積分形コントローラをもつ

多変数線形最適追従系の設計[†]

朴 炳植・鈴木 胖・藤井克彦

Synthesis of Multivariable Linear Optimal Servo-System Incorporating Integral-Type Controllers

Pyong Sik PAK*, Yutaka SUZUKI* and Katsuhiko FUJII*

In classical control systems, integral-type controllers are widely used to cope with process parameter variations and other perturbations or disturbances. In this paper a method based on the regulator theory to synthesize an optimal multivariable servo-system incorporating the integral-type controllers is described. The principle of this method is similar to the previous one¹⁾, but is different in that the integrated values of the tracking errors are introduced as the new process state variables. The advantages of this method are as follows:

- (1) Optimal control is easily obtainable.
- (2) The resulting control system has feedback and feedforward pass and has optimal tracking properties. Even if process parameters vary from their nominal values, steady state errors do not arise.

In an actual process, state variables are often inaccessible. For such a process the control system can be constructed by utilizing an observer. It is shown in the example that the input-output characteristics of a control system using the observer are less influenced by the process parameter variations than are those of a state feedback system.

1. ま え が き

筆者らは、先に多項式形目標入力に最適に追従する状態変数フィードバック制御系（最適サーボ系または最適追従系）の設計法について報告した¹⁾。現実のプロ

セスでは、そのパラメータが公称値どおりであるとは限らない。むしろずれているのが普通である。状態変数フィードバックは古典制御理論における PD（比例・微分）制御に相当するものであるから²⁾、この設計法をそのまま現実のプロセスに適用した場合は、制御系が最適でなくなったり、さらには定常誤差を生じる恐れがある。本論文はこのような問題点を解決するための方策を示すのが目的である。

古典制御理論では、積分形コントローラがパラメータ変動やその他の未知の外乱に対して、優れた働きをすることはよく知られている。それゆえ、状態変数に着目した制御理論においても、これまで積分動作を制御系にもたせるために種々の工夫がなされている。系の目標入力が常にゼロである regulator 問題においては、Moore らや Johnson が操作量の微分値を、また Portor が状態変数の積分値を評価関数の中に導入すると、制御系は状態変数およびその積分値がフィードバックされる構成となり、これは未知の平均値を有する外乱を受けても定常誤差の生じない系となることを明らかにしている^{3)~5)}。多項式形目標入力を受けるサーボ問題では、田川があらかじめ積分器を制御系にもたせた場合の追従誤差について解析を行なっている⁶⁾。しかし、そこでは設計法、すなわち制御系のパラメータをいかに定めればよいかについては触れられていない。最近では、Fond & Foulard が目標入力がステップの場合、積分形コントローラをもつ制御系を tracking 理論を利用して設計している⁷⁾。しかし、この方法では評価の時間を適当に大きくとり、そのときの解（この解は当然時変になる）の最終値を用いて時間不変の制御系を構成しているという点に疑問がある。

[†] 電気学会全国大会で発表（昭47・3）

* 大阪大学工学部 吹田市山田上

* Faculty of Engineering, Osaka University, Suita
(Received August 3, 1972)

本論文では、積分形コントローラをもつ最適多変数追従系を regulator 理論を用いて設計する方法について述べる。設計の原理は、先に報告した方法¹⁾に準ずるが、Fondらと同じく新たに状態変数として追従誤差の積分値が導入されている点が異なっている。本手法は、最適解が容易に求められるほか、ステップ形目標入力のみならず多項式形目標入力に対しても同様に適用できるという特長がある。得られる制御系は、フィードバックのみならずフィードフォワード制御も行なうという構成となる。本論文では、例題を取上げプロセスパラメータが公称値とずれている場合に、設計された制御系がいかなる応答特性を示すかについて検討する。さらに、現実のプロセスでは、状態変数の一部しか直接測定できない場合が普通であることを考慮して、observer を用いて直接測定可能な入出力信号から状態変数を合成し、制御系を構成した場合の系の応答特性についても検討を行なう。

2. 設 計 法⁸⁾

対象のプロセスの方程式を

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (2)$$

とする。ここで、 $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{u}(t)$ および $\mathbf{y}(t)$ はそれぞれ $n \times 1$ の状態ベクトル、 $m \times 1$ の入力（操作量）ベクトル、 $p \times 1$ の出力（制御量）ベクトルであり、 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ はそれぞれ $n \times n$, $n \times m$, $p \times n$ の定数マトリクスである。(1), (2) 式は完全可制御、完全可観測とする。ここでは簡単のため、制御量 $\mathbf{y}(t)$ の目標入力はステップ状入力 $\mathbf{r}$ とするが、以下の議論は目標入力が時間の多項式で与えられる場合についても同様に適用できる¹⁾。

制御系に対し定常状態では、出力 $\mathbf{y}(t)$ は目標入力 $\mathbf{r}$ に一致しなければならないという条件を課すと、そのために必要な入力の最終値 $\mathbf{u}_s$ およびこのときの状態変数の値 $\mathbf{x}_s$ は、それぞれ

$$\mathbf{u}_s = \bar{\mathbf{M}}_{22} \mathbf{r} \quad (3)$$

$$\mathbf{x}_s = \bar{\mathbf{M}}_{12} \mathbf{r} \quad (4)$$

と求められる。ここで、 $\bar{\mathbf{M}}_{12}$, $\bar{\mathbf{M}}_{22}$ はプロセスパラメータ $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ によって定まる $m \times p$, $n \times p$ の定数マトリクスである¹⁾。(1), (2) 式をこの定常状態を基準にして表わすと

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}}(t) \quad (5)$$

と書ける。ここで、 $\tilde{\mathbf{x}}(t)$, $\tilde{\mathbf{u}}(t)$ は

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) \equiv \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_s \quad (6)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}(t) \equiv \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_s \quad (7)$$

である。次式で定義される $\mathbf{v}(t)$ を状態変数として新

たに導入する^{*1}。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}(t) &\equiv \mathbf{e}(t) \equiv \mathbf{y}(t) - \mathbf{r} = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) - \mathbf{C}\mathbf{x}_s \\ &= \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}(t) \end{aligned} \quad (8)$$

$\mathbf{v}(t)$ は追従誤差 $\mathbf{e}(t)$ を積分したもので、これを導入することにより、あとに示すように積分型コントローラを制御系にもたせることができる。(5), (8) 式は、まとめるとつぎのようになる。

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \bar{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \bar{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{u}}(t) \quad (9)$$

ここで、

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) \equiv \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{v}(t) \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{x}}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_s \\ \mathbf{v}(0) \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O}_{n,p} \\ \mathbf{C} & \mathbf{O}_{p,p} \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{O}_{p,m} \end{bmatrix} \quad (11)$$

このように定式化を行なうと、筆者らが先に報告した最適追従系の設計理論を適用して制御系の設計を行なうことができる¹⁾。すなわち、

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty \{ \mathbf{e}'(t) \mathbf{Q}_1 \mathbf{e}(t) + \mathbf{v}'(t) \mathbf{Q}_2 \mathbf{v}(t) + \tilde{\mathbf{u}}'(t) \mathbf{P} \tilde{\mathbf{u}}(t) \} dt \\ &= \int_0^\infty \{ \tilde{\mathbf{x}}'(t) \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{x}}(t) + \tilde{\mathbf{u}}'(t) \mathbf{P} \tilde{\mathbf{u}}(t) \} dt \end{aligned} \quad (12)$$

なる評価関数を導入し、これを最小にするように $\tilde{\mathbf{u}}(t)$ を定めるのである。ここで、 $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$ は $p \times p$ 半正定マトリクス、 $\mathbf{P}$ は $m \times m$ の正定マトリクスであり、 $\mathbf{Q}$ は次式で求められる $(n+p) \times (n+p)$ のマトリクスである。

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}' \mathbf{Q}_1 \mathbf{C} & \mathbf{O}_{n,p} \\ \mathbf{O}_{p,n} & \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

(12) 式の評価関数を最小にすることは、 $\mathbf{y}(t) \rightarrow \mathbf{r}$ $= \mathbf{y}_s$, $\mathbf{u}(t) \rightarrow \mathbf{u}_s$, $\mathbf{v}(t) \rightarrow 0$, すなわちできるだけ速やかに定常状態に落着く系を設計するという意味をもつ。本評価関数は、誤差および操作量のほかに誤差の積分値 $\mathbf{v}(t)$ をも評価の対象にしている点が従来のものと異なっている。(9) 式の条件の下で(12)式を最小にする問題は、いわゆる regulator 問題としてよく知られている。 J を最小とする意味で最適な操作量を $\tilde{\mathbf{u}}_0(t)$ とすると

$$\tilde{\mathbf{u}}_0(t) = -\mathbf{K} \tilde{\mathbf{x}}(t) = -[\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2] \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{v}(t) \end{bmatrix} \quad (14)$$

で与えられる⁹⁾。ここで、 $\mathbf{K}$ は

$$\mathbf{K} \equiv [\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2] = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}' \bar{\mathbf{R}} \quad (15)$$

$$\mathbf{K}_1: m \times n, \mathbf{K}_2: m \times p$$

*1 目標入力が時間 t の q 次の多項式関数 $r(t)$ の場合は、

$$\dot{\mathbf{v}}^0(t) \equiv \mathbf{e}(t)$$

$$\dot{\mathbf{v}}^i(t) \equiv \mathbf{v}^{i-1}(t) \quad i=1, 2, \dots, q$$

で定義される $\mathbf{v}^i(t)$ ($i=0, 1, \dots, q$) を状態変数として新たに導入する必要がある。

により定められる。 $\bar{R}$ は Riccati 形方程式

$$\bar{R}\bar{A}+\bar{A}'\bar{R}-\bar{R}B P^{-1}B'\bar{R}+\bar{Q}=0 \quad (16)$$

の正定な解である。ただし、ペア $(\bar{A}, \bar{B})$ は完全可制御と仮定する。すなわち、

(1) もし A が正則であれば

$$\text{rank } C A^{-1} B = p \quad (17)$$

(2) もし A が singular であれば

$$\text{rank } C(A+BH)^{-1}B = p \quad (18)$$

ここで、 H は $(A+BH)$ を正則とするマトリクスが成立すると仮定する¹⁰⁾。この仮定は、たとえばプロセスの入力数よりも出力数が多い場合とか、プロセスの直流ゲインが零である場合とかのように任意の目標入力にオフセットなしで追従することが物理的に不可能な場合を除き、ほとんどのプロセスで成立する。プロセスへの最適操作量 $u_0(t)$ は(14)式に(6)、(7)式を代入し、さらに(3)、(4)式を用いてつぎのように求まる。

$$\begin{aligned} u_0(t) &= -K_1 x(t) - K_2 v(t) + K_1 x_s + u_s \\ &= -K_1 x(t) - K_2 v(t) + N r \end{aligned} \quad (19)$$

ここで、

$$N = K_1 \bar{M}_{12} + \bar{M}_{22} \quad (20)$$

これを実現するための制御系の構成をブロック線図で示すと、Fig. 1 のようになる。図よりわかるように本制御系は、状態変数 $x(t)$ が K_1 を通じてフィードバック制御されているほか、 N を通じてフィードフォワード制御が行なわれ、さらに出力 $y(t)$ が積分形コントローラ K_2/s を介してフィードバックされるという構成になっている。 N は速応性を速める働きをし、積分形コントローラは定常偏差をなくする働きをする。

なお、(12)式において $Q_2=0$ 、すなわち $v(t)$ に対

する評価をゼロとすると、フィードバックゲイン K_2 もゼロとなり、Fig. 1 の構成は先に報告した多変数最適サーボ系の構成¹⁾に帰着される。これは(15)、(16)式から容易に示される。

3. 制御系の特性の検討

本節では前節で述べた手法を用いて設計される制御系がいかなる応答特性をもっているかを例題により検討する。以下では簡単のため、プロセスは最初平衡状態にある。すなわち $x(0)=0$ 、 $v(0)=0$ とする。

3.1 すべての状態変数が直接測定可能の場合

プロセス方程式のマトリクスが、つぎの場合を考える。

$$A = \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0.4 & -0.5 & \\ & & -0.4 & 0 \\ 0 & & 0.4 & -0.5 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$B' = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

(21) 式の a は変動するパラメータであって、その公称値は 0.4 である。(12) 式の評価関数中の重みマトリクス P, Q_1, Q_2 は、それぞれ

$$Q_1 = I_2, Q_2 = 0.5 I_2, P = 0.05 I_2 \quad (24)$$

とする。ここで、 I_2 は 2×2 の単位マトリクスである。

Fig. 2 (a) はプロセスパラメータ a が公称値 0.4 に等しい場合、および 0.6 あるいは 0.2 にずれた場合の制御量 $y(t)$ の応答を示している。同図 (b) には、従来の積分形コントローラをもたない制御系の応

Fig. 1 Multivariable control system with integral-type controllers

(a) System with integral-type controllers

(b) System without integral-type controllers

Fig. 2 Output responses when a parameter varies

答特性と比較するため、(24) 式の重みマトリクス Q_2 をゼロとした場合の応答が示されている。このとき、(24) 式の P の値は、両制御系で $u(t)$ の大きさがほぼ等しくなるように、 $P=0.03I_2$ と変えた。図からわかるように、従来の制御系ではプロセスパラメータが公称値からずれると定常誤差が生じてしまうが、本制御系では予期されるように過渡特性が変わるだけで定常誤差を生じないという長所をもっている。

3.2 observer を利用した場合

現実のプロセスでは、その状態変数が直接測定できないという問題がしばしば起こる。この場合、状態変数を推定することが必要になるが、プロセスパラメータが公称値からずれていると推定を正確に行なうことはできない。本節では、observer を利用した場合を取上げ^{(11)~(13)}、プロセスパラメータが変動すると制御系の応答特性にどのような影響が現われるかを検討する。

以下、3.1 節の2入力2出力プロセスを例にとって考察する。この場合 observer は、たとえば

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -d & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\ &+ 0.4 \begin{bmatrix} d/(d-0.4) \\ -0.4d/(d-0.4)(d-0.5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (25)$$

(a) $d=1$ (b) $d=4$

Fig. 3 Output responses of control system utilizing an observer

とおける。ここで、 $z_1(t), z_2(t)$ は observer の状態変数であり、 d は observer の設計パラメータ（プロセスの極 0.4, 0.5 以外の任意の正数）である。observer は d が大きいほど入力 $u(t)$ よりも出力 $y(t)$ に大きく依存して $x(t)$ を求め、したがって出力フィードバックの効果が大きくなるという傾向がある⁽¹⁴⁾。

Fig. 3 は $d=1, d=4$ として制御系を構成したときの応答特性を示している。プロセスパラメータ a が公称値 0.4 のときの応答は、状態変数がすべて直接測定できる場合の応答 (Fig. 2 (a)) と同じである。図からわかるように、 $d=4$ とした制御系の応答は $d=1$ の場合よりもパラメータ変動の影響が少ない。また、この系は $x(t)$ の推定に誤差があるにもかかわらず、状態変数 $x(t)$ を直接フィードバックする場合よりも、パラメータの変動による影響が少ない系となっている。本例は、プロセスの状態変数が直接測定できない場合でも、出力フィードバックを行えばパラメータ変動による影響が少ない制御系が実現できることを示しており、興味深い。

4. む す び

本論文では、積分形コントローラをもつ多変数最適追従系の設計問題を、regulator 問題に帰着させ設計する方法について述べた。この設計法の特長は、以下のとおりである。

- (1) 最適解の求解が簡単である。
- (2) 設計された制御系はフィードバックならびにフィードフォワード・パスを有し、プロセスパラメータが公称値どおりならば最適な追従特性を示す。たとえパラメータが変動しても、定常誤差を生じない。
- (3) 状態変数の一部しか直接測定できないプロセスでも、observer を利用して出力フィードバックを行なえばよい。

これらは、いずれも現実のプロセスの制御問題を扱うのに適した特長であると考えられる。

参 考 文 献

- 1) 朴 炳植, 鈴木 胖, 藤井克彦: 多変数線形最適サーボ系の設計, 計測自動制御学会論文集, 8-5, 568/575 (1972)
- 2) D. G. Schultz and J. L. Melsa: State Functions and Linear Control Systems, 316/326, McGraw-Hill, (1967)
- 3) J. B. Moore and B. D. O. Anderson: Optimal Linear Control Systems with Input Derivative Constraints, Proc. IEE, 114-12, 1987/1990 (1967)
- 4) C. D. Jonson: Optimal Control of the Linear Regulator with Constant Disturbances, IEEE Trans., AC-13-8, 416/421, (1968)
- 5) B. Porter: Optimal Control of Multivariable Linear Systems Incorporating Integral Feedback, Electronics Lett. 7-8, 170/172, (1971)
- 6) 田川遼三郎: 多変数線形系の Feed Back 制御について, 第 10 回計測自動制御学会学術講演会予稿集 139, (1971)
- 7) F. Fond and C. Foulard: Linear Multivariable Control in the Presence of Unknown Non Zero Mean Value Perturbations, Proc. 2nd IFAC Symposium on Multivariable Technical Control Systems, Technical Papers, 2.2.2, (Oct. 1971)
- 8) 朴 炳植, 鈴木 胖, 藤井克彦: 積分型コントローラをもつ多変数フィードバック制御系の設計, 昭和 47 年電気学会全国大会論文集, 1014, (1972)
- 9) M. Athans and P. L. Falb: Optimal Control, 756/776, McGraw-Hill, (1966)
- 10) H. M. Power and B. Porter: Necessary and Sufficient Conditions for Controllability of, Multivariable Systems Incorporating Integral Feedback, Electronics Lett., 6-25, 815/816, (1970)
- 11) D. G. Luenberger: Observers for Multivariable Systems, IEEE Trans., AC-11-2, 190/197, (1966)
- 12) J. J. Bangiorno and D. C. Youla: On Observers in Multivariable Systems, Int. J. Control, 8-3, 221/243, (1968)
- 13) 岩井善太: 線形多変数制御系に対する observer の適用, 計測自動制御学会論文集, 6-1, 24/29, (1970)
- 14) 朴 炳植, 鈴木 胖, 藤井克彦: 最適フィードバック制御系の比較—状態変数が直接観測されない場合, 計測自動制御学会論文集, 7-5, 393/400, (1971)