非線形制御系における跳躍共振の発生限界*

福 間 彰**・松 原 正 一**

Jump Resonance Criteria of Nonlinear Control Systems

Akira FUKUMA and Masakazu MATSUBARA

It is known that jump resonance may occur in a nonlinear control system if the vector locus of linear part passes through a certain region which depends upon nonlinear part. This paper concerns with further investigations on the boundary curves of such regions. The authors consider the case of complex describing function which has not yet been treated. By normalizing the nonlinear characteristics, it is shown that there exists a limit boundary curve for nonlinear elements which satisfy certain conditions and that boundary curves of each nonlinear elements can easily be drawn on the inverse-vector-locus plane. For the analysis and synthesis based on the frequency response method, boundary curves redrawn on the gain-phase plane are also given.

The results obtained will conveniently be available as jump resonance criteria of nonlinear control systems. Some applications of them are also indicated.

1. ま え が き

非線形制御系において、跳躍共振が起こる場合があることはよく知られており、これについてはすでに多くの研究が行なわれている。ところで、跳躍共振が起こりうるような状態にある制御系は良い制御性能を示さないと考えられるから、非線形制御系の解析や設計を行なう場合に、跳躍共振が起こりうるかどうかを判別することは安定性の判別などと同様に重要な意味を持つ。定性的には飽和を含む2次の制御系について減衰係数が小さいときにのみ跳躍共振が起こりうる事がかなり以前から知られていた⁽¹⁾。その後 West 氏⁽²⁾は $y=x^3$ で表わされる非線形要素を含む制御系について跳躍共振の発生限界を記述関数を用いて解析的に求め、この場合、複素平面上の原点から発する $180^\circ \pm 30^\circ$ の方向の2本の半直線が囲む領域を線形部のベクトル軌跡が通過するかどうかによって跳躍共振が発生しうるかどうかを判別しうることを明らかにした。さらに Gille, Decaulne 両氏⁽³⁾は同様な発生限界を記述関数が実数であるような非線形要素について一般的に求め、それが複素平面の実軸上に中心を持つ円群の包絡線となることを示した。また畑中氏⁽⁴⁾も、ほぼ時を同じくして独立に同様の結果を得ている。

本文は跳躍共振の発生限界についてさらに研究を進

めた結果の報告である。すなわち筆者らは、

(1) 非線形要素の記述関数が複素数となる場合をも含めて一般的に発生限界を求め、

(2) 非線形要素の特性を規準化した形で表わすことによって、一定の条件を満足するような非線形要素について発生限界に極限が存在することを明らかにし、

(3) このような規準化を行なった場合の発生限界は線形部の逆ベクトル軌跡平面上で求めると作図が容易なることを示し、

(4) 周波数応答法による解析や設計に利用する場合のために、ゲイン-位相平面上に移した発生限界をも示した。なお得られた発生限界の応用例をいくつか示した。

2. 跳躍共振の発生限界

1個の非線形要素を含む制御系のブロック線図は、多くの場合等価変換を行なうことによって、Fig. 1に示す形にすることができる。ここで、 $y=f(x)$ は非線形要素の特性、 $G(s)$ は線形部の伝達関数である。また正弦波入力 $r=R_m \sin \omega t$ を加えた場合に系は安定であり、かつ定常状態において分数調波振動は生ぜず、また高調波振動は無視しうるものと仮定する。このとき $x=X_m \sin(\omega t + \varphi)$ と書くことができ、 $y=f(x)$ の記述関数を $N(X_m)$ とすると、つぎの関係が成り立つ。

* 昭和40年5月18日原稿受付

** 茨城大学工学部精密工学科

Fig. 1 Block diagram of the nonlinear control system

$$X(j\omega) = \frac{1}{1+N(X_m)G(j\omega)} R(j\omega) \quad \dots\dots (1)$$

ここで、以下においてはまぎれるおそれのないかぎり R_m, X_m をそれぞれ R, X と書くこととし、

$$N(X) \equiv n_1(X) + jn_2(X),$$

$$G^{-1}(j\omega) = H(j\omega) = h_1(\omega) + jh_2(\omega)$$

とおけば

$$(h_1^2 + h_2^2)R^2 = \{(h_1 + n_1)^2 + (h_2 + n_2)^2\}X^2 \quad \dots\dots (2)$$

が得られる。いま系は安定であると仮定しているから、(1) 式から $R=0$ のときは $X=0$ 、また $R \rightarrow \infty$ のときは $X \rightarrow \infty$ である。また $N(X), dN(X)/dX$ が有限であるならば、 $\partial X/\partial R$ は 0 となり得ないことが容易にわかるから、 R の変化に対して X は極値をとらない。したがって跳躍共振が発生するための条件は

$$\frac{\partial R}{\partial X} < 0 \quad \dots\dots (3)$$

を満足するような ω, R, X が存在することである。

(2) 式の両辺を X について偏微分し、(3) 式を用いると

$$\begin{aligned} & \left(h_1 + \frac{n_1 + \nu_1}{2}\right)^2 + \left(h_2 + \frac{n_2 + \nu_2}{2}\right)^2 \\ & < \frac{(n_1 - \nu_1)^2 + (n_2 - \nu_2)^2}{4} \quad \dots\dots (4) \end{aligned}$$

を得る。ただし

$$\nu_1 \equiv n_1 + X \frac{dn_1}{dX}, \quad \nu_2 \equiv n_2 + X \frac{dn_2}{dX} \quad \dots\dots (5)$$

である。(4) 式は $H(j\omega)$ 平面上の円の内部を表わしており、この円の中心を $c_1 + jc_2$ 、半径を ρ とすれば

$$c_1 = -\frac{1}{2}(n_1 + \nu_1), \quad c_2 = -\frac{1}{2}(n_2 + \nu_2) \quad \dots\dots (6)$$

$$\rho = \frac{1}{2} \sqrt{(n_1 - \nu_1)^2 + (n_2 - \nu_2)^2} \quad \dots\dots (7)$$

である。この円の中心と半径は、いずれも X の関数であるから、 X の個々の値に対する円群の包絡線が跳躍共振の発生限界であり、線形部には無関係に非線形要素の特性だけで定まるものである。以下においては、この円を等振幅円、また円群の包絡線を限界曲線と呼ぶことにする。線形部の逆ベクトル軌跡がこの限界曲線と囲まれた領域を通過するかどうかによって、跳躍共振が発生しうるかどうかを容易に判別することができる。

Gille, Decaulne 両氏⁽³⁾は N が実数の場合の限界曲線を $G(j\omega)$ 平面上に求めており、畑中氏⁽⁴⁾は $y=f(x)$

が 1 価連続奇関数の場合の限界曲線を $G(j\omega)$ 平面および $H(j\omega)$ 平面上に求めている。これらの場合は、 N が実数であるから等振幅円の中心は実軸上にあり、したがって限界曲線は実軸に対して対称になる。しかし、 N が実数でなくても $n_2 + \nu_2 = 0$ すなわち

$$2n_2 + X \frac{dn_2}{dX} = 0 \quad \dots\dots (8)$$

が成り立つならば、やはり限界曲線は実軸に対して対称となる。この微分方程式を解いてみると、

$$n_2 = \frac{K}{X^2} \quad \dots\dots (9)$$

となる。ただし、 K は積分定数である。

ここで、 $y=f(x)$ の記述関数を計算してみよう。ヒステリシスやバックラッシュの場合には、 x が増加するときと減少するときで $f(x)$ が異なり、バックラッシュの場合には、さらに入力振幅 X によって $f(x)$ が変化する。そこで、 x が増加するときは $y=f_1(x, X)$ 、また x が減少するときは $y=f_2(x, X)$ であるものとする。ただし、これらの関数は連続であり、かつ

$$f_1(X, X) = f_2(X, X), \quad f_1(-X, X) = f_2(-X, X)$$

が成り立つものとしておく。このように仮定すると

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{1}{\pi X} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{f_1(X \sin \theta, X) + f_2(X \sin \theta, X)\} \sin \theta d\theta \\ n_2 &= \frac{1}{\pi X} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{f_1(X \sin \theta, X) - f_2(X \sin \theta, X)\} \cos \theta d\theta \\ &= \frac{1}{\pi X^2} \int_{-X}^X \{f_1(x, X) - f_2(x, X)\} dx \end{aligned} \quad \dots\dots (10)$$

となる。これから $f_1(x, X)$ と $f_2(x, X)$ とが囲む面積が 0 であるとき、記述関数は実数となることがわかる。 $f(x)$ が 1 価関数ならばこの関係は満足されるが、 $f(x)$ が 2 価関数であってもある範囲の X に対してこの関係が満足される場合が起こりうることとなる。

(9) 式と (10) の第 2 式とから限界曲線が実軸に対して対称になるための条件は

$$\int_{-X}^X \{f_1(x, X) - f_2(x, X)\} dx = \pi K = \text{一定} \quad \dots\dots (11)$$

となり、これは $f_1(x, X)$ と $f_2(x, X)$ とが囲む面積が X に無関係に一定であることを意味する。 $f(x)$ が 1 価関数の場合には、この関係はすべての X に対して満足される。また $|x| < X_c$ の範囲では 2 価、 $|x| \geq X_c$ の範囲では 1 価の場合には、 $X \geq X_c$ の範囲の X に対してこの関係は満足され、たとえばヒステリシスの場合がこれにあたる。しかし、バックラッシュの場合にはこの関係は満足されない。

(5) 式に (10) 式を代入すると

$$\left. \begin{aligned} \nu_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ [f_{1x}(X \sin \theta, X) + f_{2x}(X \sin \theta, X)] \sin^2 \theta \right. \\ &\quad \left. + [f_{1x}(X \sin \theta, X) + f_{2x}(X \sin \theta, X)] \sin \theta \right\} d\theta \\ \nu_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ [f_{1x}(X \sin \theta, X) - f_{2x}(X \sin \theta, X)] \sin 2\theta \right. \\ &\quad \left. + 2[f_{1x}(X \sin \theta, X) - f_{2x}(X \sin \theta, X)] \cos \theta \right\} d\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots (12)$$

となる。ここで、 $f_{ix}(x, X)$ 、 $f_{ix}(x, X)$ はそれぞれ $f_i(x, X)$ の x および X に関する偏導関数を表わすものとする。つぎに (10) 式は部分積分を行なうことにより、つぎのように変形することができる。

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{f_{1x}(X \sin \theta, X) + f_{2x}(X \sin \theta, X)\} \cos^2 \theta d\theta \\ n_2 &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{f_{1x}(X \sin \theta, X) - f_{2x}(X \sin \theta, X)\} \sin 2\theta d\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots (13)$$

(12), (13) 両式を (6), (7) 両式に代入すると

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ [f_{1x}(X \sin \theta, X) + f_{2x}(X \sin \theta, X)] \right. \\ &\quad \left. + [f_{1x}(X \sin \theta, X) + f_{2x}(X \sin \theta, X)] \sin \theta \right\} d\theta \\ c_2 &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{f_{1x}(X \sin \theta, X) \\ &\quad - f_{2x}(X \sin \theta, X)\} \cos \theta d\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots (14)$$

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{f_{1x}(X \sin \theta, X) + f_{2x}(X \sin \theta, X)\} \cos 2\theta \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - [f_{1x}(X \sin \theta, X) + f_{2x}(X \sin \theta, X)] \sin \theta \right\} d\theta \right)^2 \\ &\quad + \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{f_{1x}(X \sin \theta, X) - f_{2x}(X \sin \theta, X)\} \sin 2\theta \right. \\ &\quad \left. + [f_{1x}(X \sin \theta, X) - f_{2x}(X \sin \theta, X)] \cos \theta \right\} d\theta \right)^2 \Bigg\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \dots\dots (15)$$

となる。もし $f(x)$ が X に無関係ならば

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{f_1'(X \sin \theta) + f_2'(X \sin \theta)\} d\theta, \\ c_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (16)$$

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{f_1'(X \sin \theta) + f_2'(X \sin \theta)\} \cos 2\theta d\theta \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{f_1'(X \sin \theta) - f_2'(X \sin \theta)\} \sin 2\theta d\theta \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

となる。この場合 $c_2=0$ となるのはすでに述べたことである。さらに $f(x)$ が 1 価関数の場合には

$$c_1 = -\frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f'(X \sin \theta) d\theta, \quad c_2 = 0 \dots\dots (18)$$

$$\rho = \frac{1}{\pi} \left| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f'(X \sin \theta) \cos 2\theta d\theta \right| \dots\dots (19)$$

となる。

3. 非線形特性の規準化と極限限界曲線

よくあらわれる代表的な非線形要素の種類はそう多くはないが、同じ種類の非線形要素であってもそのパラメータが変わると、それに応じて限界曲線も変わる。しかし、非線形特性を規準化した形で表わすことにより、同じ種類の非線形要素に対する限界曲線が一定の曲線になるようにすることができると考えられる。また (14), (15) 両式からわかるように等振幅円の中心および半径は、 $f'(x)$ と密接な関係を持っているから、規準化にあたって $f'(x)$ の値に制限を加えれば、限界曲線の存在領域を局限することができ、限界曲線の作図が容易になると考えられる。このような見地からつぎのような規準化を行なうことにする。

(1) $|f'(x)|$ の最大値が 1 になるようにする。もし実際の非線形特性において $|f'(x)|$ の最大値が K ならば非線形特性は $f(x)/K$ とし、そのかわり線形部伝達関数を K 倍しておけばよい。本文では前章でことわっておいたように $f(x)$ は連続であるとしているので、これはつねに可能である。しかし、リレー特性のように不連続な点を持つものについてはこれは不可能である。

(2) r, x, y などの制御系内の信号の単位を $f(x)$ のパラメータに関連させて定める。たとえば、折線近似の飽和要素では折点に相当する x の値を単位にとる。

このような規準化を行なうことによって $-1 \leq f'(x) \leq 1$ となるが、実際の非線形要素のなかには $f'(x) < 0$ の部分を持つものは少ないので、けっきょく多くの場合 $0 \leq f'(x) \leq 1$ となってしまう。そこで $f(x)$ が X に無関係な場合については、(16) の第 1 式から $-1 \leq c_1 \leq 0$ となる。いま

$$c_1 = -\lambda, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \dots\dots (20)$$

とすると、(16) の第 1 式からこの c_1 の値に対応する X の値が定まり、したがって (17) 式からこの c_1 の値に対応する ρ の値が定まる。ここで、 c_1 は一定のままで $f(x)$ に変化を与えた場合の ρ の最大値を求めてみよう。いま X を一定として

$$g(\theta) \equiv \frac{1}{2} \{g^*(\theta) + g^*(-\theta)\}$$

$$\left. \begin{aligned} g^*(\theta) &\equiv \frac{1}{2} \{f_1'(X \sin \theta) + f_2'(X \sin \theta)\} \\ h(\theta) &\equiv \frac{1}{2} \{h^*(\theta) - h^*(-\theta)\} \\ h^*(\theta) &\equiv \frac{1}{2} \{f_1'(X \sin \theta) - f_2'(X \sin \theta)\} \end{aligned} \right\} \dots\dots (21)$$

とおくことにすれば

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq g(\theta) \leq 1, \quad -\frac{1}{2} \leq h(\theta) \leq \frac{1}{2}, \\ 0 \leq g(\theta) \pm h(\theta) \leq 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots (22)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\theta) d\theta = \frac{\lambda\pi}{2} \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad \dots\dots (23)$$

$$\rho = \frac{2}{\pi} \left\{ \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\theta) \cos 2\theta d\theta \right)^2 + \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(\theta) \sin 2\theta d\theta \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \dots\dots (24)$$

となる。ここで (22) 式を満足する $g(\theta)$, $h(\theta)$ は Fig. 2 に示す正方形の領域の内部または周上にある。

Fig. 2 Region in which $g(\theta)$ and $h(\theta)$ lie

そこで (22), (23) 式の条件のもとで (24) 式の汎関数 ρ の最大値を求めるという一種の変分問題になる。

まず $h(\theta) = 0$ の場合は, ρ を最大にする $g(\theta)$ は Fig. 3 に示す 2 種類であることが容易にわかる。そしてこの 2 種類のいずれについても

$$\rho = \frac{1}{\pi} \sin \lambda\pi \quad \dots\dots (25)$$

となる。また Fig. 3 (a), (b) の $g(\theta)$ を与える $f(x)$ は, それぞれ規準化された折線近似の飽和および不動

Fig. 3 $g(\theta)$

Fig. 4 $h(\theta)$ and $g(\theta)$

帯であることも容易にわかる。

つぎに $h(\theta) \neq 0$ の場合に, ρ が (25) 式の値より大きくなりうるかどうかを考えてみよう。いま Fig. 3 (a) の場合について $h(\theta)$ を Fig. 4 (a) の実線または破線のようなものに変えてみる。 $h(\theta) = \pm a$ の区間では $a \leq g(\theta) \leq 1-a$ でなければならないから, $g(\theta)$ にも変更を加えなければならないが, ρ をできるだけ大きくするような $g(\theta)$ は, Fig. 4 (b) または (c) に示すものとなることが容易にわかる。Fig. 4 (a), (b) の組み合わせについて ρ を計算してみると

$$\rho = \frac{1}{\pi} \{ \sin^2(\lambda\pi - 2a\Delta) + 4a \sin(\lambda\pi - 2a\Delta) \sin \Delta \times \cos(2\theta_1 + \Delta) + 4a^2 \sin^2 \Delta \}^{\frac{1}{2}} \quad \dots\dots (26)$$

となる。この ρ は $\theta_1 = (\lambda\pi/2) - a\Delta$ のとき ρ の最大値をとる。

$$\rho = \frac{1}{\pi} \{ \sin^2(\lambda\pi - 2a\Delta) + 4a \sin(\lambda\pi - 2a\Delta) \times \cos(\lambda\pi - 2a - 1)\Delta \sin \Delta + 4a^2 \sin^2 \Delta \}^{\frac{1}{2}} \quad \dots\dots (27)$$

この式の右辺の値は, $a=0$ および $1/2$ のとき (25) 式の右辺の値と等しくなることが容易にわかる。そこで Δ が微小であるものとして, Δ について展開してみる。

$$\rho = \frac{1}{\pi} \left[\sin^2 \lambda\pi + 8a \left(a - \frac{1}{2} \right) \Delta^2 \times \left\{ \sin^2 \lambda\pi - \frac{1}{3} (4a-1) \Delta \sin 2\lambda\pi + \dots \right\} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \dots\dots (28)$$

となる。ゆえに Δ が微小ならば $a=1/2$ のとき ρ は, (25) 式の値と等しくなり, $0 < a < 1/2$ のときこれより小さくなる。なお $a=0$ のときにも ρ が (25) 式の値と等しくなるが, これは $h(\theta)=0$ の場合にほかならない。さて Δ が有限で $a=1/2$ の場合の $h(\theta)$, $g(\theta)$ はそれぞれ Fig. 5 (a), (b) のようになるが, ここで $h(\theta)$ に上と同様の変化を与えた場合の ρ の式は, (27) 式と全く同じになることを容易に示すことができる。したがって, この場合も $a=1/2$ のとき ρ は最大となる。以上から Fig. 4 (a), (b) の組み合わせについては, $a=1/2$, $\theta_1 = (\lambda\pi - \Delta)/2$ のとき, すなわち Fig. 5 (a), (b) の状態のとき ρ が最大となることが結論でき

る. なお $a=1/2$, $\lambda\pi=\Delta$ という特別の場合には θ_1 には無関係に (26) 式の右边が (25) 式の値と等しくなるが, このときの $g(\theta)$ を Fig. 5 (c) に示す. つぎに Fig. 4 (a), (c) の組み合わせについて同様のことをしらべてみると, やはり $a=1/2$, $\theta_1=(\lambda\pi-\Delta)/2$ のとき, すなわち Fig. 5 (a), (b) の状態のとき ρ が最大となり, また $a=1/2$, $(1-\lambda)\pi=\Delta$ という特別の場合には θ_1 には無関係に ρ が (25) 式の値となるが, このときの $g(\theta)$ を Fig. 5 (e) に示す.

Fig. 3 (b) の場合についても同様のことをしらべてみると類似の結果が得られ, けっきょく ρ を最大にする $g(\theta), h(\theta)$ の組み合わせは Fig. 5 (a) の $h(\theta)$ と (b)~(d) の $g(\theta)$ とであることがわかる. またこれらの場合の ρ の値は, いずれも (25) 式の値に等しい. これらの場合 $\Delta=0$ ならば, λ は $0 \leq \lambda \leq 1$ の全範囲にわたる値をとるが $\Delta \neq 0$ の場合 ρ が最大値をとる λ の値は, $(\Delta/\pi) \leq \lambda \leq 1 - (\Delta/\pi)$ の範囲に制限される. ただし, Fig. 5 (c), (e) の場合は, それぞれ $\lambda=\Delta/\pi$ および $1 - (\Delta/\pi)$ の値のみが可能である. Fig. 5 (b), (d) の場合の $f(x)$ は, それぞれ (f), (g) のようになり, (c), (e) の場合のそれは, それぞれ (f), (g) と同じ形であるが折点の位置が異なる. これらはいずれもヒステリシスであるが, $\Delta=0$ のとき (f) は飽和, (g) は不動帯となるから, (f), (g) はそれぞれ飽和形および不動帯形のヒステリシスといえることができる. なお, これらは $h(\theta)$ として (a) の実線をとったものであるが, 破線をとると f_1 と f_2 とが入れかわり, いわゆる逆ヒステリシスとなる.

(20) 式で与えられる c_1+j0 を中心とし, (25) 式で与えられる ρ を半径とする円の方程式は

Fig. 6 Limit boundary curves

$$(h_1 + \lambda)^2 + h_2^2 = \frac{1}{\pi^2} \sin^2 \lambda\pi \quad \dots\dots (29)$$

となり, この式の両辺を λ で偏微分すると

$$2(h_1 + \lambda) = \frac{2}{\pi} \sin \lambda\pi \cos \lambda\pi \quad \dots\dots (30)$$

となる. (29), (30) 両式を書き直すと

$$h_1 = -\lambda + \frac{1}{2\pi} \sin 2\lambda\pi, \quad h_2 = \pm \frac{1}{\pi} \sin^2 \lambda\pi \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad \dots\dots (31)$$

となる. これは λ をパラメータとする (29) 式の円群の包絡線の方程式であり, 図に示すと Fig. 6 の曲線 (A) のようになる. $f(x)$ が X に無関係で, かつ $0 \leq f'(x) \leq 1$ である場合の限界曲線は, この曲線 (A) の内部に含まれてしまうはずであるから, これをこの場合の極限限界曲線と呼ぶことにする. なお, もし $-1 \leq f'(x) \leq 0$ ならば, 虚軸に関して曲線 (A) と対称な曲線が, 極限限界曲線となることは明らかである.

つぎに $f(x)$ は, やはり X に無関係であるが, $-1 \leq f'(x) \leq 1$ の場合は (16) の第 1 式から $-1 \leq c_1 \leq 1$ となり

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \lambda \\ -1 &\leq \lambda \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

を中心とする等振幅円の半径の最大値をしらべてみると

$$\rho = \frac{2}{\pi} \cos \frac{\lambda\pi}{2} \quad (33)$$

となる. また極限限界曲線の方程式は

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= \lambda + \frac{1}{\pi} \sin \lambda\pi, \\ h_2 &= \pm \frac{2}{\pi} \cos^2 \frac{\lambda\pi}{2} \\ -1 &\leq \lambda \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (34)$$

となり, 図にあらわすと Fig. 6 の曲線 (B) のようになる.

Fig. 5 $h(\theta), g(\theta)$ and $f(x)$

Fig. 7 Iso-X circles and boundary curves of typical nonlinear elements (inverse-vector-locus plane)

nonlinearity	idealized saturation	idealized dead zone	saturation with dead zone	
normalized characteristics
interval of X	$X \geq 1$	$X \geq 1$	$D \leq X \leq D+1$	$X \geq D+1$
center	$-\lambda + j0$	$-\lambda + j0$	$-\lambda + j0$	$-(\lambda_1 - \lambda_2) + j0$
radius	$\frac{1}{\pi} \sin \lambda \pi$	$\frac{1}{\pi} \sin \lambda \pi$	$\frac{1}{\pi} \sin \lambda \pi$	$\frac{1}{\pi} \sin \lambda_1 \pi - \sin \lambda_2 \pi $
remarks	$\lambda = \frac{2}{\pi} \sin^{-1} \frac{1}{X}$ $0 \leq \lambda \leq 1$	$\lambda = \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \frac{1}{X}$ $0 \leq \lambda \leq 1$	$\lambda = \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \frac{D}{X}$ $0 \leq \lambda \leq \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \frac{D}{D+1}$	$\lambda_1 = \frac{2}{\pi} \sin^{-1} \frac{D+1}{X}, \lambda_2 = \frac{2}{\pi} \sin^{-1} \frac{D}{X}$ $0 \leq \lambda_1 \leq 1, 0 \leq \lambda_2 \leq \frac{2}{\pi} \sin^{-1} \frac{D}{D+1}$

nonlinearity	smooth saturation		smooth dead zone	
normalized characteristics		$y = \begin{cases} 1 & x \geq \frac{3}{2} \\ x - \frac{4}{27}x^3 & x \leq \frac{3}{2} \\ -1 & x \leq -\frac{3}{2} \end{cases}$		$y = \begin{cases} x-1 & x \geq \frac{3}{2} \\ \frac{4}{27}x^3 & x \leq \frac{3}{2} \\ x+1 & x \leq -\frac{3}{2} \end{cases}$
interval of X	$0 \leq X < \frac{3}{2}$	$X \geq \frac{3}{2}$	$0 \leq X \leq \frac{3}{2}$	$X \geq \frac{3}{2}$
center	$-\left(1 - \frac{2}{9}X^2\right) + j0$	$-\frac{1}{\pi} \left\{ \sqrt{\frac{4}{9}X^2 - 1} - 2 \times \left(\frac{2}{9}X^2 - 1\right) \sin^{-1} \frac{3}{2X} \right\} + j0$	$-\frac{2}{9}X^2$	$-1 + \frac{1}{\pi} \left\{ \sqrt{\frac{4}{9}X^2 - 1} - 2 \times \left(\frac{2}{9}X^2 - 1\right) \sin^{-1} \frac{3}{2X} \right\} + j0$
radius	$\frac{1}{9}X^2$	$\frac{1}{\pi} \left \left(\frac{9}{4X^2} - \frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{4}{9}X^2 - 1} + \frac{2}{9}X^2 \sin^{-1} \frac{3}{2X} \right $	$\frac{1}{9}X^2$	$\frac{1}{\pi} \left \left(\frac{9}{4X^2} - \frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{4}{9}X^2 - 1} + \frac{2}{9}X^2 \sin^{-1} \frac{3}{2X} \right $

nonlinearity	hysteresis	backlash	saturation with backlash	
normalized characteristics
interval of X	$X \geq D+1$	$X \geq 1$	$D \leq X \leq D+1$	$X \geq D+1$
center	$-\lambda + j0$	$-\frac{1}{\pi}(\theta + \sin \theta) + j\frac{1}{\pi}(1 + \cos \theta)$	see backlash	
radius	$\frac{1}{\pi} \sin \lambda \pi$	$\frac{1}{\pi}(1 + \cos \theta)$		
remarks	$\lambda = \frac{1}{\pi} \left(\sin^{-1} \frac{-D+1}{X} + \sin^{-1} \frac{-D+1}{X} \right)$ $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sin^{-1} \frac{-D+1}{D+1}$	$X = \sec^2 \frac{\theta}{2}$	$\frac{X}{D} = \sec^2 \frac{\theta}{2}$	see hysteresis

Table 1 Centers and radii of iso- X circles for typical nonlinear elements.

$f(x)$ が X によって変化する場合には、限界曲線が実軸に対して対称ではなくなり、さらに c_1, c_2, θ の値が $f_{ix}(x, X)$ だけではなく、 $f_{ix}(x, X)$ の値にも関係するようになるが、実際には $f_{ix}(x, X)$ の値にも制限があるから、限界曲線の存在領域はやはり原点付近に局限されることになると考えられる。

このように限界曲線の存在領域が、原点付近に局限されることとなったのは、規準化を行なったことと $H(j\omega)$ 平面を用いたことによるのであって、もし $G(j\omega)$ 平面を用いることにすれば、Fig. 6 の原点に相当する点は無限遠に移り $\pm 1 + j0$ に相当する点は動かないから、限界曲線は広い範囲にまたがることとなり、作図がしにくくなるのである。

4. 規準化された各種非線形要素の限界曲線

規準化された代表的な非線形要素の特性および等振幅円の中心と半径を Table 1 に示し、等振幅円群と限界曲線を Fig. 7 に示した。等振幅円の中心と半径は、(14)～(19) 式を用いて容易に計算することができ、限界曲線は等振幅円群の包絡線として描くことができるが、簡単な式で表わすことができるものもある。

Table 1 にあげてある非線形要素は、 $0 \leq f'(x) \leq 1$ であるものばかりであるから、バックラッシュおよびバックラッシュを含む飽和のほかは、限界曲線がこの場合の極限限界曲線である Fig. 6 の曲線 (A) の内部におさまるはずであり、事実そのとおりになっている。特にもっともありふれた非線形要素である折線近似の飽和および不動帯の限界曲線が、極限限界曲線と全く一致することは前章で述べたとおりである。また、不動帯を含む飽和の場合の $\Delta \leq X \leq \Delta + 1$ の範囲、およびヒステリシスの場合の限界曲線は、それぞれ

$$0 \leq \lambda \leq \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \frac{\Delta}{\Delta + 1} \quad \dots\dots (35)$$

および

$$0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sin^{-1} \frac{-\Delta + 1}{\Delta + 1} \quad \dots\dots (36)$$

の範囲の λ に対する極限限界曲線の部分と、 λ の上限の値に対応する等振幅円の円弧とから成っている。なお、不動帯を含む飽和の場合の $X \geq \Delta + 1$ の範囲の等振幅円は $0 \leq X \leq \Delta + 1$ の範囲の限界曲線の内部に含まれてしまうことは容易にたしかめることができる。

丸味を帯びた飽和および不動帯の $0 \leq X \leq 3/2$ の範囲に対する限界曲線も簡単な式で表わすことができ、それぞれつぎのような線分となる。

$$h_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} (h_1 + 1) \quad -1 \leq h_1 \leq -0.625 \dots\dots (37)$$

$$h_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} h_1 \quad -0.375 \leq h_1 \leq 0 \quad \dots\dots (38)$$

周波数応答法による解析や設計に用いるためには、等振幅円および限界曲線をゲイン-位相平面に移しておくとう便利である。Fig. 8 にこれを示した。なお、 $H(j\omega)$ 平面上の曲線をゲイン-位相平面上に移すためには、原点を中心とする半径 r の円に $-20 \log_{10} r$ を目盛り、原点から角度 φ の方向に引いた半直線に $-\varphi$ を目盛った透明紙を用意しておくのが便利である。

- I - II - II' - I' : Limit boundary curve (idealized saturation and dead zone)
- I - III - III' - I' : Saturation with dead zone ($\Delta=1$) and hysteresis ($\Delta=1$)
- IV : Smooth saturation
- V : Smooth dead zone
- VI - VII : Backlash
- I - III - VIII - VII : Saturation with backlash ($\Delta=1$)

Fig. 8 Boundary curves of typical nonlinear elements (gain-phase plane)

5. 跳躍共振の発生

線形部の逆ベクトル軌跡が限界曲線で囲まれた領域を通過すると、跳躍共振が起こりうることとなるわけであるが、それがどのような形で起こるかについて考察してみよう。Fig. 9 に示すような場合を考える。ただし図において $X_1 < X_2 < \dots < X_5$ であり、 $H(j\omega)$ 軌跡上の $\omega = \omega_1$ なる点を通る 2 個の等振幅円に対する X の値が X_2 および X_4 であるものとする。正弦波入力 $r = R \sin \omega_1 t$ を加えると、定常状態において $x = X \sin(\omega_1 t + \varphi)$ であり、 $X_2 < X < X_4$ のときは $\partial R / \partial X < 0$ となり、 $X < X_2$ および $X > X_4$ のときは $\partial R / \partial X > 0$ となるから (2) 式の与える R と X との関係は Fig. 10 に示すようになる。したがって、 R を連続的に増加または減少させると B→D のような跳昇および C→A のような跳降が起こることとなる。また、

Fig. 9 Iso- X circles and an inverse vector locus

$R < R_4$ および $R > R_2$

なる R に対しては、

1 個の X の値だけが

可能であり、 $R_4 < R$

$< R_2$ なる R に対し

ては 3 個の X の値が

存在するが、 AB 上

および CD 上の 2 個

だけが実際に起こ

り、 BC 上の 1 個は不安定のため実際には起こらない

と思われる。

つぎに R を一定値に保ちながら ω を連続的に増加ま

たは減少させると、ある範囲の ω に対しては 2 個の安

定な X の値と 1 個の不安定な X の値とが存在する場合

があり、このときこの範囲の一端の周波数では跳昇が

起こり、他端の周波数では跳降が起こる。

Fig. 8 からわかるようにゲイン-位相平面上の発生

限界曲線は 0 dB 、 -180° の点を通るか、またはこの

点の上側を通ることが多い。一方系は安定でなければ

ならないから線形部のゲイン-位相曲線は通常この点

の下側を通る。したがって、位相が -180° となるよ

うな ω において跳躍が起こることはほとんどないこと

になる。多くの制御系ではゲイン-位相曲線は周波数

が増すにつれて右上から左下に向かうのが普通である

から、 R を一定に保って ω を連続的に増加または減少

するとき跳躍が起こるとすれば、それは位相が -180°

となる周波数よりやや低い周波数範囲で起こること

になる。線形制御系のゲイン特性は位相が -180° とな

る周波数付近にピークを持つことがしばしばあるが、

いまは非線形要素の存在のためにこのピークが低周波

側に傾むいて跳躍が起こったとみることができよう。

跳躍共振と呼ばれるのはこのためである。なお、もし

周波数が増すにつれてゲイン-位相曲線が 0 dB 、 -180°

の点の下側から左上に向かうような系があれば、ピー

Fig. 10 R - X curve

り、 BC 上の 1 個は不安定のため実際には起こらない

と思われる。

つぎに R を一定値に保ちながら ω を連続的に増加ま

たは減少させると、ある範囲の ω に対しては 2 個の安

定な X の値と 1 個の不安定な X の値とが存在する場合

があり、このときこの範囲の一端の周波数では跳昇が

起こり、他端の周波数では跳降が起こる。

Fig. 8 からわかるようにゲイン-位相平面上の発生

限界曲線は 0 dB 、 -180° の点を通るか、またはこの

点の上側を通ることが多い。一方系は安定でなければ

ならないから線形部のゲイン-位相曲線は通常この点

の下側を通る。したがって、位相が -180° となるよ

うな ω において跳躍が起こることはほとんどないこと

になる。多くの制御系ではゲイン-位相曲線は周波数

が増すにつれて右上から左下に向かうのが普通である

から、 R を一定に保って ω を連続的に増加または減少

するとき跳躍が起こるとすれば、それは位相が -180°

となる周波数よりやや低い周波数範囲で起こること

になる。線形制御系のゲイン特性は位相が -180° とな

る周波数付近にピークを持つことがしばしばあるが、

いまは非線形要素の存在のためにこのピークが低周波

側に傾むいて跳躍が起こったとみることができよう。

跳躍共振と呼ばれるのはこのためである。なお、もし

周波数が増すにつれてゲイン-位相曲線が 0 dB 、 -180°

の点の下側から左上に向かうような系があれば、ピー

クは高周波側に傾むくことになると思われる。

6. 飽和を含む 2 次サーボ系の跳躍共振発生限界

飽和を含む 2 次サーボ系では、減衰係数が小さいときだけ跳躍共振が起こりうることは以前から知られていた⁽¹⁾。そこで限界の減衰係数の値を求めてみることにする。Fig. 11 (a) は速度帰還を持つ 2 次サーボ系のブロック線図であり、これは (b) のように等価変換

(a) Original system

(b) Reduced system

Fig. 11 Block diagram of a 2nd-order servo system

することができる。 N は規準化された折線近似の飽和要素の記述関数であり、また

$$G(s) = \frac{K_2(K_1 + K_3s)}{s(Ts+1)} \quad \dots\dots(39)$$

である。ここで $K_2K_3 = K$ とおくことにすると減衰係数は

$$\zeta = \frac{1+K}{2\sqrt{K_1K_2T}} \quad \dots\dots(40)$$

となり、 $\tau = \sqrt{T/K_1K_2}$ と書けば

$$G(s) = \frac{1 + \frac{2\zeta K}{1+K} \tau s}{\tau s \left(\tau s + \frac{2\zeta}{1+K} \right)} \quad \dots\dots(41)$$

となる。これから $G(s)$ の逆ベクトル軌跡またはゲイン-位相曲線を求めて、跳躍共振が起こるかどうかを判別することができるわけであるが、 $G(s)$ の形が比較的簡単であるから解析的に取り扱ってみることにする。折線近似の飽和に対する限界曲線は、(29)式で与えられるから跳躍共振が発生するためには

$$(h_1 + \lambda)^2 + h_2^2 < \frac{1}{\pi^2} \sin^2 \lambda \pi \quad \dots\dots(42)$$

でなければならない。これに (41) 式から求めた h_1, h_2 の値を代入すると

$$\begin{aligned}
 & (\tau\omega)^4 - A(\tau\omega)^2 + B < 0 \\
 & A = 2\lambda - \left(\frac{2\zeta}{1+K} \right)^2 \left\{ \left(\lambda^2 - \frac{1}{\pi^2} \sin^2 \lambda\pi \right) K^2 + 2\lambda K + 1 \right\} \\
 & B = \lambda^2 - \frac{1}{\pi^2} \sin^2 \lambda\pi
 \end{aligned}
 \quad \dots\dots (43)$$

を得る。(43)式を満足する ω, λ の実数値が存在するためには $A > 0, A^2 - 4B > 0$ でなければならないから

$$\zeta < \frac{1+K}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \frac{1}{\pi^2} \sin^2 \lambda\pi}}{\left(\lambda^2 - \frac{1}{\pi^2} \sin^2 \lambda\pi \right) K^2 + 2\lambda K + 1}} \quad \dots (44)$$

を得る。これから跳躍共振が起こりうるための ζ, K の範囲を求めた結果を Fig. 12 に示した。なお、これについては飽和要素の記述関数を $N=1/|X|$ と近似した伊藤、山村両氏⁽⁵⁾の解析があるので、両氏の結果すなわち $\zeta = \sqrt{1+K}/2$ を比較のため破線で示しておいた。

Fig. 12 Jump resonance of the 2nd-order servo system with saturation

Fig. 12 からわかるように、速度帰還がないときは $\zeta < 0.27$ のときに跳躍共振が起こる。2次制御系は、 $\zeta = 0.3 \sim 1.0$ となるように設計されるのが普通であるから速度帰還がないときには跳躍共振発生のおそれはないと考えてよい。しかし、速度帰還量が増せば普通の設計条件でも跳躍共振が発生しうることとなるから注意を要する。

7. むだ時間と飽和を含む系における跳躍共振

Fig. 8 を用いて跳躍共振が起こるかどうかを判別する例として、むだ時間と飽和を含む系を考えてみよう。

(a) Original system

(b) Normalized system

Fig. 13 A system with dead time and saturation

坂和、菅田両氏⁽⁶⁾は、Fig. 13 (a) に示す系における振動をしらべているので、この系をとりあげてみる。飽和特性は $\lambda = \sqrt{1/(3\varepsilon)}$ とおいてつぎの式で表わされている。

$$f(y) = \begin{cases} \frac{2}{3} k\lambda & y \geq \lambda \\ k(y - \varepsilon y^3) & |y| \leq \lambda \\ -\frac{2}{3} k\lambda & y < -\lambda \end{cases} \quad \dots\dots (45)$$

これは $f(y)/k$ の特性を持つ飽和要素と、その後に続く伝達関数 k の線形要素とに分離することができ、さらに信号を $2\lambda/3$ を単位として測ることにすると規準化された飽和特性は Table 1 の丸味を帯びた飽和要素のそれと全く同じになる。また Fig. 13 (a) は等価変換によって (b) のようにすることができる。坂和、菅田両氏は

(A) $\delta = 1, k = 2.1^*, L = 5.8$ (入力振幅 0.82 および 2.46)

(B) $\delta = 0.1, k = 0.55, L = 6.1$ (入力振幅 0.82)

の場合について強制振動の共振曲線を求め、この数値では跳躍共振があらわれないことを示しておられる。なお、ここに示した入力振幅の値は規準化した値である。両氏はさらに ε を大きくすれば跳躍共振が起こるだろうという予想を述べておられるが、 ε を大きくすることは規準化した系では入力振幅を大きくすることに相当する。しかし、単に入力振幅を大きくするだけでは跳躍共振は起こりうるとはかぎらないのであって、そのまえにまず、線形部のゲイン-位相曲線が限界曲線で囲まれる領域内を通過し、かつ系は安定であるという必要条件が満足されていなければならないはずである。そこで、上の (A) および (B) の場合につ

* 坂和、菅田両氏の論文では $k = 2.2$ となっているが、この状態では系が不安定になってしまう。両氏に照会したところ $k = 2.1$ の誤りであることがわかった。

(A) : $\delta=1$, $k=2.1$, $L=5.8$; (B) : $\delta=0.1$, $k=0.55$, $L=6.1$; (C_1)~(C_8) : $\delta=0.01$, $k=0.2$, $L=0$ (C_1), 1.05 (C_2), 1.51 (C_3), 5.09 (C_4), 5.36 (C_5), 7.12 (C_6), 7.20 (C_7), 12.02 (C_8)

Fig. 14 Jump resonance of the system shown in Fig. 13

いて線形部のゲイン-位相曲線を描いてみたところ、それぞれ Fig. 14 の曲線 (A), (B) のようになった。したがって、これらの場合には入力振幅をどのように変えても跳躍共振は起こり得ないこととなる。ただし、これは第 2 章の最初の部分で述べた仮定が成り立つものとしての話である。

いま $\delta=0.01$, $k=0.2$, $L=0$ の場合について線形部のゲイン-位相曲線を描いてみると、Fig. 14 の曲線 (C_1) のようになる。 $L=0$ のままで δ および k を変えると、この曲線は縦軸の方向に移動するが、その形は変わらない。また $\omega=1$ のときゲインは最大値 $20 \log_{10} \{k/(\delta \omega)\}$ [dB]、位相は 0° となり、 $\omega=0$ および ∞ のときはゲインはいずれも $-\infty$ [dB] で、位相はそれぞれ 90° および -90° となる。さらに ω の目盛は k には無関係で、 δ が大きくなるほど $\omega=1$ の目盛のほうへ移動する。つぎに δ および k はそのまま L を 0 から増して行くと、ゲイン-位相曲線は横軸の方向に左方へ移動するとともに形がくずれて行く。したがって $k > 2\delta$ ならば適当な L の値で跳躍共振が起こる可能性がある。いま考えている場合については、Fig. 14 の曲線 (C_1)~(C_8) に示すようになる。すなわち、 $L=1.05$ のときはじめて限界曲線に接し、 $L=1.51$ のときはじめて安定限界に達するから、 $1.05 < L < 1.51$ のとき安定状態で跳躍共振が起こりうることとなる。同じようにして $5.09 < L < 5.36$ および $7.12 < L < 7.20$ のときにも跳躍共振が起こりうる。なお $1.51 < L < 5.09$, $7.20 < L < 12.02$ などのときには系が不

安定になる。

δ が大きいときは、 k をいろいろに変えてみても L を 0 から増して行くと、いきなり安定限界に達してしまい、跳躍共振が起こりにくいようである。これは限界曲線が 0 dB, -180° の点でとがっているためであり、もし折線近似の飽和特性を用いれば、 δ が大きくても $k > 2\delta$ のとき適当な L の値で跳躍共振が起こることになる。

8. 非線形制御系の設計と跳躍共振

ゲイン-位相平面上の跳躍共振発生限界曲線を用いると、非線形制御系の設計において跳躍共振が起こらないための線形補償要素を決定することはきわめて容易である。制御系は、まず安定でなければならないから、適当なゲイン余裕および位相余裕を持つように設計され、たとえば $M_p=1.3$ となるように設計されることが多いのはよく知られていることである。このように設計されたものとする、Fig. 8 からわかるようにゲイン交点および位相交点の付近、およびそれより高い周波数で跳躍共振が起こる可能性は、バックラッシュを含む場合を除くとほとんどないことになる。したがって、跳躍共振が発生する可能性があるのは低い周波数である場合が多いと考えられる。線形制御系では、定常特性の改善のために位相遅れ補償が行なわれることが多いが、このような場合には低周波数範囲において位相が 90° 以上遅れ、したがって、系に非線形性があると跳躍共振発生の可能性が生ずることとなる。

9. む す び

非線形制御系における跳躍共振の発生限界を簡単に利用しやすい形に表わし、その応用例を示した。また一定の条件を満足する非線形要素については、跳躍共振の発生限界に極限が存在することを明らかにした。終わりに本学会第3回学術講演会⁽⁷⁾および自動制御部会⁽⁸⁾においてご討論いただいた方々および数学上のご教示をいただいた本学武田二郎教授に深く謝意を表す。なお卒業研究として一部の計算を行なってくれた佐藤一清君（現在日本電気株式会社勤務）に対しても謝意を表す。

引 用 文 献

- (1) W. E. Scott : An introduction to the analysis of non-linear closed cycle control systems, Automatic and Manual Control, Butterworth, London, 249/261, 1952
- (2) J. C. West, J. L. Douce and R. K. Livesley : The dual-input describing function and its

use in the analysis of non-linear feedback systems, PIEE, Vol. 103, pt. B, 463/474, 1956

- (3) J. C. Gille et P. Decaulne : A propos des oscillations forcées des asservissements non-linéaires, Automatic and Remote Control, Butterworth, London, Vol. 1, 205/210, 1961
- (4) H. Hatanaka : The frequency responses and jump-resonance phenomena of nonlinear feedback control systems, Trans. ASME, Journal of Basic Engineering, 236/242, June 1963
- (5) 伊藤春雄, 山村 昌 : 速度帰還を有するサーボ系の跳躍現象とその補償について, 電気4学会連大, 209, 1964-4 月
- (6) 坂和愛幸, 菅田一博 : むだ時間をもつ非線形の系における振動, 電気学会雑誌, Vol. 83, 2071/2079, 1963
- (7) 福間, 松原 : 飽和を含む制御系における跳躍共振について, 計測自動制御学会第3回学術講演会論文集, 208, 1964-9 月
- (8) 福間, 松原 : 非線形制御系における跳躍共振について, 自動制御, Vol. 4, 77/80, 1965