を求めるとつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \omega_{ns} &= \frac{\omega_0 \cdot (1+\gamma_0^2)^{1/4} \cdot e^{-\gamma_0\omega_0 T/4}}{\left[\sin \left\{ \frac{\omega_0 T}{2} + \pi - \tan^{-1} \left(\frac{1}{\gamma_0} \right) \right\} \right]^{1/2}} \\ &\quad \left[\gamma_0 - \cot \left\{ \frac{\omega_0 T}{2} + \pi - \tan^{-1} \left(\frac{1}{\gamma_0} \right) \right\} \right] \\ \zeta_s &= \frac{\left[\sin \left\{ \frac{\omega_0 T}{2} + \pi - \tan^{-1} \left(\frac{1}{\gamma_0} \right) \right\} \right]^{1/2}}{2(1+\gamma_0^2)^{1/4} \cdot e^{-\gamma_0\omega_0 T/4}} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(3.4)$$

むだ時間近似系において、系が上式のようなパラメータの値をとるとき、その系は、 $S_0=(-\gamma_0 \pm j)\omega_0$ を代表根として持つことになる。一方、設計すべきサンプル値系の伝達関数のパラメータとむだ時間近似系の伝達関数のパラメータは同一のものであるから、上式の、 ω_{ns} , ζ_s の値はそのままサンプル値系の伝達関数のパラメータと考えてよい。このようにして求めたパラメータを持つサンプル値系の応答をアナコムによって求めたものが Fig. 4 (b) である。もちろん、この応答は連続 2 次系の場合と同一の指定根、 $\gamma_0=0.3$, $\omega_0=1.0\text{ rad/sec}$ の場合について求めたものであるが、サンプル値系では上の (3.4) 式から明らかなように、伝達関数のパラメータは 2 次系の応答を決めるパラメー

タのほかにサンプリング周期 T によって左右される。ここでは、サンプリング周期 $T=1\text{ sec}$ とした場合の応答を示した。Fig. 4 (a) と (b) から両者の応答がよく近似していることを確認することができる。

4. むだ時間近似法の限界

前節の結果は $\gamma_0=0.3$, $\omega_0=1.0\text{ rad/sec}$, $T=1\text{ sec}$ の場合だけについて検討したものである。ここで、 γ_0 は指定すべき応答の形を決定する値であり、 ω_0 は指定すべき応答の速さを決定する値であるとみなされる。指定すべき応答の形は個々の設計にさいしてそう異なるものではなく、上記の計算例で用いた $\gamma_0=0.3$ に近い値であることが多い。一方、 ω_0 の値は個々の設計仕様によって異なるべきものである。さらに、サンプル値系ではサンプリング周期 T をどの程度に選ぶべきかが問題である。このサンプリング周期の選定は ω_0 の大きさ（応答の速さ）に関係し、具体的にいえば、サンプリング周期 T は応答の速さ、すなわち、 ω_0 に反比例して選ぶべきであることは容易に想像することができる。そのようなであるとすると $\omega_0 T$ の限界の値がどの程度であるかを知っておく必要がある。

まず、むだ時間近似系について、 $\omega_0 T$ が一定であればその応答の形は変わらないことを示そう。Fig. 3 (b) に示すむだ時間近似系の特性方程式は；

$$e^{-sT/2} \cdot \frac{\omega_{ns}^2}{S(S+2\zeta_s\omega_{ns})} + 1 = 0 \quad \dots\dots(4.1)$$

すなわち；

$$e^{-sT/2} \cdot \frac{1}{S/\omega_{ns} \cdot (S/\omega_{ns} + 2\zeta_s)} + 1 = 0 \quad \dots\dots(4.2)$$

この方程式の特性根が $S_0, S_1, S_2, \dots$ であるとしたとき、この方程式において、 T の代わりに T/a , ω_{ns} の代わりに $a\omega_{ns}$ を入れると同時に、 S の代わりに aS を入れたとすると方程式そのものは変わらない。したがって、 T の代わりに T/a , ω_{ns} の代わりに $a\omega_{ns}$ を入れると、特性根は $aS_0, aS_1, aS_2, \dots$ となり応答の速さは a 倍に速くなるだけで応答の形は変わらない。すなわち、系の代表根は $S_0=(-\gamma_0 \pm j)\omega_0$ であるから、 aS_0 はつぎのようになる。

$$aS_0=(-\gamma_0 \pm j)a\omega_0 \quad \dots\dots(4.3)$$

したがって、 ω_0 が a 倍されたことになる。すなわち、 $\omega_0 T$ を一定に保って ω_0 を変えた場合、応答の速さは変わるが応答の形は変わらないことが明らかである。Fig. 5 は応答の比較を、 $\omega_0 T=1$ の場合について行なったものについて示したものである。

上で検討したようなむだ時間近似系を Fig. 3 (a) に示すような実際のサンプル値系にもどしたとき、

(a) $\omega_0 = 1 \text{ rad/sec}$, $T = 1 \text{ sec}$ (b) $\omega_0 = 0.5 \text{ rad/sec}$, $T = 2 \text{ sec}$ Fig. 5 Response for same $\omega_0 T$

Fig. 6 Overshoot and peak time of sampled data control system

$\omega_0 T$ が比較的小さい場合には連続系との近似度が高くあまり問題は起こらないが、 $\omega_0 T$ を大きくすると応答の形が変わり、近似の精度が低下することが考えられる。したがって、つぎに、 $\omega_0 T$ を増加した場合の近似度について述べる。そのために、2次サンプル値系の応答を正確に求めればよいのであるが、ここでは量的比較の便宜のために行き過ぎ時間と行き過ぎ量を求める。

まず、むだ時間近似によって指定根を持つようにパラメータを求めた2次サンプル値系 (Fig. 3 (a) に示す系) のインディシャル応答の最大行き過ぎ量を Θ_{ms} 、それを与える時刻、すなわち行き過ぎ時間を t_{ms} とする。これが Fig. 6 に示すように、 nT と $(n+1)T$ の間にあるとすると、それらは階差方程式によってつぎのように求まる。

$$t_{ms} = nT + \tau \quad \dots\dots(4.4)$$

$$\begin{aligned} \tau = & \frac{1}{2\zeta_s\omega_{ns}} \ln \{ [(C_{nT}-1) + (1-C_{(n-1)T})(1-e^{-2\zeta_s\omega_{ns}T})] \\ & + (1-C_{(n-2)T})(1-e^{-2\zeta_s\omega_{ns}T})e^{-2\zeta_s\omega_{ns}T} + \dots \\ & + (1-e^{-2\zeta_s\omega_{ns}T})e^{-2(n-1)\zeta_s\omega_{ns}T} \} / (C_{nT}-1) \} \end{aligned} \quad \dots\dots(4.5)$$

$$\begin{aligned} C_{ms} = \Theta_{ms} + 1 = & \frac{1}{4\zeta_s^2} [e^{-2\zeta_s\omega_{ns}\tau} \cdot e^{-2(n-1)\zeta_s\omega_{ns}T} \\ & \times (e^{-2\zeta_s\omega_{ns}T} - 1) + 2\zeta_s\omega_{ns}T + (1-C_T) \\ & \times \{ e^{-2\zeta_s\omega_{ns}\tau} \cdot e^{-2(n-2)\zeta_s\omega_{ns}T} \cdot (e^{-2\zeta_s\omega_{ns}T} - 1) \\ & + 2\zeta_s\omega_{ns}T \} + (1-C_{2T}) \\ & \times \{ e^{-2\zeta_s\omega_{ns}\tau} \cdot e^{-2(n-3)\zeta_s\omega_{ns}T} \cdot (e^{-2\zeta_s\omega_{ns}T} - 1) \\ & + 2\zeta_s\omega_{ns}T \} + \dots + (1-C_{nT}) \\ & \times \{ e^{-2\zeta_s\omega_{ns}\tau} + 2\zeta_s\omega_{ns}\tau - 1 \}] \quad \dots\dots(4.6) \end{aligned}$$

ここに、 C_{kT} は kT における応答の値で、 $C_{0T} = 0$

ここで、指定根の γ_0 を 0.3 として Θ_{ms} 、 t_{ms} を求めるが (4.6) 式から2次サンプル値系の行き過ぎ量は γ_0 と $\omega_0 T$ によって左右されることがわかる。これに対して、指定した応答、すなわち、指定根 $S_0 = (-\gamma_0 \pm j)\omega_0$ だけを持つ連続2次系の応答の行き過ぎ量 Θ_{mc} は；

$$\Theta_{mc} = e^{-\gamma_0\pi} \quad \dots\dots(4.7)$$

であり、 γ_0 だけによって決まる。したがって、連続2次系の行き過ぎ量に対するサンプル値系のその誤差を ϵ_θ とすると；

$$\epsilon_\theta = \frac{\Theta_{mc} - \Theta_{ms}}{\Theta_{mc}} = 1 - \frac{\Theta_{ms}}{\Theta_{mc}} \quad \dots\dots(4.8)$$

これを、 $\gamma_0 = 0.3$ の場合についてプロットすると、Fig. 7 (a) 曲線のようになり、 ϵ_θ は γ_0 が一定であれば $\omega_0 T$ の関数となる。

行き過ぎ時間 t_{ms} についても同様に、指定した応答の行き過ぎ時間 t_{mc} に対する誤差を ϵ_t とすれば、 ϵ_t はつぎのようになる。

$$\epsilon_t = 1 - \frac{t_{ms}}{t_{mc}} \quad \dots\dots(4.9)$$

ここで、 t_{ms} は (4.4) 式の値であり、 t_{mc} はつぎの式で与えられる。

$$t_{mc} = \pi / \omega_0 \quad \dots\dots(4.10)$$

ϵ_t を、 $\gamma_0 = 0.3$ の場合について、 $\omega_0 T$ に対してプロットすると Fig. 7 (b) 曲線が得られる。

これからわかるように、 $\omega_0 T = 1.5$ (rad) 以後から誤差 ϵ_θ 、 ϵ_t はともに急激に大きくなるが、指定現象角 $\omega_0 T$ の限界を 1.5 rad 付近に選んでおけば、それより小さい所では指定根に対する行き過ぎ量の誤差 ϵ_θ 、および

Fig. 7 Errors of overshoot and peak time for specified response

r_0	0.3	0.4	0.5	0.6
$\omega_0 T$ [rad]	1.5	1.4	1.3	1.2

Table 1 Specifying limits for $\omega_0 T$

行き過ぎ時間の誤差 ε_t を 10% 以内に納めることができる。この結果は $r_0=0.3$ に対するものであるが、その他の r_0 に対しても同様な検討を行なった結果から、各 r_0 に対する指定現象角 $\omega_0 T$ の限界として、Table 1 の結果を得る。この表では、各 r_0 に対して $\omega_0 T$ の値が異なっているが、これはかなりきびしい限界条件であり、実用的には各 r_0 に対して；

$$\omega_0 T \leq \pi/2 \text{ [rad]} \quad \dots\dots (4.11)$$

としても近似度はさほど悪くならないということがができる。

5. 高次サンプル値系の代表根の検討

いままでは 2 次サンプル値系についてだけ述べてきたが、高次の系においては指定した根のほかにも、根、零点を持ち、それらの影響が大きいときには指定根が代表根にならなくなる恐れがある。ここでは、この点の検討を行なう。

サンプル値系の代表根以外の根、零点についての理論計算*によれば、零点は行き過ぎ量を増加し、行き過ぎ時間 t_{ms} を減少させ、実軸上の極は t_{ms} を増加し、行き過ぎ量を減少させる。他方、連続系についての同様な計算によれば、代表根以外の根、零点が応答におよぼす影響として同様な結果が得られる。したがって、ここで述べているようにサンプラ・零次ホールダを $T/2$ のむだ時間で近似してサンプル値系を連続系化した場合、系の零点あるいは根と応答の立ち上がり時間、あるいは行き過ぎ量などの関係は連続系化した系について考察しても良い近似が得られると考えられる。

連続系についての代表根以外の根、零点の応答におよぼす影響は実用的には、系の指定根による「留数の逆数ベクトル」を計算し、これがなかば経験的に決められた Fig. 8 の留数条件**を満足しているとき、応答は指定値をほぼ満足しているといえることができる。図において、Or-a-b を通る円は、任意の高次系の代表根だけによる応答成分の初期値が近似的に 1 になるための条件であり、直線 Or-b' はその時の微係数が近似的にゼロになるための条件である。したがって、代

* 「Sampled Data Control System」E. I. Jury. Book p. 135～

** 「自動制御理論」高井（オーム社）Book p. 149～

Fig. 8 Limits for residue vector

表根それ自身を特性根として持つ 2 次連続系の留数はそれらの交点である b 点となる。また、直線 Or-a' は 2 乗誤差面積が最少になる条件である。ここで、代表根それ自身を持つ 2 次連続系に；

$$p = -2r_0\omega_0 \quad \dots\dots (5.1)$$

なる極を 1 個つけ加えた場合の留数 B_0 は；

$$B_0 = -S_0^*/(S_0 - S_0^*)(S_0 - p) \quad \dots\dots (5.2)$$

$$\text{ここに； } S_0 = (-r_0 + j)\omega_0, \quad S_0^* = (-r_0 - j)\omega_0$$

となる。したがって、このときの根配置を示した Fig. 9 (a) からわかるように、角 $\angle S_0 p 0$ のなす角が Fig. 8 の Or-b' に加わり c''-c' の限界線を示す。これは、すなわち、2 次連続系に (5.1) 式に示す極が 1 個つけ加わった場合の応答波形までを「良い応答」としたときの限界を示している。他方、零点の加わった場合の影響としては；

$$z = -(1 + r_0^2)\omega_0/2r_0 \quad \dots\dots (5.3)$$

なる零点が加わった場合の応答波形までを「良い応答」としており、このときの留数の逆数ベクトル図上の限

(a) Dominant root and a pole (b) Dominant root and a zero

Fig. 9

界としては Fig. 9 (b) からわかるように, Fig. 8 の直線 $b''-b'$ に角 $\angle S_0 z 0$ のなす角, すなわち, $2 \tan^{-1} \tau_0$ が加わった角度で $a''-a'$ となり, 最少 2 乗誤差面積による限界条件と一致する.

一般に留数の逆数ベクトルは, むだ時間近似したサンプル値系の一巡伝達関数 $F(s)$ を;

$$F(s) = e^{-ST/2} \frac{K(1+ST_{z1})(1+ST_{z2}) \cdots (1+ST_{zm})}{S^n(1+ST_{p1})(1+ST_{p2}) \cdots (1+ST_{pl})} \quad \text{.....(5.4)}$$

とすると, これは連続系の伝達関数に $T/2$ のむだ時間が加わったものであるので, 留数の逆数ベクトル $1/B_0$ は連続系の場合と同様にして求めることができ*, つぎのようになる.

$$\frac{1}{B_0} = \frac{S_0 T}{2} + n + l - m + \sum_{i=1}^m \frac{1}{1+S_0 T_{zi}} - \sum_{j=1}^l \frac{1}{1+S_0 T_{pj}} \quad \text{.....(5.5)}$$

他方, 代表根以外の根, 零点が応答の行き過ぎ量, あるいは, 立ち上がり時間におよぼす影響は系の速度誤差定数 K_v によっても判定でき, むだ時間近似のサンプル値系の場合には, その速度誤差定数 K_{vs} は比較的簡単に算出することができる.

一般に, 連続系における閉ループ伝達関数を;

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\pi_i(S-z_i)}{(S-S_0)(S-S_0^*)\pi_j(S-S_j)} \times \frac{S_0 \cdot S_0^* \cdot \pi_j(-S_j)}{\pi_i(-z_i)} \quad \text{.....(5.6)}$$

とすると, その速度誤差定数 K_v は次式で与えられる.

$$\frac{1}{K_v} = \frac{1}{|S_0|} + \frac{1}{|S_0^*|} + \sum_j \frac{1}{|S_j|} - \sum_i \frac{1}{|z_i|} \quad \text{.....(5.7)}$$

また, 2 次連続系の速度誤差定数を K_{v2} とすると,

$$\frac{1}{K_{v2}} = \frac{1}{S_0} + \frac{1}{S_0^*} = \frac{2\tau_0}{\omega_0(1+\tau_0^2)} \quad \text{.....(5.8)**}$$

となる. (5.7), (5.8) 式との比較によって, 零点の影響が大きいと, すなわち, 応答の行き過ぎ量が大きく, 立ち上がり時間が短くなるような場合には;

$$K_v > K_{v2} \quad \text{.....(5.9)}$$

となり, 根の影響が大きき場合には逆に;

$$K_v < K_{v2} \quad \text{.....(5.10)}$$

となることがわかる. これは逆に K_v が指定根 S_0 だけを持つ 2 次系の速度誤差定数 K_{v2} より大きい場合には行き過ぎ量が 2 次系のそれより大きく, かつ, 立ち上がり時間は 2 次系のそれより小さくなる傾向があり, K_v が K_{v2} より小さい場合には行き過ぎ量, 立ち上がり時間がそれぞれ逆の傾向にあると考えることができる.

一般に, むだ時間系の応答を $C(s)$, 目標値を $R(s)$, 一巡伝達関数を $F(s)$ とすると, この系の速度誤差定数の逆数 $1/K_{vs}$ はつぎのようになる.

$$\begin{aligned} \frac{1}{K_{vs}} &= \left[\frac{1}{S^2} \frac{C(s)}{R(s)} \right]_{s=0} - \frac{1}{S^2} \frac{C(s)}{R(s)} \cdot S \Big|_{s \rightarrow 0} \\ &= - \left[\frac{d}{ds} \frac{C(s)}{R(s)} \right]_{s=0} \\ &= \frac{F(0)}{1+F(0)} \left[\frac{1}{1+F(s)} \frac{d \ln F(s)}{ds} \right]_{s=0} \quad \text{.....(5.11)} \end{aligned}$$

速度誤差定数による評価は上式によって求めた $1/K_{vs}$ と 2 次連続系のそれ $1/K_{v2}$ の比, すなわち, K_{v2}/K_{vs} によるもので, これが;

$$0.5 < K_{v2}/K_{vs} < 2.5 \quad \text{.....(5.12)}$$

を満足するとき, 応答はかなり良く 2 次連続系の応答に近似すると考えられる.

以上が留数条件, および, 速度誤差定数による評価であり, これによって代表根以外の根, 零点が応答におよぼす影響をチェックしている. しかし, これはあくまでも経験的に決められたものであり, 応答はこれらの評価を満足した場合一応無難な波形を示すというものである. したがって, これらの条件外に値がなった場合でも, 2 次系に対する誤差の許容度を大きくしたようなときには比較的良い応答が得られることもある.

つぎに, 以上によって得られた結果を利用してサンプル値系の特性設計を行なう具体的な方法について述べる.

6. 具体的な設計手順と設計例

まず, むだ時間近似法によって設計を行なう具体的な手順について述べるとつぎのようになる.

① サンプル値系が与えられたとき, そのサンプラ・ホルダをサンプリング周期の $1/2$ のむだ時間を持つ連続系に近似する.

② 系の時定数, その他から系に持たせるべき現象角 $\omega_0 T$, または ω_0 (サンプリング周期が与えられている場合) を適当に決定する.

③ 系に持たせるべき行き過ぎ量から減衰度 τ_0 を決定する.

④ このようにして求めた指定根 S_0 を系の伝達関数に代入して (2.13) 式から補償ベクトルを求める.

⑤ 補償ベクトルの大きさにより適当な補償回路を選定し, 補償公式, あるいは補償計算線図から補償回路の定数を求める.

⑥ 補償回路を含めた系の指定根に対する留数限界, および, 速度誤差定数のチェックを行ない, これ

* 「自動制御理論」高井 (オーム社) p. 156~

** 「電気学会誌」Vol. 84-8, p. 1217~

らが満足されていれば設計はここで終わる。

⑦ 条件の限界外であれば指定根を再指定して、設計計算をやり直す。しかし、一般には、望ましい ω_0 の前後の値を適当に選んで補償計算を行ない、条件の限界にもっとも近い値を取るのが便利である。

6・1 3 次サンプル値系の特性補償

上に述べた手順にしたがって Fig. 10 に示す系の補償計算を行なう。この系のサンプリング周期 1 秒に対

Fig. 10 Example of sampled data control system

するインディシャル応答は Fig. 12 に示すように不安定である。この系のサンプリング周期を 1 秒とし、最大行き過ぎ量を約 40% ($r_0=0.3$) としてできるだけ早い現象角周波数を与えるようにする。減衰度 $r_0=0.3$ であるから、指定根は；

$$S_0 = (-0.3 \pm j)\omega_0 \quad \dots\dots(6.1)$$

また、むだ時間近似した系の補償ベクトルは；

$$g_c \angle \phi_c = \frac{e^{-j\pi} \cdot e^{S_0 T/2} \cdot S_0 (S_0 + 1) (0.5 S_0 + 1)}{1.5} \quad \dots(6.2)$$

ここで、系に指定すべき現象角周波数 $\omega_0=0.8\sim 1.2$ [r/s] として(6.1)式に代入し、その指定根 S_0 を(6.2)式に代入して各 ω_0 に対する g_c, ϕ_c を求めると Table 2 が得られる。

系の補償回路 $G_c(s)$ として次式に示す進み回路；

$$G_c(s) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1 + S/\omega_s}{1 + S/n\omega_s} \quad \dots\dots(6.3)$$

か使うと、 n および ω_s は $r_0=0.3$ に対する補償計算線図^{*}、あるいはこの補償回路の補償公式；

$$\left. \begin{aligned} 1/\omega_s &= \sin \phi_c / \omega_0 (\cos \phi_c + r_0 \sin \phi_c - g_c) \\ 1/n &= (\cos \phi_c + r_0 \sin \phi_c - g_c) / (1/g_c - \cos \phi_c + r_0 \sin \phi_c) \end{aligned} \right\} \dots(6.4)$$

から各 ω_0 に対して Table 3 のように求まる。この表において、 $\omega_0=1.2$ [r/s] の場合が不足しているが、

ω_0 [r/s]	g_c	ϕ_c [deg]	ω_0 [r/s]	$1/\omega_s$	$1/n\omega_s$
0.8	0.527	20.51	0.8	0.853	0.427
0.9	0.620	30.83	0.9	1.395	0.620
1.0	0.720	40.73	1.0	2.860	0.800
1.1	0.837	50.23	1.1	20.81	0.892
1.2	0.967	59.22			

Table 2

Compensating vector
for each ω_0

Table 3

Calculated parameters of
compensating network

これは、この場合には補償不能であり、補償計算線図を利用した場合には補償ベクトルは補償限界の外にプロットされ、(6.4) 式を利用して計算した場合には実現不可能なパラメータの値となる。

つぎに補償した系の留数の逆数ベクトルを計算する。この場合の留数の逆数ベクトルは(5.5)式から、 $\omega_0=0.8$ [r/s] のときの指定根が $S_0=(-0.3+j)0.8$ であるのでつぎようになる。

$$\begin{aligned} 1/B_0 &= (-0.12 + j0.4) + 3 + (0.726 - j0.62) \\ &\quad - (0.624 - j0.657) - (0.942 - j0.428) \\ &\quad - (0.974 - j0.369) \\ &= 1.066 + j1.234 \quad \dots\dots(6.5) \end{aligned}$$

他の ω_0 についても同様な計算を行ない、留数限界図にプロットすると Fig. 11 のようになる。これから、指定した各 ω_0 に対して留数条件は一応満足されているといえる。しかし、 $\omega_0=1.1$ [r/s] では限界近くにプロットされているので、あまり良い応答は期待できない。

Fig. 11 Residue plots for example

また一方、この場合の補償後の系の速度誤差定数の逆数 $1/K_{vs}$ は(5.11)式から次式で与えられる。

$$1/K_{vs} = n/K = n/1.5 \quad \dots\dots(6.6)$$

また、指定根を持つ 2 次連続系の速度誤差定数は；

$$K_{v2} = (1 + r_0^2) \omega_0 / 2 r_0 \quad \dots\dots(6.7)$$

(6.6), (6.7) 式から各 ω_0 に対する速度誤差定数の比 K_{v2}/K_{vs} は Table 4 のように求まる。これから速度誤差定数の比の限界条件を示す(5.12)式を満足するのは $\omega_0=0.9$ [r/s] までであることがわかる。

ω_0 [r/s]	0.8	0.9	1.0	1.1
K_{v2}/K_{vs}	1.94	2.48	4.33	31.1

Table 4 Ratio of velocity constant error

* 「自動制御理論」高井（オーム社）Book. 付録

以上で Fig. 10 に与えられた 3 次サンプル値系の特性補償が終わったわけであるが、ここで補償前の系の応答、ゲインを小さくして最大行き過ぎ量を約 40% としたときの応答、および $\omega_0 = 0.9$ [r/s] を持つように補償したサンプル値系の応答を示すと Fig. 12 のようになる。

(a) Response of uncompensated system

(b) Response of gain compensated system

(c) Response of compensated system for $\omega_0 = 0.9$ [rad/sec]

Fig. 12 Responses by analog computer

6.2 不完全ホールダを持つサンプル値系

いままで述べてきた零次ホールダはいわゆる完全ホールダで、ホールド期間とサンプリング周期が同じ場合のものである。しかし実用的にはホールダがサンプリング期間の途中で解除されるものもある。Fig. 13 は不完全ホールダの出力波形の一例であり、ホールド開始から τ 秒でホールダが解除される。ここで、ホールド率 ρ を次式とする。

$$\rho = \tau/T \quad \dots\dots(6.8)$$

上式から、サンプラ、不完全ホールダの伝達関数 $H_{0p}(s)$

Fig. 13 Imperfect zero-order holder

を求めると、近似的につきのようになる。

$$H_{0p}(s) \approx \rho e^{-\rho s T/2} \quad \dots\dots(6.9)$$

したがって、Fig. 14 (a) に示すような不完全ホールダを持つサンプル値系をむだ時間近似して連続系化すると同図 (b) のようになり、すでに述べた方法をそのまま適用することができる。

Fig. 14 Sampled data control system with imperfect holder

7. 結 言

本文で述べたことから明かなように、本設計法はサンプル値系の特性設計に連続系において研究された代表根指定法を適用したものであり、サンプル値系に含まれるサンプラとホールダの伝達関数をサンプリング周期 T の $1/2$ のむだ時間、すなわち、 $T/2$ のむだ時間で置き換え、系を連続系に近似し、その近似された系が指定代表根を持つようにしている。このようにして、系に指定された代表根の現象角、すなわち、現象角周波数とサンプリング周期の積、が $\pi/2$ より小さい場合にはじゅうぶん良い結果が得られた。

この設計方法が他の方法と比較して持っている利便は、連続系において代表根指定法が他の方法と比較して持っている利便とほとんど同じであり、設計手順が明確であり、系に代表根を比較的正確に持たせることができ、ある種の補償回路によっては簡単に代表根以外の根の位置も指定できるので、設計にさいして比較的経験的要素を必要としない、というような点である。また、設計法の拡張にさいして、特に留意して、連続系の補償回路の設計において利用される補償公式、補償計算線図、補償ベクトル計算表、留数限界図、速度誤差定数比の限界などをそのまま利用できるようにしたので補償計算をきわめて簡単に行なうことができる。なお、ここではふれていないが、サンプル値系がむだ時間を持つような場合にもここに述べた方法をじゅうぶん適用することができる。

おわりに、本研究に種々意見をいただいた、東京工業大学助教授長谷川健介博士に深く感謝の意を表します。