部分分数展開の逐次計算法†

都 丸 隆 夫*

Principle and Application of an Iterative Partial Fraction Expansion Algorithm

Takao TOMARU*

In this paper a unified recursive algorithm is realized to determine the partial fraction expansion coefficients of the most general form of rational functions without any kind of distinction.

- (1) Fundamental recurrence formulae are derived for the expansion of the product of two kinds of multiple poles, and for the Laurent series expansion of numerator polynomials.
- (2) Coefficients $a(l, i)$ of the Laurent series expansion of denominator $1/Q(z)$, and $b(l, i)$ of the numerator polynomial $P(z)$ are given by the iterative use of these recursive formulae.
- (3) The product of the coefficients $a(l, i)$ and $b(l, i)$ constitutes the partial fraction expansion coefficients $c(l, i)$ and $c_0(l)$ of $P(z)/Q(z)$.

The algorithm is suitable both for machine calculation and for figures.

The application of the algorithm to computer programs is discussed.

The accuracy of the calculated values of coefficients clarifies the effectiveness of the algorithm.

1. はじめに

本論文は部分分数展開の展開係数を陽に解き、その逐次計算法を提示する。制御の計算の数値計算化の一つの基本単位とすることを目的としたものである。

部分分数展開とは本論文では、変数 z についての有理関数：

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{b_p z^p + b_{p-1} z^{p-1} + \dots + b_1 z + b_0}{(z+r_1)^{m_1} (z+r_2)^{m_2} \dots (z+r_n)^{m_n}} \quad (1-1)$$

が与えられたとき、これを多重度 m_i の極 $-r_i (i=1, 2, \dots, n)$ についての展開項の和として表現することであるとする。

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^{m_i} c(l, i) (z+r_i)^{-l} + \sum_{l=0}^{p-1} c_0(l) z^l \quad (1-2)$$

なる形の展開係数 $c(l, i)$, $c_0(l)$ を求めることである。

従来部分分数展開は逆ラプラス変換のための一つの手法として行なわれた。それらのうち、未定係数法¹⁾は与式とその部分分数展開形との恒等関係から展開係数を未知数とする連立1次方程式を作り、これを解くものである。

微分による方法²⁾は m 重極因子の展開係数を求めるために $m-1$ 階の微分を行なうものである。前者は解が陽にえられておらず、後者は有理関数の微分を行なう必要がある。F.L. N-Nagy らの漸化行列による方法³⁾は漸化式を表わす行列を用いる。分母、分子の次数の大小によって場合を分け複雑である。その他単極の場合を対象として与式と展開係数の恒等関係から展開係数の漸化式を与える方法³⁾がある。

本論文で述べる方法は与式の分子、分母をそれぞれローラン展開する逐次計算法である。解は陽に与えられる。それは1組の極の値を $-r_i, -r_j$ としたとき、 $(r_i - r_j)^{-1}$ を係数とする積和を求めることを主とする規則的で簡単な漸化式あるいは信号線図の形で計算する。与式の次数が比較的低いときは作表によって手計算で実行することができる。

2. 部分分数展開の基本的性質

本2章において部分分数展開を行う場合の基本的な性質を示す。すなわち任意の二つの因子の積の部分分数展開およびそれを反復使用することによる多重極因子の乗積形の展開係数の形を述べる。

まず極 $-r_i, -r_j$ についての2つの因子の乗積形：

† 第16回自動制御連合講演会で発表(昭48・10)

* 三菱重工業(株)技術管理部 東京都千代田区丸の内2-5-1

* Technical Administration Department, Mitsubishi Heavy Industries Ltd. Chiyoda-ku, Tokyo

(Received January 13, 1973)

$$F(z) = \sum_{l=1}^{m_i} a^{(0)}(l, i)(z+r_i)^{-l} \times \sum_{l=1}^{m_j} a^{(0)}(l, j)(z+r_j)^{-l} \quad (2-1)$$

を部分分数展開して、

$$F(z) = \sum_{l=1}^{m_i} a(l, i)(z+r_i)^{-l} + \sum_{l=1}^{m_j} a(l, j)(z+r_j)^{-l} \quad (2-2)$$

とし、展開係数 $a(l, i)$, $a(l, j)$ を $a^{(0)}(l, i)$, $a^{(0)}(l, j)$ から導く。

そのためにつぎの恒等関係：

$$(z+r_i)^{-l}(z+r_j) = -(r_i-r_j)\{(z+r_i)^{-l} - (z+r_i)^{-l+1}(z+r_j)^{-1}\} \quad (2-3)$$

を繰返し用いる。Fig. 1 の信号線図において $a^{(0)}(l, i)$ を $(z+r_i)^{-l}$ ($l=1, 2, \dots, m_i$) の係数の初期値とし、 $(z+r_i)^{-l}(z+r_j)^{-1}$ を部分分数展開したときの $(z+r_i)^{-l}$, $(z+r_j)^{-1}$ の展開係数 $\{a^{(1)}(l, i)\}$ および $\{a^{(1)}(1, j)\}$ を (2-3) の関係から導く。これを信号線図の第 1 段目の節点として構成する。得られた結果に更に $(z+r_j)^{-1}$ を乗ずる過程を (m_j-1) 回繰返せば、それぞれ $\{a^{(2)}(l, i)\}$, $\{a^{(2)}(l, j)\}$; $\dots$; $\{a^{(m_j)}(l, i)\}$, $\{a^{(m_j)}(l, j)\}$ が算出される。信号線図としては第 1 段目と同様の過程を積重ねる。第 l 段目の節点の値に $a^{(0)}(l, j)$ を乗じて加算すれば、それぞれ $\{a(l, i)\}$ ($l=1, 2, \dots, m_i$), $\{a(l, j)\}$ ($l=1, 2, \dots, m_j$) を与える。

以上の導出過程を漸化式 (2-4) によって表わす。

$$k=1, 2, \dots, m_j$$

として、

$$a^{(k)}(l, i) = -(r_i-r_j)^{-1}(a^{(k-1)}(l, i) - a^{(k)}(l+1, i))$$

$$(l=1, 2, \dots, m_i-1) \quad (2-4-1)$$

$$a^{(k)}(l, j) = \begin{cases} a^{(k-1)}(l-1, j) & (l=2, 3, \dots, k) \\ 0 & (l=k+1, \dots, m_j) \end{cases} \quad (2-4-2)$$

$$a^{(k)}(m_i, i) = -(r_i-r_j)^{-1}a^{(k-1)}(m_i, i) \quad (2-4-3)$$

$$a^{(k)}(1, j) = -a^{(k)}(1, i) \quad (2-4-4)$$

$$a(l, i) = \sum_{k=1}^{m_j} a^{(k)}(l, i) \cdot a^{(0)}(k, j) \quad (l=1, 2, \dots, m_i) \quad (2-4-5)$$

$$a(l, j) = \sum_{k=1}^{m_j} a^{(k)}(l, j) \cdot a^{(0)}(k, j) \quad (l=1, 2, \dots, m_j) \quad (2-4-6)$$

となる。

つぎに多重極をもつ項の乗積形：

$$Q_n^{-1}(z) = (z+r_1)^{-m_1}(z+r_2)^{-m_2}\dots(z+r_n)^{-m_n} \quad (2-5)$$

を部分分数展開することを考える。もし

$$Q_{i-1}^{-1}(z) = (z+r_1)^{-m_1}(z+r_2)^{-m_2}\dots(z+r_{i-1})^{-m_{i-1}} \quad (2-6)$$

の部分分数展開形が与えられているとき、

$$Q_i^{-1}(z) = Q_{i-1}^{-1}(z) \times (z+r_i)^{-m_i} \quad (2-7)$$

が部分分数展開できるならば、乗積形 $Q_n^{-1}(z)$ は

$$Q_i^{-1}(z) = (z+r_1)^{m_1} \quad (2-8)$$

から出発して逐次に部分分数展開できることになる。そこで、 $Q_{i-1}^{-1}(z)$ の展開形から $Q_i^{-1}(z)$ の展開形を導出する。

$$Q_{i-1}^{-1}(z) = \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{l=1}^{m_j} a_{i-1}(l, j)(z+r_j)^{-l} \quad (2-9)$$

が与えられていると仮定する。

$$Q_i^{-1}(z) = \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{l=1}^{m_j} a_{i-1}(l, j)(z+r_j)^{-l} \times (z+r_i)^{-m_i} \quad (2-10)$$

ここで (2-4) の漸化式を用いる。

(2-4) で

$$a^{(0)}(l, i) = 0 \quad (l=1, 2, \dots, m_i-1) \quad (2-11-1)$$

$$a^{(0)}(m_i, i) = 1 \quad (2-11-2)$$

$$a^{(0)}(l, j) = a_{i-1}(l, j) \quad (l=1, 2, \dots, m_{i-1}) \quad (2-11-3)$$

において、次の展開係数

$$a_j(l, i) \triangleq a(l, i)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^{m_i} a^{(0)}(l, i)(z+r_i)^{-l} \times \sum_{l=1}^{m_j} a^{(0)}(l, j)(z+r_j)^{-l} \\ & \rightarrow \sum_{l=1}^{m_i} a(l, i)(z+r_i)^{-l} + \sum_{l=1}^{m_j} a(l, j)(z+r_j)^{-l} \end{aligned}$$

Fig. 1 Expansion of the product with two multiple poles

* $\{a^{(k)}(l, i)\}$, $\{a^{(k)}(l, j)\}$ はそれぞれ $a^{(k)}(l, i)$, $l=1, 2, \dots, m_i$ の集合 $a^{(k)}(l, i)$, $l=1, 2, \dots, k$ の集合を表わすものとする。

$$(l=1, 2, \dots, m_i) \quad (2-12-1)$$

$$a_i(l, j) \triangleq a(l, j)$$

$$(l=1, 2, \dots, m_j; j=1, 2, \dots, i-1) \quad (2-12-2)$$

が得られ、

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^{m_j} a_{i-1}(l, j)(z+r_j)^{-l} \times (z+r_i)^{-m_i} \\ &= \sum_{l=1}^{m_j} a_i(l, j)(z+r_j)^{-l} + \sum_{l=1}^{m_i} a_j(l, i)(z+r_i)^{-l} \end{aligned}$$

となる。更に

$$a_i(l, i) \triangleq \sum_{j=1}^{i-1} a_j(l, i) \quad (2-14)$$

とまとめるならば、

$$\begin{aligned} Q_i^{-1}(z) &= \sum_{j=1}^{i-1} \left(\sum_{l=1}^{m_j} a_i(l, j)(z+r_j)^{-l} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=1}^{m_i} a_j(l, i)(z+r_i)^{-l} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{l=1}^{m_j} a_i(l, j)(z+r_j)^{-l} \\ &\quad + \sum_{l=1}^{m_i} a_i(l, i)(z+r_i)^{-l} \end{aligned}$$

すなわち

$$Q_i^{-1}(z) = \sum_{j=1}^i \sum_{l=1}^{m_j} a_i(l, j)(z+r_j)^{-l} \quad (2-15)$$

となって $Q_i^{-1}(z)$ が展開できる。

特に単極の場合：

$$m_j=1, (j=1, 2, \dots, i-1) \text{ および } m_i=1 \quad (2-16)$$

のときは簡単になって、

$$Q_{i-1}^{-1}(z) = \sum_{j=1}^{i-1} a_{i-1}(1, j)(z+r_j)^{-1} \quad (2-17)$$

の $a_{i-1}(1, j)$ から、

$$a_i(1, j) = (r_i - r_j)^{-1} a_{i-1}(1, j) \quad (2-18-1)$$

$$a_j(1, i) = -a_i(1, j) \quad (2-18-2)$$

$$a_i(1, i) = \sum_{j=1}^{i-1} a_j(1, i) = - \sum_{j=1}^{i-1} a_i(1, j) \quad (2-18-3)$$

$$(j=1, 2, \dots, i-1)$$

が求められ、

$$\begin{aligned} Q_i^{-1}(z) &= Q_{i-1}^{-1}(z) \times (z+r_i)^{-1} \\ &= \sum_{j=1}^i a_i(1, j)(z+r_j)^{-1} \end{aligned} \quad (2-19)$$

Fig. 2 Expansion of $P(z)$ with regard to a pole

と展開される。

以上述べた逐次展開過程を計算表 Table 1 の形にまとめる。表の第 i 行の左端に乗数項 $(z+r_i)^{-m_i}$ をとり、 $j=1, 2, \dots, i-1$ とした i 行 j 列目の要素として展開係数 $\{a_i(l, j)\}$, $\{a_j(l, i)\}$ を記入しておく。 $a_i(l, j)$, $a_j(l, i)$ ($j=1, 2, \dots, i-1$) のそれぞれの値は信号線図 Fig. 1 または漸化式 (2-4) を用いて $a_{i-1}(l, j)$ の値から算出される。 $i=1$ とした $(z+r_1)^{-m_1}$ から始めて逐次に展開係数が導かれる。

つぎに分子 $P(z)$ を $(z+r_i)$ の項でローラン展開する。

$$P(z) = b_p z^p + b_{p-1} z^{p-1} + \dots + b_1 z + b_0$$

$$= \sum_{l=0}^p b(l, i)(z+r_i)^l \quad (2-20)$$

としたときの展開係数 $b(l, i)$ を元の係数 b_l から導く ($l=0, 1, \dots, p$)。本方法ではいわゆる組立除法を拡張したつぎの漸化式を用いる。(証明略)

$$b^{(k)}(p) = b^{(0)}(p) \quad (2-20-1)$$

$$b^{(k)}(l) = b^{(k-1)}(l) + (-r_i)b^{(k)}(l+1) \quad (2-20-2)$$

$$(k=0, 1, \dots, p; l=k-1, \dots, p \text{ とする})$$

ただし

$$b^{(0)}(l) \triangleq b_l \quad (2-20-3)$$

$$b(l, i) \triangleq b^{(i+1)}(l) \quad (2-20-4)$$

とする。この漸化式を信号線図に表現した Fig. 2 は手計算による作表に便利である。

Table 1 The table for the expansion of $Q^{-1}(z)$ with regard to many multiple poles

$(z+r_1)^{-m_1}$	$\{a_1(l, 1)\}$			
$(z+r_2)^{-m_2}$	$\{a_1(l, 2)\} / \{a_2(l, 1)\}$	$\{a_2(l, 2)\}$		
$(z+r_3)^{-m_3}$	$\{a_1(l, 3)\} / \{a_3(l, 1)\}$	$\{a_2(l, 3)\} / \{a_3(l, 2)\}$	$\{a_3(l, 3)\}$	
$\vdots$	$\dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots$	
$(z+r_n)^{-m_n}$	$\{a_1(l, n)\} / \{a_n(l, 1)\}$	$\{a_2(l, n)\} / \{a_n(l, 2)\}$	$\dots\dots\dots$	$\{a_n(l, n)\}$

3. 部分分数展開のアルゴリズム

本章で分子、分母をそれぞれローラン展開しそれらの展開係数の積として与式の部分分数展開の展開係数を求める計算過程を提示

する。

前節に述べた基本性質を用いて手計算あるいは機械計算に適したアルゴリズムを構成する。

まず与えられた有理関数を分子と分母の多項式 $P(z)$, $Q(z)$ について分割し, $P(z)$, $Q^{-1}(z)$ の積として取扱う。

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = P(z) \cdot Q^{-1}(z) \quad (3-1)$$

とする。 $P(z)$, $Q(z)$ は複素数を係数とし, $P(z)$ の次数を p , $Q^{-1}(z)$ の相異なる極は n 個あるとし, 極を $-r_i$, その多重度を $m_i (i=1, 2, \dots, n)$ とする。部分分数展開をつぎの4段階の計算過程を経て行なう。すなわち,

- (1) $Q^{-1}(z)$ の $(z+r_i)^{-l}$ についての展開係数 $a(l, i)$ を求める。 ($l=1, 2, \dots, m_i$)
- (2) $P(z)$ の $(z+r_i)^l$ についての展開係数 $b(l, i)$ を求める。 ($l=0, 1, \dots, p$)
- (3) $P(z)$ と $Q^{-1}(z)$ との積をとり, それぞれの展開係数から, 積の $(z+r_i)^{-l}$ についての展開係数 $c(l, i)$ を求める。 ($l=-p+1, -p+2, \dots, m_i$)

以上の各段階を $i=1, 2, \dots, n$ について行う。

- (4) 正幂の項の展開係数 $c(l, i)$ ($l=0, 1, \dots, p-1$) を z^l についての展開係数 $c_0(l)$ に変換する。

これらの過程が部分分数展開のために十分であることをつぎに示す。

$$Q^{-1}(z) = \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^{m_i} a(l, i)(z+r_i)^{-l} \quad (3-2)$$

$$P(z) = \sum_{l=1}^p b(l, i)(z+r_i)^l \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (3-3)$$

が得られたと仮定すれば,

$$\begin{aligned} P(z) \cdot Q^{-1}(z) &= \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^{m_i} a(l, i)(z+r_i)^{-l} \\ &\quad \times \sum_{l=1}^p b(l, i)(z+r_i)^l \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{l=1}^{m_i} a(l, i)(z+r_i)^{-l} \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{l=0}^p b(l, i)(z+r_i)^l \right) \end{aligned} \quad (3-4)$$

$$\therefore P(z) \cdot Q^{-1}(z) = \sum_{i=1}^n \sum_{l=-p+1}^{m_i} c(l, i)(z+r_i)^{-l} \quad (3-5)$$

が求まる。ここで,

$$c(l, i) \triangleq \sum_{k=0}^p a(l-k, i) \cdot b(k, i) \quad (3-6)$$

(ただし, $a(l-k, i) \triangleq 0, l-k=0, -1, \dots$)

と定める。さらに,

$$\sum_{l=0}^{p-1} c_0(l) z^l \triangleq \sum_{i=1}^n \sum_{l=0}^{p-1} c(l, i)(z+r_i)^{-l}$$

なる z^l に関する展開係数 $c_0(l)$ を求めれば,

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^{m_i} c(l, i)(z+r_i)^{-l} + \sum_{l=0}^{p-1} c_0(l) z^l \quad (3-7)$$

が得られこれは目的の部分分数展開であり, $c(l, i)$, $c_0(l)$ は陽に解かれている。しかも $P(z)$, $Q(z)$ について制限がなく, 種々の場合分けを必要としないで統一的に解が導出される。各段階の計算では,

- (1) $a(l, i)$ は Fig. 1 および Table 1 を作成することによって得られる。
- (2) $b(l, i)$ は表 (Fig. 2) を用いて求められる。
- (3) 乗算 (3-6) を実行する。
- (4) (2) と同じく Fig. 2 を用いる。ただし $-r_i$ を r_i に置き換える。

以上の各段階の計算過程によって数値計算の計算プログラムが作成できる。そのフロ・チャートを Fig. 3 にあげた。フォートランによる計算プログラムは約 200 ステップから成る。

4. 逐次計算法による計算

本章においては本方法による計算例, 計算精度などについて述べる。

本方法による計算には入力データとして, 極 $-r_i$, その多重度 $m_i (i=1, 2, \dots, n)$, 極の個数 n , 分子の多項式の係数 $b_i (i=0, 1, \dots, p)$, 分子の次数 p , 分母の次数 n_q を与える。 r_i , m_i は分母の多項式の根として予め計算しておく。これは従来の方法も同じである。

〔例題 1〕 複素極のある場合

$$\frac{8z+8}{(z+2)^2(z+1-j)(z+1+j)} \quad (4-1)$$

これは典型的な 1 入力 1 出力の伝達関数の例である。この程度の次数および極の値であれば, 単精度計算で完全に正解が得られている (Table 2)

つぎに計算誤差について検討を試みる。与えられた有理関数の次数および極の値が相互に接近しているか否かが影響すると予想される。

極 $-r_i$ についての展開係数の誤差は, 他の極 $-r_j$ との差が 1 の程度ではないとき,

$$|r_i - r_j| \approx 1 \quad (4-2)$$

のときは, $a(l, i)$, $c(l, i)$ の誤差をそれぞれ $\Delta a(l, i)$, $\Delta c(l, i)$ とすれば, 分子の多項式の展開は精度が十分であると仮定して,

$$\Delta c(l, i) \approx \Delta a(l, i)$$

Fig. 3 Flow chart of the algorithm of partial fraction expansion

Fig. 4 Error of calculated values of coefficients when $|r_i - r_j| \approx 1$

$$\approx (\min |r_i - r_j|)^{1-n_q} \times 10^{-L} \quad (4-3)$$

と考えられる(付録). ここで計算の桁数を L 桁としている. つぎの例題 2, 3, 4 についての $\Delta c(1, i)$ の値を(4-3)の誤差の推定値に対応して Fig. 4 に示した. (例題 2)

$$(2-a) \quad \frac{(2z+2.1)}{(z+1)^2(z+1.1)^2} \quad (L=8, L=18) \quad (4-4-1)$$

$$(2-b) \quad \frac{(2z+2.01)}{(z+1)^2(z+1.01)^2} \quad (L=18) \quad (4-4-2)$$

$$(2-c) \quad \frac{(2z+2.001)}{(z+1)^2(z+1.001)^2} \quad (L=18) \quad (4-4-3)$$

(例題 3)

$$\frac{(0.5z^4 + 2.1z^3 + 3.31z^2 + 2.3205z + 0.61051)}{(z+1)^5(z+1.1)^5} \quad (L=18) \quad (4-5)$$

(例題 4)

$$\frac{(3z^2 + 90z + 700)}{(z+10)^3(z+20)^3} \quad (L=18) \quad (4-6)$$

極の値の差が 1 の程度で,

Table 2 Example 1 $(8z+8)/(z+2)^2(z+1-j)(z+1+j)$

factor	$(z+2)^{-1}$	$(z+2)^{-2}$	$(z+1-j)^{-1}$	$(z+1+j)^{-1}$	z^0	z^1
calculated value						
coefficient	$c(1, 1)$	$c(2, 1)$	$c(1, 2)$	$c(1, 3)$	$c_0(0)$	$c_0(1)$
single precision ($L=8$)	0.00 00 00 00	-0.40 00 00 00	-j0.20 00 00 00 $\times 10^1$	j0.20 00 00 00 $\times 10^1$	0.00 00 00 00	0.00 00 00 00
desk calculation (solution)	0	-4	-2j	2j	0	0

Fig. 5 Error of calculated values of coefficients when $|r_i - r_j| \approx 1$

$$|r_i - r_j| \approx 1 \quad (4-7)$$

のとき誤差の大きさは与式の次数の大きさに対応して増すことが考えられる。実際

$$\text{[例題 5]} \quad \prod_{i=1}^n (z+i)^{-1} \quad (n=4, 5, \dots, 10) \quad (4-5)$$

[例題 6]

$$F_n(z)/(z+1)^n(z+2)^n \quad (n=4, 5, \dots, 10) \quad (4-9-1)$$

$$F_n(z) \triangleq (0.1(z+2)^n - 0.1(z+1)^n) \text{ の多項式} \quad (4-9-2)$$

についての誤差の大きさの指数は分母の次数 nq の約 $1/2$ に比例している。(Fig. 5)

以上まとめて、展開係数の計算精度は、(1)分母、分子の多項式の次数が小さい程、(2)極の多重度が小さい程、(3)極の値が相互に離れている程良好であるといえる。倍精度計算 ($L=18$) とすれば、實際上ほとんどの場合に十分な精度で計算できる。

比較のために例題 2. を未定係数法によって連立 1 次方程式を与えて解いた場合、誤差は $10^2 \sim 10^3$ 倍大きい。さらに実際にはこれは連立 1 次方程式の係数を作成するときの誤差が加わることになる。計算時間は倍精度計算のとき本法で約 1.5 sec で後者では約 6.5 sec

と増加する。

5. ま と め

部分分数展開の性質に着目して、展開係数の解を陽に漸化式あるいは作表の形で求める方法を示した。

大規模な系の状態方程式の遷移行列の計算など種々の応用がある。

本論文作成に当り有益なご検討を頂いた東大工学部北森俊行助教授に深く感謝の意を表する。

また本研究に関し種々ご高配を頂いた三菱重工業(株)金田彰夫氏、伊藤正雄氏、大野秀嶺氏ならびにプログラム計算にご協力下さったプログラマ諸氏に謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) Truxal, J.: Control System Synthesis, New York McGraw-Hill, pp. 14-19 (1955)
- 2) N-Nagy, F.L., and Al-Tikriti, M.N.: "General matrix formulation for dynamic simulation of linear time-invariant systems", Proc. IEE, Vol. 119, No. 4 pp. 493-496 (April, 1972)
- 3) Watkins, B.: "A partial fraction algorithm", IEEE Trans. Automat. Contr. (Corresp.) Vol. AC-16, pp. 489-491 (Oct. 1971)

《付 録》

計算誤差の推定値

Table 1 を用いて得られる展開係数 $a(l, i)$ は、1 組の極を $-r_i, -r_j$ としたとき、 $(r_i - r_j)^{l-nq}$ の形の項をその最高次の項として含んでいる。したがって $a(l, i)$ の計算誤差 $\Delta a(l, i)$ は数値計算の桁数を L として、

$$|\Delta a(l, i)| \approx (\min |r_i - r_j|)^{l-nq} \times 10^{-L} \quad (A-1)$$

と表わすことができる。 $c(l, i)$, $b(k, i)$ の計算誤差をそれぞれ $\Delta c(l, i)$, $\Delta b(k, i)$ とし、

$$|\Delta c(l, i)| \leq \sum_{k=0}^p (|b(k, i)| |\Delta a(l-k, i)| + |\Delta b(k, i)| |a(l-k, i)|) \quad (A-2)$$

である。通常の伝達関数では

$$|b(k, i)| \approx 1 \quad (A-3)$$

$$|\Delta b(k, i)| \ll |\Delta a(l-k, i)| \quad (A-4)$$

と仮定できるであろうから、計算誤差の推定値は

$$|\Delta c(l, i)| \approx |\Delta a(l, i)| \approx (\min |r_i - r_j|)^{l-nq} \times 10^{-L} \quad (A-5)$$

と考えられる。