線形連続系の階層的情報構造の もとにおける最適制御

内田 健康*・森 欣司*・示村悦二郎*

Optimal Control for a Linear Continuous System under a Hierarchical Information Structure

Kenkō UCHIDA*, Kinji MORI* and Etsujiro SHIMEMURA*

This paper deals with the stochastic control of linear systems with nonclassical hierarchical information structures. Optimal control problems and optimum information processing problems are discussed under this information structure. Person-by-person optimality and optimality are defined, and a sufficient condition for person-by-person optimality is derived. A condition under which the person-by-person optimal control and the optimal control coincide is also given. Using this condition it is shown that the linear-quadratic-Gaussian problem has solutions which are linear functions of the optimal estimates. As optimum information processing problems, the optimum adjustment of the information delays and the optimum timing of the observations are discussed.

To clarify the underlying ideas and to avoid inessential complexity of the formulas, only the two-controllers case will be considered in the main part of the paper. The extension to the multiple-controllers case is conceptually straightforward.

1. ま え が き

近年、制御理論の分野において、社会経済システムなどの大規模システムまでも、その制御対象に含めた制御決定理論を求める動きがある。大規模システムの制御問題では、単にそのサイズが増加し計算量が増加するという以上に、従来の力学系を中心とした理論では暗黙のうちに了承されてきた、単一制御者がシステムの全情報を集中してもっているという情報構造の仮

定が必ずしも成立しないため、従来の理論を直接用いることができないという問題がある。ここに、従来の古典的情報構造に対する理論から、より一般的な非古典的情報構造に対する制御決定理論が必要とされる大きな理由がある¹⁾。

一方、立場を変えて、複数人の制御者が存在するシステムにおける組織化という問題を考えるとき、制御決定問題のほかに、情報構造決定問題、すなわち情報配分という新たな問題が加わる。この問題では、一般に制御決定と情報構造決定の相互に依存し合うため分離して考えることができず、非常に困難な問題となるが、大規模系の制御問題として興味ある問題である。

本論文では、以上の観点から、実際問題として興味深い階層的情報構造という非古典的情報構造に対する最適制御問題を考察し、線形系—2次形式評価—ガウス分布 (LQG) 問題に対して、最適解が最適推定値の線形関数となることを示す。つぎにこの結果を利用して、階層性の仮定のもとで情報遅れの最適調整、観測時刻の最適設定などの情報配分問題を考察する。

非古典的情報構造における LQG 問題に対して、Witsenhausen は、その最適解が一般には線形とならないことを示し²⁾、Chong と Athans は、線形制御法則、線形有限次元推定系という範囲内での最適解を求めている³⁾。最近、Ho と Chu は “partially nested” という仮定のもとで、この LQG 問題の最適解が線形となることを示しているが⁴⁾、本論文の階層的情報構造は partially nested 構造の範疇には属さない。

情報構造決定問題は、静的問題に限ればかなりの研究が行なわれているが⁵⁾、動的問題に対しては単一制御者に対する観測の最適化問題など^{6), 7)} の限られた問題を除けば、ほとんどその研究は行なわれていない。

* 早稲田大学理工学部 東京都新宿区西大久保 4-170

* School of Science and Engineering, Waseda University, Shinjuku-ku, Tokyo

(Received April 3, 1973)

2. 情報構造と問題の提起

N 人の制御者と M 人の観測者が存在し、不確定性、 $x_0, v(t), w_j(t)$ を有するシステムを考える。

$$\dot{x} = f(t, x, u_1, \dots, u_N, v), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1)$$

$$y_j = h_j(t, x, w_j), \quad j=1, 2, \dots, M \quad (2)$$

観測者 $j, j=1, \dots, M$ の観測ベクトル y_j と、制御者 $i, i=1, \dots, N$ の制御ベクトル u_i をデータとして、 $D(t) = \{y_j(s), u_i(s); t_0 \leq s \leq t, i=1, \dots, N, j=1, \dots, M\}$ をシステム的全データとすると、情報構造を、全データ $D(t)$ を各制御者に配分する方法、 $\eta = (\eta^1, \dots, \eta^N)$, $Z_i(t) = \eta^i(D(t))$, $t \in [t_0, T], i=1, \dots, N$ と定義する。ここで、 $Z_i(t)$ は、時刻 t で制御者 i が得るデータを示す。なお、先験的情報、すなわちシステム構造および不確定性の要因である $x_0, v(t), w_j(t)$ の先験的分布は、以下の議論において各制御者に共通に与えられているものとする。許容制御入力は、データ $Z_i(t)$ の関数 $u_i(t) = \varphi_i(t, Z_i(t))$, $t \in [t_0, T], i=1, \dots, N$ として構成される。今、各制御者に共通なコスト、 $\tilde{J}[u, \eta]$, $u = (u^1, \dots, u^N)'$ が与えられているとすると、最適制御問題は、ある情報構造 η の下で、 $\min \tilde{J}[u, \eta]$ となる制御入力 u^* を求めることであり、情報構造決定問題は、最適制御 u^* を求めると同時に、 $\min_{\eta} \min_u \tilde{J}[u, \eta] = \min_{\eta} \tilde{J}[u^*(\eta), \eta]$ となる最適データ配分 η^* を決定することである。

3. 階層的情報構造における最適制御問題

3.1 定式化

つぎの Itô 型確率微分方程式に対応する連続時間型線形システムを考える。

$$dx = [A(t)x + \sum_{i=1}^2 B_i(t)u_i(t)]dt + dv(t) \quad (3)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad t_0 \leq t \leq T \quad (4)$$

ここで、 $x(t) \in R^n$ は状態ベクトル、 $u_i(t) \in R^{r_i}$ は制御者 $i, i=1, 2$ の制御ベクトルである。観測者 $j, j=1, 2$ は観測システム。

$$dy_j(t) = G_j(t)x(t)dt + dw_j(t) \quad (5)$$

$$y_j(t_0) = 0, \quad j=1, 2, \quad t_0 \leq t \leq T \quad (6)$$

を通して観測ベクトル $y_j(t) \in R^{m_j}$ を知るものとする。(3)~(6)式で表現される確率系の確率構造をつぎのように定める。基礎確率空間 (Ω, B, P) が与えられ、この上で定義されている確率変数 $x_0(\omega), \omega \in \Omega$, 確率過程 $v(t, \omega), w_j(t, \omega), j=1, 2, t \in [t_0, T], \omega \in \Omega$ はつぎの性質をもっている。1) $x_0(\omega)$; ガウス分布、 $E\{x_0\} = \bar{x}_0, \text{cov}\{x_0\} = \bar{P}_0$, 2) $v(t, \omega), w_j(t, \omega); j=1, 2$; ウィーナ過程 $E\{v(t)\} = E\{w_j(t)\} = 0, E\{dv$

$$(t)dv'(t)\} = V_0(t)dt, \quad V_0(t) \geq 0, \quad E\{dw_j(t)dw_j'(t)\} = W_j(t)dt, \quad W_j(t) > 0, \quad 3) \quad x_0(\omega), v(t, \omega), w_j(t, \omega), j=1, 2 \text{ は互いに独立。}$$

情報構造として、制御者 i は、観測者 i の観測値のみをすべて記憶している場合、すなわち

$$z_i(t) = y_i(t) \quad (7)$$

$$Z_i(t) = \{z_i(s); t_0 \leq s \leq t\} \quad (8)$$

の場合を考える。許容制御のクラス $U = U_1 \times U_2$ をつぎのように定める。時刻 t における観測値の集積 $Z_i(t)$ を

$$\pi_i z_i = \begin{cases} z_i(s); & t_0 \leq s \leq t \\ z_i(t); & t_0 \leq s \leq T \end{cases} \quad (9)$$

という記号によって示すとき、許容制御とは、

$$u_i(t) = \varphi_i(t, \pi_i, z_i) \quad i=1, 2 \quad (10)$$

なる観測値の集積の関数で、 $\varphi_i(t, \xi)$ は t に関して Hölder 連続、 $\xi \in C[t_0, T]$ に関して Lipschitz 条件、

$$\|\varphi_i(t, \xi_1) - \varphi_i(t, \xi_2)\| \leq K \|\xi_1 - \xi_2\| \quad (11)$$

$$i=1, 2, \quad K \in R^{1+}, \quad \xi_1, \xi_2 \in C[t_0, T]$$

を満たすものとする⁸⁾。ここで、 $|\cdot|$ はユークリッドノルム $\|\cdot\|$ は一様ノルムを示している。

$A(t), B_i(t), V_0(t)$ は連続、 $C_j(t), W_j(t)$ は連続微分可能とすると、許容制御に対してシステム変数 $x(t, \omega), y_j(t, \omega), u_i(t, \omega)$ が well-defined な確率変数となることから、観測値の集積 $Z_i(t)$ が確率空間 Ω 上に誘導する σ -集合体 $z_i^i = \sigma\{Z_i(t)\}$ を考えることができ、この σ -集合体 z_i^i をもってデータ $Z_i(t)$ の有する情報と定義する。今、制御者 1, 2 の情報 z_1^1, z_2^2 の間に

$$z_1^1 \supset z_2^2, \quad t_0 \leq t \leq T \quad (12)$$

なる包含関係があるとき、制御者 1, 2 の情報は階層的であるという。

以下で考察する最適制御問題は、階層的情報構造、(7), (8), (12)式の下で、両制御者に共通に与えられたつぎのコスト

$$J_{i_0} = L(x(T)) + \int_{t_0}^T g(t, x(t), u_1(t), u_2(t))dt \quad (13)$$

の平均値 $J = E\{J_{i_0}\}$ を最小にする許容制御 u_1^*, u_2^* を求めることである。ただし、 $L(a), g(t, a, b, c)$ はそれぞれ $a \in R^n, (t, a, b, c) \in [t_0, T] \times R^n \times R^{r_1} \times R^{r_2}$ で連続である。

3.2 最適推定

最適制御を求める準備として、階層性 $z_1^1 \supset z_2^2$ の仮定のもとでの制御者 1, 2 の最適状態推定値 $\hat{x}_i(t|t) = E\{x(t)|z_i^i\}, i=1, 2$ を与えるフィルタを求めておく。

定理 1 最適推定値を与えるフィルタは

$$\begin{aligned} d\hat{x}_1 = & [A(t)\hat{x}_1 + B_1(t)u_1(t) + B_2(t)u_2(t)]dt \\ & + P_1(t)C_1'(t)W_1^{-1}(t)[d z_1(t) - C_1(t)\hat{x}_1 dt] \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} d\hat{x}_2 = & [A(t)\hat{x}_2 + B_1(t)v_1(t) + B_2(t)u_2(t)]dt \\ & + P_2(t)C_2'(t)W_2^{-1}(t)[d z_2(t) - C_2(t)\hat{x}_2 dt] \end{aligned} \quad (15)$$

$$\hat{x}_1(t_0|t_0) = \hat{x}_2(t_0|t_0) = \bar{x}_0, \quad t_0 \leq t \leq T \quad (16)$$

なる構造をもつ。ただし、 $v_1(t) = E\{u_1(t)|z_i^2\}$, $P_i(t) = E\{(x(t) - \hat{x}_i(t|t))(x(t) - \hat{x}_i(t|t))'\}$, $i=1, 2$

3.3 最適制御に対する十分条件

ここでは、上で定義した階層的情報構造をもった最適制御問題に対する最適解の十分条件を与える。 $u_i(t)$ が z_i^i -可測であることから、便宜的に、 $u_i(t) = \phi_i(t, z_i^i)$, $i=1, 2$ なる表現を用いる。以下の議論を明確にするために、つぎの定義を行なう。

定義 1 任意の許容制御 $\phi = (\phi_1, \phi_2) \in U_1 \times U_2$ に対して

$$E\{J_i[\phi_1^*, \phi_2^*]\} \leq E\{J_i[\phi_1, \phi_2]\}, \quad (17)$$

$$t_0 \leq t \leq T$$

が成り立つとき、 $\phi^* = (\phi_1^*, \phi_2^*)$ は最適制御である。

定義 2 任意の許容制御 $\phi_1 \in U_1, \phi_2 \in U_2$ に対して、

$$E\{J_i[\phi_1^0, \phi_2^0]|z_i^1\} \leq E\{J_i[\phi_1, \phi_2^0]|z_i^1\} \quad (18)$$

$$E\{J_i[\phi_1^0, \phi_2^0]|z_i^2\} \leq E\{J_i[\phi_1^0, \phi_2]|z_i^2\} \quad (19)$$

$$t \in [t_0, T], \quad a.e. \omega$$

が成り立つとき、 $\phi^0 = (\phi_1^0, \phi_2^0)$ は person-by-person 最適制御 (p - b - p 最適制御) である。

定義 2 からわかるように、 p - b - p 最適解は、ゲーム理論の鞍点に対応させることができる。そこで本節では、まず不完全情報をもった微分ゲーム問題においてよく知られた結果を用いて p - b - p 最適解を求め、次いで、その p - b - p 最適解が最適解となる条件を求める。

今、つぎの線形システムを導入する。

$$\begin{aligned} de = & [E_0(t)e + E_1(t)u_1(t) + E_2(t)u_2(t) \\ & + E_3(t)v_1(t)]dt + G_0(t)dv(t) \\ & + G_1(t)dy_1(t) + G_2(t)dy_2(t) \end{aligned} \quad (20)$$

ここで、 $E_i(t), G_i(t) \geq 0$ は連続で適当な次元の行列である。この $e(t)$ を用いて、汎関数

$$\begin{aligned} I(t, x, e, u_1, u_2)dt = & 0(t, x, u_1, u_2)dt + V_i(t, x, e)dt + \{(Ax + B_1u_1 \\ & + B_2u_2)dt + dv\}'V_x(t, x, e) + \{(E_0e + E_1u_1 \\ & + E_2u_2 + E_3v_1)dt + G_0dv + G_1dy_1 \\ & + G_2dy_2\}'V_e(t, x, e) + \frac{1}{2}t_r\{V_{xx}(t, x, e)V_0 \\ & + V_{ee}(t, x, e)G_0V_0G_0' + V_{ex}(t, x, e)G_1W_1G_1' \\ & + V_{ex}(t, x, e)G_2W_2G_2' + V_{xx}(t, x, e)G_0V_0 \end{aligned}$$

$$+ V_{xe}(t, x, e)V_0G_0'\}dt \quad (21)$$

を定義すると、 p - b - p 最適制御に対する十分条件がつぎのように与えられる。

定理 2 (Rhodes and Luenberger)⁹⁾ つぎの条件 1), 2), 3), 4), 5) を満足し、 $V, V_i, V_x, V_e, V_{xx}, V_{xe}, V_{ex}, V_{ee}$ が連続 ($a.e. \omega$) となる汎関数

$$V, [t_0, T] \times X \times E \rightarrow R^1$$

が存在するとき、 $\phi_1^0(t, z_i^1), \phi_2^0(t, z_i^2)$, $t \in [t_0, T]$ は p - b - p 最適制御である。ここで、 X, E は x, e の値域を示す。

$$1) \min_{u_1} E\{I(t, x, e, u_1, \phi_1^0(t, z_i^2))|z_i^1\} = 0 \quad (22)$$

$$2) \min_{u_2} E\{I(t, x, e, \phi_1^0(t, z_i^1), u_2)|z_i^2\} = 0 \quad (23)$$

$$3) E\{I(t, x, e, \phi_1^0(t, z_i^1), \phi_2^0(t, z_i^2))|z_i^1\} = 0 \quad (24)$$

$$4) E\{I(t, x, e, \phi_1^0(t, z_i^1), \phi_2^0(t, z_i^2))|z_i^2\} = 0 \quad (25)$$

$$5) V(T, x(T), e(T)) = L(x(T)) \quad (26)$$

$$t \in [t_0, T], \quad a.e. \omega$$

証明は、Rhodes, Luenberger と平行に議論できるので、省略する。(20)式で導入した $e(t)$ は、この定理をより具体的問題に対して適用するとき、その場合に依じて適当に解釈されるが、階層性の仮定のもとでは一般につぎのことがいえる。定理 2 を満たす $V(t, x, e)$ が存在すると、 $E\{J_i[\phi_1^0, \phi_2^0]|z_i^i\} = E\{V(t, x, e)|z_i^i\} = E\{\hat{V}_i(t, \hat{x}_i, \hat{e}_i)|z_i^i\}$ $i=1, 2$ となる汎関数 $\hat{V}_i$ が存在する。ただし、 $\hat{e}_i = E\{e|z_i^i\}$ 。一方、階層性の仮定の下で、制御入力をそれぞれ $u_1(t) = \phi_1(t, \hat{x}_1, \hat{x}_2)$, $u_2(t) = \phi_2(t, \hat{x}_2)$ なる構造に限定すれば、3.2 の結果から $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ -過程、 $\hat{x}_2$ -過程が Markov 過程となり、 $z_i^1 \supset z_i^2$ より時刻 t 以後のコストは、 $E\{J_i[\phi_1, \phi_2]|z_i^1\} = E\{V_1(t, \hat{x}_1, \hat{x}_2)|z_i^1\} = V_1(t, \hat{x}_1, \hat{x}_2)$, $E\{J_i[\phi_1, \phi_2]|z_i^2\} = E\{V_2(t, \hat{x}_2)|z_i^2\} = V_2(t, \hat{x}_2)$ と表わせるから、 $e(t)$ として $\hat{x}_2(t|t)$ (あるいは $x(t) - \hat{x}_2(t|t)$) にとると、 $u_1(t) = \phi_1(t, \hat{x}_1, \hat{x}_2)$ ($u_2(t) = \phi_2^0(t, \hat{x})$ に対して)、 $u_2(t) = \phi_2(t, \hat{x}_2)$ ($u_1(t) = \phi_1^0(t, \hat{x}_1, \hat{x}_2)$ に対して) の構造をもった p - b - p 最適解が求まることが予想される。実際次節で示すように、2次形式コストの場合には、 $e(t) = x(t) - \hat{x}_2(t|t)$ とおくことにより p - b - p 最適解が求まる。

以下の議論を容易にするため、つぎの汎関数を定義する。

$$\Phi_1(t, u, z_i^1) = E\{I(t, x, e, u_1, \phi_2^0(t, z_i^2))|z_i^1\} \quad (27)$$

$$\Phi_2(t, u, z_i^2) = E\{I(t, x, e, \phi_1^0(t, z_i^1), u_2)|z_i^2\} \quad (28)$$

$$\Psi(t, \phi_1, \phi_2) = E \{I(t, x, e, \phi_1(t, z_1^1), \phi_2(t, z_1^2))\} \quad (29)$$

定義 3 つぎの条件 1), 2), 3), 4), 5) を満足する $V, V_1, V_x, V_e, V_{xx}, V_{xe}, V_{ex}, V_{ee}$ が連続 (a, e, ω) な汎関数

$$V; [t_0, T] \times X \times E \rightarrow R^1$$

が存在するとき, $\phi^0 = (\phi_1^0(t, z_1^1), \phi_2^0(t, z_1^2))$, $t \in [t_0, T]$ を停留点という。

$$1) \quad \frac{\partial}{\partial u_1} \Phi_1(t, u_1, z_1^1) |_{u_1 = \phi_1^0(t, z_1^1)} = 0 \quad (30)$$

$$2) \quad \frac{\partial}{\partial u_2} \Phi_2(t, u_2, z_1^2) |_{u_2 = \phi_2^0(t, z_1^2)} = 0 \quad (31)$$

$$3) \quad \Phi_1(t, \phi_1^0(t, z_1^1), z_1^1) = 0 \quad (32)$$

$$4) \quad \Phi_2(t, \phi_2^0(t, z_1^2), z_1^2) = 0 \quad (33)$$

$$5) \quad V(t, x(T), e(T)) = L(x(T)) \quad (34)$$

$$t \in [t_0, T], \quad a, e, \omega$$

定義 3 で与えた停留点は, 定理 2 により p - b - p 最適解である。以上の準備のもとで, この停留点が最適解となるための十分条件をつぎのように与えることができる。この定理が, 本節の主要な結果である。

定理 3 $\phi^0 = (\phi_1^0, \phi_2^0)$ を停留点として, 条件 1), 2)

1) $I(t, x, e, u_1, u_2)$ は $u = (u_1', u_2') \in R^{r_1} \times R^{r_2}$ に関して凸関数で微分可能。 $t \in [t_0, T]$, a, e, ω

$$2) \quad \sup_{\phi = (\phi_1, \phi_2) \in U_1 \times U_2} |\Psi(t, \phi_1, \phi_2)| < \infty$$

が満たされるとき, $\phi^0 = (\phi_1^0(t, z_1^1), \phi_2^0(t, z_1^2))$, $t \in [t_0, T]$ は最適制御である。

(21) 式で定義した汎関数の導入により, その存在を仮定すれば, 制御問題が静的決定問題に変換されるため, 証明の主要な部分は Radner と同様に議論できる¹⁰⁾。今, 任意の許容制御 $(\delta_1, \delta_2) \in U_1 \times U_2$ とスカラー $\varepsilon \in R^1$ に対して汎関数 $\Psi(t, \phi_1^0 + \varepsilon \delta_1, \phi_2^0 + \varepsilon \delta_2)$ を考えると, Ψ は, 1) より ε に関して微分可能, さらに平均演算と微分演算の順序交換可能となるため, (ϕ_1^0, ϕ_2^0) が停留点であることから, $d\Psi(t, \phi_1^0 + \varepsilon \delta_1, \phi_2^0 + \varepsilon \delta_2)/d\varepsilon|_{\varepsilon=0} = 0$ となり, 1), 2) から Ψ は ε に関して有界な凸関数であるから, Ψ は $\varepsilon=0$ で最小となる。すなわち, $\Psi(t, \phi_1^0, \phi_2^0) \leq \Psi(t, \phi_1, \phi_2)$, $t \in [t_0, T]$, $(\phi_1, \phi_2) \in U_1 \times U_2$ が成立する。この式の両辺を $[t, T]$ で積分し, 平均演算, 積分演算の順序を交換し, (12) 式に到達する。

3.4 2 次形式コストに対する解

2 次形式コストとして, つぎのような場合を考える。

$$L(a) = a' S_T a$$

$$g(t, a, b, c) = a' Q(t) a + b' R_1(t) b + c' R_2(t) c$$

$$a \in R^n, \quad b \in R^{r_1}, \quad c \in R^{r_2}$$

ここで, $S_T \geq 0$, $Q(t) \geq 0$, $R_1(t) > 0$, $R_2(t) > 0$ は連続で適当な次元の行列である。定理 3 によると, 停留点を見つけることが先決であるが, 停留点は 3.2 の結果と定理 2 からつぎのように求まる。階層性の仮定がない場合は, 停留点を求めることが非常に困難な問題となる。

定理 4 (39), (42), (43) 式で与えられる Riccati 型方程式の 2 点境界値問題の解の存在を仮定すると, 停留点は,

$$u_1^*(t) = -R_1^{-1}(t) B_1'(t) \{S_1(t) \hat{x}_1(t|t) + S_2(t) (\hat{x}_1(t|t) - \hat{x}_2(t|t))\} \quad (35)$$

$$u_2^*(t) = -R_2^{-1}(t) B_2'(t) S_1(t) \hat{x}_2(t|t) \quad (36)$$

$$t \in [t_0, T]$$

で与えられ, この停留点は最適制御である。なお,

$$v_1^*(t) = E \{u_1^*(t) | z_1^2\} = -R_1^{-1}(t) B_1'(t) S_1(t) \hat{x}_2(t|t) \quad (37)$$

である。コスト行列 $S_1(t)$, $S_2(t)$ は

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 + S_1 A(t) + A'(t) S_1 + Q(t) \\ - S_1 (B_1(t) R_1^{-1}(t) B_1'(t) \\ + B_2(t) R_2^{-1}(t) B_2'(t)) S_1 = 0 \\ \dot{S}_2 + S_2 (A(t) - P_2(t) C_2'(t) W_2^{-1}(t) C_2(t)) \\ + (A'(t) (-C_2'(t) W_2^{-1}(t) C_2(t) P_2(t)) S_2 \\ + S_1(t) (B_1(t) R_1^{-1}(t) B_1'(t) \\ + B_2(t) R_2^{-1}(t) B_2'(t)) S_1(t) \\ - (S_1(t) + S_2) B_1(t) R_1^{-1}(t) B_1'(t) (S_1(t) + S_2) = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

$$S_1(T) = S_T, \quad S_2(T) = 0 \quad (40)$$

の解であり, 推定誤差の共分散行列 $P_1(t)$, $P_2(t)$ はつぎの方程式系の解である。

$$\dot{P}_1 = A(t) P_1 + P_1 A'(t) - P_1 C_1'(t) W_1^{-1}(t) C_1(t) P_1 + V_0(t) \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \dot{P}_2 = A(t) P_2 + P_2 A'(t) - P_2 C_2'(t) W_2^{-1}(t) C_2(t) P_2 \\ + V_0(t) - B_1(t) R_1^{-1}(t) B_1'(t) (S_1(t) + S_2(t)) P_2 \\ - P_2 (S_1(t) + S_2(t)) B_1(t) R_1^{-1}(t) B_1'(t) \\ + B_1(t) R_1^{-1}(t) B_1'(t) (S_1(t) + S_2(t)) P_{21}(t) \\ + P_{12}(t) (S_1(t) + S_2(t)) B_1(t) R_1^{-1}(t) B_1'(t) \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \dot{P}_{12} = (A(t) - P_1(t) C_1'(t) W_1^{-1}(t) C_1(t) P_{12} + V_0(t) \\ + P_{12} (A(t) - C_2'(t) W_2^{-1}(t) C_2(t) P_2(t)) \\ + P_1(t) (S_1(t) + S_2(t)) B_1(t) R_1^{-1}(t) B_1'(t) \\ - P_{12} (S_1(t) + S_2(t)) B_1(t) R_1^{-1}(t) B_1'(t) \end{aligned} \quad (43)$$

$$P_1(t_0) = P_2(t_0) = P_{12}(t_0) = \bar{P}_0 \quad (44)$$

$$P_{12}'(t) = P_{21}(t) \quad (45)$$

最適コストは,

$$\begin{aligned} J^* = \bar{x}_0' S_1(t_0) \bar{x}_0 + t_r [(S_1(t_0) + S_2(t_0)) \bar{P}_0] \\ + \int_{t_0}^T t_r [S_2(t) P_2(t) C_2'(t) W_2^{-1}(t) C_2(t) P_2(t) \end{aligned}$$

$$+S_1(t)+S_2(t))V_0(t)+(S_1(t)+S_2(t))B_1(t)R_1^{-1}(t)B_1'(t)(S_1(t)+S_2(t))]dt \quad (46)$$

で与えられる。

証明 定理2において、 $e(t)=x(t)-\hat{x}_2(t|t)$ とおき、 $V(t, x, e)=x'S_1(t)x+e'S_2(t)e+h(t)$ と仮定することにより、停留点を求めることができる。なお、(42)、(43)式の P_{12} は $P_{12}(t)=E\{(x(t)-\hat{x}_1(t|t))(x(t)-\hat{x}_2(t|t))'\}$ なる意味をもつ。

定理4の結果から、制御者1にとっては推定値 $\hat{x}_1$ 、 $\hat{x}_2$ 、制御者2にとっては推定値 $\hat{x}_2$ が十分縮約情報¹¹⁾ となることがわかる。すなわち、各制御者は最適解の構成において、各時刻で観測値の集積 $Z_i(t)$ を記憶する必要がなく、記憶容量の点から考えて実結果である。制御者2の制御則に対しては、(37)、(38)式から分離定理が成立していることもわかる。

3.5 階層的情報構造について

階層性の仮定(7)、(8)、(12)式が満たされる場合をもう少し具体的に考えると、たとえばつぎのような場合がある。

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \begin{cases} z_1(t)=(y_1'(t), y_2'(t))' \\ z_2(t)=y_2(t) \end{cases} \\ \text{(ii)} \quad & \begin{cases} z_1(t)=y_1(t) \\ z_2(t)=0 \end{cases} \\ \text{(iii)} \quad & \begin{cases} z_1(t)=(x'(t), y_2'(t))' \\ z_2(t)=y_2(t) \end{cases} \end{aligned}$$

(i)は制御者2から1への情報伝達がある場合、(ii)は制御者2が情報を得ることができない場合、すなわち、先験的情報だけを有している場合で、(iii)は制御者1が完全情報である場合を意味している。これらの特別な場合、(i)は定理4の結果をそのまま適用できて、(ii)の場合には $W_2^{-1}(t)=0$ 、(iii)の場合には $P_1(t)=0$ 、 $P_{12}(t)=0$ とおくことにより最適解を得ることができる。とくに(ii)のときは、共分散方程式系とコスト行列方程式系が結合しないため2点境界値問題とならず、(35)、(36)式の最適制御が唯一解となる。

このように、2次形式コストに対する解は、階層性の仮定が満足される限りにおいては、情報構造が変わっても(たとえば、(1)~(iii))、制御則の形には直接影響がなくフィルタの修正項にその影響が現われるだけである。このことは、以下に議論する仮定(8)式の一般化にもつながっている¹²⁾。

4. 階層的情報構造における情報構造決定問題

2.で述べた情報構造決定問題を一般的に取扱うことは非常に困難である。それは、任意の情報構造 η に対

して、 $\min_u \tilde{J}[u, \eta]$ なる最適制御問題をまず解決する必要があることと、それが可能だとしても $\min_{\eta} \tilde{J}[u^*(\eta), \eta]$ という抽象的な最適問題が残されるからである。そこで、ここでは問題を限定して、3.の結果を用いて、情報構造決定をあるパラメータ $p(t)$ の決定に置き換えることができ、かつ任意のパラメータ $p(t) \in P$ に対して最適制御を実際に求めることが可能な $\min_{p \in P} \min_{u \in U} \tilde{J}[u, p] = \min_{p \in P} \tilde{J}[u^*(p), p]$ となる実際問題からも興味のある場合を議論する。ここで P は、パラメータ p の拘束を示す。

情報構造の決定、すなわち情報配分の問題は、経済的あるいは工学的な実際問題からの要請の基づく問題であり、一般的にいえば、情報構造が古典的構造に近づくほど制御成績はよくなるが、情報利用が可能となるための情報コストは増大する。このように情報配分は、制御成績と情報コストの兼ね合いによって決定される。

4.1 情報遅れの最適調整

情報の遅れは、物理系において常に存在するものであるが、情報の収集・伝達・処理などに要する時間が無視できなくなる大規模系あるいは人間が介在する場合に、種々の問題を引起す。今、制御者1, 2が

$$\text{(i)} \quad \begin{cases} z_i(t)=y_i(t-\theta_i), & t_0+\theta_i < t \leq T \\ z_i(t)=0, & t_0 \leq t \leq t_0+\theta_i, \quad i=1, 2 \end{cases}$$

なる情報遅れをもつとして、任意の $\theta_i \in [0, T-t_0]$ に対して最適解が求まったとすると、情報遅れの調整問題

は $\min_{\theta_1, \theta_2 \in [0, T-t_0]} \left\{ J^*(\theta_1, \theta_2) + \sum_{i=1}^2 c_i(\theta_i) \right\}$ となる。ここで、 $c_i(\theta_i)$ は制御者 i の情報コストである。しかし、(i)の構造の下で最適解を求めることは困難である。そこで、3.の結果が適用できる情報遅れをもつ例として、

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad & \begin{cases} z_1(t)=y_1(t-\theta_1), & t_0+\theta < t \leq T \\ z_1(t)=0, & t_0 \leq t \leq t_0+\theta \\ z_2(t)=0, & t_0 \leq t \leq T \end{cases} \\ \text{(iii)} \quad & \begin{cases} z_1(t)=(x'(t), y_2'(t-\theta))', & t_0+\theta < t \leq T \\ z_1(t)=x'(t), & t_0 \leq t \leq t_0+\theta \\ z_2(t)=y_2(t-\theta), & t_0+\theta < t \leq T \\ z_2(t)=0, & t_0 \leq t \leq t_0+\theta \end{cases} \end{aligned}$$

の場合を取上げる。(ii)の場合には、2次形式コストに対して最適解は(35)、(36)式で与えられ、フィルタは

$$\begin{aligned} d\hat{x}_1(t|t) &= [A(t)\hat{x}_1(t|t) + B_1(t)u_1(t) \\ &\quad + B_2(t)u_2(t)]dt + K(t)P_1(t)\Phi'(t \\ &\quad - \theta, t)C_1'(t-\theta)W_1^{-1}(t-\theta)[dz_1(t) \\ &\quad - C_1(t-\theta)\hat{x}_2(t-\theta|t)dt], \quad t_0 \leq t \leq T \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_1(t-\theta|t) &= \Phi(t-\theta, t)\hat{x}_1(t|t) \\ &+ \int_t^{t-\theta} \Phi(t-\theta, \tau)[B_1(\tau)u_1(\tau) \\ &+ B_2(\tau)u_2(\tau)]d\tau, \quad t_0+\theta \leq t \leq T \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}(t|t) &= A(t)\hat{x}_2(t|t) + B_1(t)v_1(t) \\ &+ B_2(t)u_2(t), \quad t_0 \leq t \leq T \end{aligned} \quad (49)$$

$$\hat{x}_1(t_0|t_0) = \hat{x}_2(t_0|t_0) = \bar{x}_0 \quad (50)$$

で与えられる。ここで、 $\Phi(t, \tau)$ は $A(t)$ の基本解行列、 $K(t)$ は $[t_0, t_0+\theta]$ で 0, $(t_0+\theta, T]$ で 1 をとる階段関数である。推定誤差の共分散行列 $P_1(t)$, $P_2(t)$ は、

$$\begin{aligned} \dot{P}_1 &= A(t)P_1 + P_1A'(t) + V_0(t) \\ &+ K(t)P_1\Phi'(t-\theta, t)C_1'(t-\theta)W_1^{-1}C_1(t-\theta) \\ &- \theta)\Phi(t-\theta, t)P_1, \quad t_0 \leq t \leq T \end{aligned} \quad (51)$$

$$\dot{P}_2 = A(t)P_2 + P_2A'(t) + V_0(t), \quad t_0 \leq t \leq T \quad (52)$$

$$P_1(t_0|t_0) = P_2(t_0|t_0) = \bar{P}_0 \quad (53)$$

の解である。コスト行列は、 $S_1(t)$ に関しては (38),

(40)式で与えられ、 $S_2(t)$ は、

$$\begin{aligned} \dot{S}_2 + S_2A(t) + A'(t)S_2 \\ + K(t)S_1(t)(B_1(t)R_1^{-1}(t)B_1'(t) + \\ B_2(t)R_2^{-1}(t)B_2'(t))S_1(t) - K(t)(S_1(t) \\ + S_2)B_1(t)R_1^{-1}(t)B_1'(t)(S_1(t) + S_2) = 0 \end{aligned} \quad (54)$$

$$S_2(T) = 0 \quad (55)$$

で与えられる。このとき最適コストは

$$\begin{aligned} J^*(\theta) &= \bar{x}_0'S'(t_0)\bar{x}_0 + \int_{t_0}^T t_r[(S_1(\tau) + S_2(\tau))\bar{P}_0] \\ &+ \int_{t_0}^T t_r[S_1(\tau)B_1(\tau)R_1^{-1}(\tau)B_1'(\tau)S_1(\tau)P_1(\tau) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ (S_1(\tau) + S_2(\tau))V_0(\tau)]d\tau \\ &+ \int_{t_0+\theta}^T t_r[(S_1(\tau)B_1(\tau)R_1^{-1}(\tau)B_1'(\tau)S_2(\tau) \\ &+ S_2(\tau)B_1(\tau)R_1^{-1}(\tau)B_1'(\tau)S_1(\tau) \\ &+ S_2(\tau)B_1(\tau)R_1^{-1}(\tau)B_1'(\tau)S_2(\tau)(P_1(\tau))]d\tau \\ &+ \int_{t_0}^{t_0+\theta} [S_1(\tau)B_2(\tau)R_2^{-1}(\tau)B_2'(\tau)S_1(\tau)P_1(\tau)]d\tau, \end{aligned}$$

$$\theta \in [0, T-t_0] \quad (56)$$

となり、その定義から明らかなように、 θ の関して増加関数であり、 $J^*(0) \leq J^*(\theta) \leq J^*(T-t_0)$ の関係がある。下限を与える $\theta=0$ の場合は、3. の (ii) と一致し、上限を与える $\theta=T-t_0$ のときは、古典的情報構造における開ループ制御と一致する。なお、 $\theta=T-t_0$ のとき $S_2(t)=0$, $t \in [t_0, T]$ となる。

今、情報コストを $c(\theta)$ とすると、情報遅れの調整問題は、(51), (54)式で与えられるシステムにおいて、コスト、 $\tilde{J}[u^*(\theta), \theta] = J^*(\theta) + c(\theta)$ を最小にする遅れ θ を求めることである。

(iii)の場合も、任意の遅れ $\theta \in [0, T-t_0]$ に対して最適解を求めることができ、同様の議論ができる。なお制御者 1 人の場合には、より解析的議論が可能となる¹³⁾。(i)の場合には、近似解を用いることが考えられる¹⁴⁾。

4.2 その他の例

階層的情報構造をもち、3. の結果が適用できる場合として、Fig. 1 のような例がある。今、観測者は 1 人として、(a)では $T_i^1 \subset [t_0, T]$ をある時間区間と

して、

$$\begin{aligned} \text{observation for controller 1} \quad (i) \quad & \begin{cases} z_i(t) = y_i(t), \\ t \in \{T_1^1, \dots, T_i^1\} = T_i \\ z_i(t) = 0, \\ t \in [t_0, T] - T_i, \quad i=1, 2 \end{cases} \end{aligned}$$

かつ、 $T_1 \supset T_2$ が満たされる場合である。このとき、2 次形式コストに対する最適解は、3. の結果において、区間 $[t_0, T] - T_i$ で $W^{-1}(t)=0$ とおくことにより与えられる。情報構造決定問題は、最適観測時間区間 T_i^* の決定問題となる。(b)の場合は、観測時点で観測値が与えられる。

observation for controller 1

observation for controller 2

$$(ii) \quad \begin{cases} z_i(t) = y_i(t), \\ t \in \{t_1^i, \dots, t_i^i\} = T_i \\ z_i(t) = 0, \\ t \in [t_0, T] - T_i, \quad i=1, 2 \end{cases}$$

でかつ $T_1 \supset T_2$ のときである。

この場合も 3. の結果が適用でき

(a) $T_i = \{T_1^i, T_2^i, \dots, T_i^i\}, i=1, 2$

(b) $T_i = \{t_1^i, t_2^i, \dots, t_i^i\}, i=1, 2$

Fig. 1 Scheme of observations, $T_1 \supset T_2$

て、情報構造決定問題は、最適観測時点 T_1^* を決定することである。いずれの場合も、 $T_1 \supset T_2$ の仮定が崩れると得られた解 T_1^* は意味をもたなくなる。これらの問題は、制御者 1 人の場合には測定の最適化問題として知られていて、実際の問題として非常に興味ある問題である^{6), 7)}。

5. あとがき

本論文では、階層的構造という非古典的情報構造に対する最適制御問題および情報構造決定問題を議論した。制御者 2 人の場合について、階層的構造の場合、LQG 問題に対する解が推定値の線形関数となることを示し、この結果を利用して、階層性の仮定の下での情報構造決定問題として、情報遅れの最適調整、観測時間区間および観測時刻の最適化問題を考察した。LQG 問題に対して得られた解は、その線形性ととも推定値の関数となる点で実用的である。

なお、以上の議論を制御者 n 人の場合に拡張することは、概念的には容易である。

参考文献

- 1) Y-C. Ho: Toward Generalized Control Theory, IEEE Trans. on A.C., AC-14-16, 753/754 (1969)
- 2) H. S. Witsenhausen: A Counterexample in Stochastic Optimal Control, SIAM J. Control, 6-1, 131/147, (1968)
- 3) C-Y. Chong & Athans: On the Stochastic Control of Linear Systems with Different Information Sets, IEEE Trans. on A.C., AC-16-5, 423/430, (1971)
- 4) Y-C. Ho & K-C. Chu: Team Decision Theory and Information Structures in Optimal Control Problems. Part I, II, IEEE Trans. on A.C., AC-17-1, 15/28, (1972)
- 5) J. Marschak & R. Radner: Economic Theory of Teams, Yale Univ. Press, (1972)
- 6) A. Sano & M. Terao: Measurement Optimization in Optimal Process Control, Automatica 6, 705/714 (1970)
- 7) M. Athans: On the Determination of Optimal Costly Measurement Strategies for Linear Stochastic Systems, Automatica 8, 397/412 (1972)
- 8) W.M. Wonham: On the Separation of Stochastic Control, SIAM J. Control, 6-2, (1968)
- 9) I.B. Rhodes & D.G. Luenberger: Differential Games with Imperfect State Information, IEEE Trans. on A.C., AC-14-1, 29/38, (1969)
- 10) R. Radner: Team Decision Problems, Ann. Math. Statist., 33-3, 857/881, (1962)
- 11) C. Striebel: Sufficient Statistics in the Optimum Control of Stochastic Systems, J. Math. Anal. Appl. 12, 576/592, (1965)
- 12) 森: 階層的情報構造をもつ線形離散値系の制御問題, システムと制御, Vol. 18, No. 2, 91/100, (1974)
- 13) 示村, 森, 内田: 情報遅れをもつ線形系の最適制御と情報の評価, 第 15 回自動制御連合講演会前刷, 175/176, (1972)
- 14) 示村, 森, 内田: 異なる情報遅れを持つ線形系の制御, 第 11 回 SICE 学術講演会予稿集, 321/322, (1972)