パルス幅変調器の非線形除法効果と周波数特性

中 田 毅*

Effect of Removal of Nonlinearities and Frequency Characteristics of Pulse Width Modulators

Takeshi NAKADA*

There are several methods of Pulse Width Modulation (PWM). For any method, the output of the pulse width modulator corresponding to a sinusoidal input consists of the various frequency components, depending on the frequencies of the input and the carrier. Generally speaking, some frequency components lower than the input frequency are mixed therein. When the ratio of the carrier frequency (f_c) to the input frequency (f_e) becomes small, the signal cannot be accurately transmitted, because these components become large. In communication, it is easy to make this ratio large enough. On the other hand, in control, the carrier frequency (f_c) is limited by some function of the equipment in the systems, and it is required to broaden the bandwidth of the systems as far as possible. So it is important to use a method by which a frequency signal as high as possible can be transmitted on a constant (f_c). For the above method it is necessary to clarify the limit of the ratio (f_c/f_e) from the viewpoint of accurate signal transmission.

In this paper, four typical modulators are shown. First their characteristics are analyzed theoretically. Second each modulator is compared from the viewpoints of the frequency characteristics and the so-called "effect of the removal of time independent nonlinearities" this is the significant advantage of the PWM. Finally as the result of the comparison, it is concluded that the method using both edges is the best one.

1. 緒 言

プロセス制御、油圧制御など種々の分野で応用されているパルス幅変調 (PWM) 法は、伝送されるべき情報を矩形パルスの幅の中に含ませ、その正、負の高さは一定に保っている、時間に無関係な非線形特性を等価的 (時間平均の意味) に線形化できるという特長 (非線形除去効果) を有する^{1), 8)}。したがってこの変調法を利用することにより、従来その非線形性ゆえに使用できなかった要素を積極的に応用することができるので、このような面からもわきめて興味深い変調法である。

ところで、パルス幅変調法 (以下変調法と称する) には種々の方式があるが、正弦波入力の場合いずれの方式でもパルス幅変調波 (変調器出力) は入力に等しい周波数成分 (基本波) の他に、その整数倍の周波数成分 (高調波)、および入力の周波数 (f_e) と搬送波の周波数 (f_c) に関係する種々の周波数成分 (側帯波) ことに f_e より低い周波数の側帯波を含んでしまう。

直観からわかるように、この側帯波成分は f_e と f_c が十分離れているときは問題なく小さいが、近づくにつれて一般に大きくなるので、PWM 制御系 (特に高速サーボ系) では f_c を十分考慮して選定しなければならない。これは f_c をほぼ無制限に高くすることができる電気通信のような場合には問題とならないが、制御の場合には、一般に系に含まれる装置の関係で f_c の上限は制限を受けることが多く、一方ではなるべく系のバンド幅を広げることが要求されるので、PWM 制御系を設計する際には、一定の f_c に対してできる限り高い周波数の信号を伝達しうる方式を利用することが重要であり、その場合忠実な信号伝達の面から、 f_e と f_c をどの程度まで近づけうるかを理論的に明確にすることは不可欠の問題である。

さて、従来行われてきた PWM 制御系の研究はおもに、i) PWM 制御系の解析および安定性を扱った

* 東京工業大学精密工学研究所
東京都目黒区大岡山 2-12-1

* The Research Laboratory of Precision Machinery and Electronics, Tokyo Institute of Technology, Meguro-ku, Tokyo
(Received June 5, 1973)

もの^{2), 3), 4)}, ii) (準) 最適制御系を扱ったもの^{5), 6)}, などであり著者の知る限りでは、非線形除去効果を含めて変調器の特性を一般的に扱った研究はほとんど見当らない。

そこで、本論文では代表的な4種類の方式を取りあげ、はじめにおのおのについて変調器の特性を周波数領域で理論的に求め、つぎに周波数特性および非線形除去効果の両面から各方式を比較検討する。最後にこれらの面からみる限り、最も望ましい方式を決定している。

Fig. 1 PWM of type I

2. 代表的な(変調)方式と各変調器の特性

2.1 代表的な方式

PWM には種々の方式があるが、原理的には以下に示す4種類に分類される。

(i) 前縁変調………Ⅰ形*

Fig. 1 はⅠ形の原理図で、 $r_I(t)$ は振幅 B_c 、周期 T_c ののこぎり波であり、 B_r リレーはその出力が $\pm B_r$ の理想リレーである。いま、 $e(t)$ を変調器入力(以下入力と称する)として、これが Fig. 1 (b) のような場合には、 $e(t)$ とののこぎり波の大小関係により、理想リレーの出力は B_r または $-B_r$ となるので、変調器出力(以下出力と称する)は Fig. 1 (c) のようなパルス列 $a_I(t)$ となる。この他に、 $r_I(t)$ のかわりに左右逆ののこぎり波を用いた後縁変調もあるが、Ⅰ形とほとんど同じ特性を有するので、本論文では省略する。

(ii) 両縁変調………Ⅱ形

Fig. 1 (a) で、 $r_I(t)$ のかわりに Fig. 2 のような三角波 $r_{II}(t)$ を用いると、パルスの両縁が変調されたパルス列 $a_{II}(t)$ が得られる。

(iii) サンプルホールド回路つき前縁変調……Ⅲ形

Fig. 3 はⅢ形の原理図であり、サンプルホールド回路とⅠ形変調器からなっている。すなわち、入力を一定周期(T_c)でサンプルした後、その値を0次ホールド回路で一定期間ホールドすることにより得られる階段状の波 $e_h(t)$ を、Ⅰ形変調器の入力とする方式である。

(iv) 3値形変調………Ⅳ形

Fig. 4 はⅣ形の原理図であるが、前記方式とは異なり、出力(同図(c)実線波形)は $\pm B_r$ および0という3値を取り PWM 制御系の研究では最も多く見られる方式である。なお、同図点線波形については2.2で述べる。

2.2 各変調器の特性⁷⁾

本節では、2.1で述べた4種類の変調器に、正弦波入力がはいった場合の出力を理論的に求めている。

(i) Ⅰ形

Ⅰ形変調器で、 $e(t) = E_0(|E_0/E_c| \leq 1)$ に対する出力 $a_I(t)$ は周期 T_c の周期関数となるので、一般につぎのようなフーリエ級数で表わすことができる。

$$a_I(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{2m\pi}{T_c} t \right)$$

* 本論文では各方式をⅠ形、Ⅱ形、Ⅲ形、Ⅳ形と称する。

Fig. 3 PWM of type III

$$+ b_m \sin \frac{2m\pi}{T_e} t) \quad (1)$$

ここで、 a_0, a_m および b_m は E_0 の関数となることは明らかである。つきに E_e を入力振幅、 T_e を周期 また $|E_e/B_e| \leq 1$ として $e(t) = E_e \sin 2\pi t/T_e$ なる正弦波がはいった場合の I 形変調器出力を考えてみよう。

いま $e(t) = E_0$ (直流) に対する出力を $\alpha_{10}(t)$ 、また $u(t)$ を単位ステップ関数として、 $e(t) = E_0 u(t - t_0)$ に対する出力を $\alpha_{10}'(t)$ とすれば、 $t \geq t_0$ では $\alpha_{10}(t)$ と α_{10}' が完全に一致することは Fig. 1 から明らかである。

一方任意の入力 $e(t)$ を Fig. 5 に示すように時間軸に沿って、区間 Δt ごとに印加される矩形パルスの連続したものと考えれば、第 n 番目の矩形パルスに対するこの区間の変調器出力はこの矩形パルスと同じ高さの直流入力に対するこの区間の出力と一致することは上記の説明から明らかである。従って、 $\Delta t \rightarrow 0$ とすれば、任意の $e(t)$ に対する出力は、(1) 式において a_0, a_m, b_m 中の E_0 の代わりにこの $e(t)$ を代入することにより求めることができる。以上のことを考慮し、また ν, σ を互いに素の正整数として $T_e/T_c = \sigma/\nu$ と表わすことができるとすれば、前記の正弦波入力に対する出力 $\alpha_1(t)$ のフーリエ級数表示は、(1) 式において a_0, a_m, b_m 中の E_0 の代わりに $E_e \sin 2\pi t/T_e$ を代入して、(1) 式を再びフーリエ級数 (周期 T) 展開することにより求めることができる。本論文では途中の計算は省略するが、その結果は以下のような³⁾。

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) = & \frac{B_r}{B_e} E_e \sin 2\pi f_e t \\ & + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left\{ 1 + (-1)^{m+1} J_0(z_m) \right\} \sin 2m\pi f_e t \\ & + \sum_{\epsilon=\pm 1}^{\infty} \sum_{n=\pm 1}^{\pm \infty} \frac{(-1)^{\epsilon}}{\epsilon} J_{(\epsilon\sigma+n)/\nu}(z_{\epsilon}) \sin 2\frac{n}{\nu}\pi f_e t \end{aligned} \quad (2)$$

ここに、

$J_s(z)$: 第一種第 s 次ベッセル関数

$$Z_m = m\pi \frac{E_e}{B_e}$$

ϵ : $\epsilon = \frac{\nu Q + n}{\sigma}$ を満す正整数

Q : 0 を除く整数

$$z_{\epsilon} = \epsilon\pi \frac{E_e}{B_e}$$

なお、 $T_e/T_c \gg 1$ という仮定のもとに近似的に解を求めた研究もあるが、上記の解は何ら仮定を含みぬ、一

般的なものであり、後に述べる II 形、III 形についても同様である。

(ii) II 形

II 形は I 形 (Fig. 1 参照) の $r_1(t)$ の代わりに三角波 $r_{II}(t)$ (Fig. 2 参照) を用いる方式であるから、本節 (i) で述べた方法を適用することにより、II 形の出力はつぎようになる。

$$\begin{aligned} \alpha_{II}(t) = & \frac{B_r}{B_e} E_e \sin 2\pi f_e t \\ & + \frac{4}{\pi} B_r \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{2m-1} J_0(z_m) \\ & - \frac{E_e}{2B_e} \pi \cos(2m-1)\pi f_e t \\ & + \sum_{\epsilon=\pm 1}^{\infty} \sum_{n=\pm 1}^{\pm \infty} \frac{1}{\epsilon} J_{(\epsilon\sigma+n)/\nu}(z_{\epsilon}) \sin \left(2\frac{n}{\nu}\pi f_e t + \right. \end{aligned}$$

Fig. 4 PWM of type IV

Fig. 5 An optional input $e(t)$ and its approximation

$$+\frac{\varepsilon}{2}\pi) \quad (3)$$

(Ⅲ) Ⅲ形

0次ホールド回路出力 $e_h(t)$ (階段状の波) は $n =$

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{Ⅲ}}(t) = & \frac{B_r}{B_c} E_e \sum_{m=\pm 1}^{\pm \infty} \frac{\sigma}{2\pi(m\sigma+\nu)} \sqrt{2\left(1-\cos\frac{m\sigma+\nu}{\sigma}\pi\right)} \sin\left\{\frac{2(m\sigma+\nu)}{\nu}\pi f_e t + \varphi_m\right\} \\ & + \frac{2B_r}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \{1+(-1)^{m+1}J_0(z_m)\} \sin 2m\pi f_e t + \frac{B_r}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=\pm 1}^{\pm \infty} \sum_{s_1=1}^{\infty} \sum_{s_2=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \left[\frac{2\sigma \sin^2 \frac{n}{\sigma} \pi}{m\sigma+n} \{J_{s_1}(z_m) + J_{2s_2}(z_m) \right. \\ & \left. - J_{2s_2-1}(z_m)\} \times \sin 2\frac{n}{\nu}\pi f_e t + \frac{2\sigma \sin \frac{n}{\sigma} \pi}{m\sigma+n} \{J_{s_2}(z_m) + J_{2s_1-1}(z_m) - J_{2s_1}(z_m)\} \times \sin 2\frac{n}{\nu}\pi f_e t \right] \quad (4) \end{aligned}$$

ただし、

$$\varphi_m = -\tan^{-1} \frac{1 - \cos \frac{m\sigma + \nu}{\sigma} 2\pi}{\sin \frac{m\sigma + \nu}{\sigma} 2\pi}$$

$\xi = 0, 1, 2, \dots, A = 0, 1, 2, \dots$ として

$$s_1 = \frac{(\xi - m)\sigma - n}{\nu}, \quad s_2 = \frac{(A + m)\sigma + n}{2\nu} + 1$$

を同時に満足すること。

(iv) IV形

IV形出力の一般的な厳密解を求めることは複雑で困難であるので、本論文では特別な場合として、 $\sigma/\nu = 8/1$ および $17/2$ について解を求め、その周波数スペクトルを次章 Fig. 9 に示す。

なお R. E. Andeen³⁾ は、パルス幅変調波 (Fig. 4 (c) 実線波形) を等面積法により、同図点線波形のようなパルス振幅変調波に置き変えるという近似法を用いて、変調器の伝達関数を求めている。しかし、この近似法では、出力には $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ として ($f_e \pm n f_c$) に対応する周波数成分しか現われず、いわば f_e より低い周波数成分を省略する近似法であるので、 σ/ν が小さくなると精度が非常に悪くなることに注意を要する。

3. 各方式の比較

3.1 周波数特性による比較

PWM 制御系では、変調器により変調されたパルス列は、系の有する低域濾波特性により復調されて、もとの信号を正しく再現しなければならない。そこで、本論文では以下に示す規準に従って各変調器の特性を評価する。

(1) f_e より低い周波数の側帯波の振幅がいずれも基本波のそれに比べて小さいこと。

(2) 基本波について振幅依存性が少ないこと。↗

↘ $0, 1, 2, 3, \dots$ として、各 nT_c から $(n+1)T_c$ までは一定値 ($E_e \sin 2n\nu\pi/\sigma$) であること、および本節 (i) で述べた方法を利用することによりⅢ形出力を求めることができ、その結果は (4) 式ようになる。

↘ (3) f_e 付近の高調波および f_e より高い側帯波の振幅が基本波のそれに比べて小さいこと。

(4) 基本波について周波数依存性が少ないこと。はじめに規準 (1) により各方式の検討をする。一般に f_e より低い周波数の側帯波の振幅は、制御系の有する低域濾波特性によって減衰させることはできないので、基本波の振幅に比べて十分小さくしなければならない。そこで、これらのうちの最大振幅と基本波の振幅との比が、入力大きさによらず、0.01 (規準値) 以下になる f_c/f_e の限界を各理論結果 (2), (3), (4) 式から求めることにする。この規準値は制御の常識から与えたものであり、また計算過程は付録に示した。

I形³⁾、II形ではこの限界はそれぞれ $f_c/f_e > 7$ および $f_c/f_e > 6$ となる。一方Ⅲ形では、理論結果が複雑で一般的見通しは困難であるが、ほぼ $f_c/f_e > 7$ でなければならないという結果を得ている*。またIV形については、前述したように一般的な理論結果は得ていないが、 $f_c/f_e = 17/2$ のときにはこの規準を満足している。つぎに、規準 (2) により調べてみる。規準 (1) と同じように、ゲイン (基本波振幅/入力振幅) 変動が入力の大きさによらず 1% 以下になる f_c/f_e の限界を求めると、I形、II形ではそれぞれ $f_c/f_e \geq 7$ および $f_c/f_e \geq 6$ となり、このような条件のもとでは実用上振幅依存性は無いと考えて差支えない。

一方Ⅲ形の場合、ゲイン変動を 1% 以下にするにはほぼ $f_c/f_e \geq 7$ でなければならない、またIV形では、 $f_c/f_e = 8/1$ のときのゲイン変動は 2.3%、 $f_c/f_e = 17/2$ のときのそれは 1.9% であり、1% 以下におさえるためには、前記 3 方式に比べて f_c/f_e をさらに大きくする必要がある。

* 一例として、 $f_c/f_e = 13/2$ 、 $E_e/B_c = 1$ のとき上記振幅比 0.017、 $f_c/f_e = 15/2$ 、 $E_e/B_c = 1$ のときのそれは 0.003 となる。

さて、規準(3)で各方式を検討するため、具体的に $f_c/f_e=8/1$ および $17/2$ のときの周波数スペクトルを各理論結果から求めると、Fig. 6~Fig. 9 のようになる。いずれも、横軸には f_e で標準化した周波数 $\hat{f}$ を、また縦軸には $B_e/B_c(E_e)$ で標準化した振幅 $\hat{E}$ をとり、さらに—×および—・はそれぞれ $f_c/f_e=8/1$ および $17/2$ の場合の周波数スペクトルを示している。なお(2),(3),(4)式からわかるように、各スペクトルの高さ($\hat{E}$)は $E_e/B_c=1$ の大きさによって異なるが、これらの図は $E_e/E_c=1$ の場合である。なお図に示した他に、出力には無限の数の周波数成分が存在するが、 f_e より高い周波数成分の振幅は f_e 成分の振幅より一般に小さくなり、さらに制御系の有する低域濾波特性を考慮して省略した。

また $\hat{E}$ が 0.01 以下の成分も省略した。これらの図から明らかなように、I 形、II 形では $\hat{f}=1$ (すなわち f_e) 付近の高調波および側帯波の $\hat{E}$ は小さく、 $\hat{f}$ が大きくなるにつれて $\hat{E}$ が大きくなる傾向を示しているが、制御系のもつ低域濾波特性を考慮すれば、これらの成分は十分に減衰することが期待できるので、余り問題にならないであろう。なおこれは $E_e/B_c=1$ の場合であるが、 $E_e/B_c \neq 1$ の場合でもほぼ同様であることを理論結果(2),(3)式から確めている。これに反して、III 形、IV 形はいずれも $\hat{f}=1$ 付近の高調波、側帯波の $\hat{E}$ がかなり大きく、 $f_c/f_e=17/2$ のとき、III 形の場合 $\hat{f}=2$ で $\hat{E}=0.15$ 、IV 形の場合 $\hat{f}=3$ で $\hat{E}=0.2$ になっている。これらの成分は入力周波数に近いので、系のもつ低域濾波特性によって十分に減衰させることは困難であり、I 形、II 形よりひずみが大きくなる。III 形についてこの原因を考えると、サンプルホールド回路の出力は、周知のように $(f_e \pm n f_c)$ の周波数成分を含んでおり、これらが I 形変調器に入力として加わる。たとえば $f_c/f_e=17/2$ の場合、 f_e 成分を除くと最大のものは $(f_e - f_c)$ 成分 (f_e 成分の 0.13 倍の振幅)であり、これが I 形変調器に入力として加わってしまうので、I 形 II 形とは異なり III 形にひずみが生じるものと思われる。この場合、 f_e 成分が支配的(ホールド回路出力で考えて)であれば、当然 I 形の周波数スペクトルとほぼ一致するはずである。

最後に、規準(4)により検討する。(2),(3)式第一項から明らかなように、I 形、II 形の基本波の振幅は入力大きさに比例し、位相ずれも全く無い。従って I 形、II 形の変調器は、規準(1),(2),(3)に対する検討を考慮すれば、それぞれ $f_c/f_e \geq 7$, $f_c/f_e \geq 6$ という条件のもとでは線形比例要素と考えられる。一方 III 形の場合(4)式第一項からわかるように、基本波の振幅、位相とも $\sigma/(f_c/f_e)$ に依存しており、たとえば

Fig. 6 Frequency spectra of the modulated waves of type I

Fig. 7 Frequency spectra of the modulated waves of type II

Fig. 8 Frequency spectra of the modulated waves of type III

$f_c/f_e=8/1$ のとき, $\hat{E}=0.975$ 位相ずれ $\varphi=-22.5^\circ$
 $f_c/f_e=17/2$ のとき, $\hat{E}=0.977$, $\varphi=-22.3^\circ$ である。これはⅢ形変調器がサンプルホールド回路を有しているために生じたことは明らかであり、避けることのできない欠点である。上記のことはⅣ形についても同様であり、たとえば $f_c/f_e=8/1$ かつ $E_e/B_c=1$ のとき $\hat{E}=0.977$, $\varphi=-21.2^\circ$ となる。なおこの場合には、 f_c/f_e を一定に保つと、 E_e/B_c すなわち入力の大きさが小さくなるにつれて $\hat{E}$ は 1 に近ずき、位相ずれは小さくなる。

以上、周波数特性の面から各方式を比較したが、いずれの規準においても、Ⅰ形、Ⅱ形の方がⅢ形、Ⅳ形より優れている。さらにⅠ形とⅡ形を比較すれば、規準(1)、(2)およびおのおのの周波数スペクトル (Fig. 6, Fig. 7) からⅡ形の方が優れていることは明らかである。

3.2 非線形除去効果による比較

PWM 駆動の大きな特長は、時間に無関係な非線形特性を等価的 (時間平均の意味) に線形化できるということであり、Ⅰ形については文献¹⁾にその理論的根拠が詳細に述べられている。これはⅡ形、Ⅲ形に

Fig. 9 Frequency spectra of the modulated waves of type IV

(a) hysteresis characteristics (b) $\overline{\eta(t)}$ VS. $\overline{e(t)}$

Fig. 10 Effect of the removal of the nonlinearity in type IV

についても同様に適用できる。一方Ⅳ形の場合には、非線形特性が不感帯、飽和のようなゼロメモリ形ならば上記の効果を有するが、ヒステリシスのようなメモリ形のときには、非線形除去効果が失われる。すなわち、Ⅳ形変調器に Fig. 10 (a) に示すようなメモリ形の特性を有する非線形要素を接続し、入力として $e(t)=E$ なる直流をいれた場合周期 T_e の間の $e(t)$ と非線形要素の出力 $\eta(t)$ の時間平均をそれぞれ $\overline{e(t)}$, $\overline{\eta(t)}$ とすれば、これらの間には Fig. 10 (b) のような関係があり、明らかに非線形除去効果が失われている。従ってこのような面から考えれば、Ⅰ形、Ⅱ形、Ⅲ形を用いるべきであり、Ⅳ形は適用範囲がせまくなるので望ましくない。いままでは入力が直流の場合であったが、動の入力の場合でも変調器が忠実な信号伝達をする限り、非線形除去効果が失われることはない。

以上、周波数特性および非線形除去効果という両面から考える限り、Ⅱ形が最も望ましく、この場合、 $f_c/f_e \geq 6$ かつ f_e より高い周波数成分の振幅が、系のもつ低域濾波特性により十分減衰して系の出力に現われないという条件のもとでは、Ⅱ形変調器の特性は線形比例要素と考えることができる。

なお系に含まれる装置の関係でやむをえずサンプルホールド回路を必要とするときには、ホールド回路とⅠ形変調器の間に、3.1で述べた $(f_e - f_c)$ 成分を十分減衰させるような低域濾波特性を有する要素をいれて使うべきで、さらにこの場合、Ⅰ形よりもⅡ形変調器を使う新方式にすることが望ましい。このとき、線形的な遅れを適当な要素で補償すれば、Ⅱ形とはほぼ同様な特性を持たせることができる。

4. 結 言

パルス幅変調法には種々の方式があり、周波数特性、非線形除去効果の面から、どれが最も望ましいかという理論的根拠が従来極めてあいまいであった。そこで本論文では代表的な4種類の方式をとりあげ、制御系への応用という立場から各変調器の特性を比較検討した。はじめに、正弦波入力に対する各変調器出力を理論的に求め、この結果を利用して周波数特性の面から各方式の比較をした。

つぎに、パルス幅変調法の大きな特長の一つである非線形除去効果の面から各方式を検討した。最後に以上の結果から、周波数特性、非線形除去効果の面では、両縁変調 (Ⅱ

形)が最も望ましいことを示した。

おわりにあたり、本研究の発端を与えて下さり、また終始有益な御意見を賜った東京工大精密工学研究所池辺洋教授に厚くお礼申し上げます。さらに、本研究費の一部は昭47年度文部省科学研究費補助金試験研究(課題番号50049)によっていることを付記し、関係者に深く感謝します。

参考文献

- 1) R. Oldenburger & Y. Ikebe: Linearization of Time-Independent Nonlinearities by Use of an Extra Signal and Extra-Nonlinearity, Trans ASME, Series-D J. of Basic Eng., 89-2, 241/250, (June-1967)
- 2) F.R. Delfeld & G.J. Murphy: Analysis of Pulse-Width-Modulated Control Systems, IRE Trans. on Automatic Control, AC-6-3, 283/292, (Sept-1961)
- 3) R. E. Andeen: Analysis of Pulse Duration Sampled-Data Systems with Linear Elements, IRE Trans. on Automatic Control, AC-5, 306/313, (Sept.-1960)
- 4) 近藤他2: パルス幅変調系の各種安定問題, 制御工学, 8-8, 391/400, (1964)
- 5) W. L. Nelson: Optimal Control Methods for On-Off Sampling Systems, Trans. ASME, Series-D J. of Basic Eng., 84, 91/100, (March-1962)
- 6) 斎藤, 寺尾: 準最適 PWM 制御系の設計, 計測自動制御学会論文集, 9-1, 64/70 (2-1973)
- 7) H. S. Black: Modulation Theory, 263/280, D. Van Nostrand Co., Inc. (1953)
- 8) 池辺, 中田: 電わい素子を用いたサーボ弁の研究, 計測自動制御学会論文集, 7-5, 480/487 (1971)

《付 録》

規準(1)を満たす f_c/f_e の限界をⅡ形を例にとって説明する。

f_e より低い周波数の側帯波は(3)式右辺第3項から生じるので、(3)式右辺第1項(基本波)の振幅で第3項から生じる第 n 番目の成分の振幅を標準化して、

$$U_n^{\text{II}} = \frac{2}{\pi} \frac{B_e}{E_e} \sum_{\epsilon} \frac{1}{\epsilon} J_{(\epsilon\sigma+n/\nu)}(z_{\epsilon})$$

なる U_n^{II} を考えて(3)式より第3項の周波数スペクトルを求めれば Fig. 11 ($f_c/f_e = \sigma/\nu = \lambda$, λ : 正整数の場合)のようになる。この図の横軸には f_e で標準化した周波数を、また縦軸には U_n^{II} は一般に z_{ϵ} , いいかえれば入力振幅の大きさにより変化するので $|U_n^{\text{II}}|_{\text{max}}$ をとった。なお図に示した他に無限の周波数成分が存在するが、Fig. 11 では $|U_n^{\text{II}}|_{\text{max}}$ が 0.001

Fig. 11 Frequency spectra of the modulated waves of type II

以下は省略している。

(1) $f_c/f_e = \sigma/\nu = \lambda$, (λ : 正整数) の場合

Fig. 11 において、 $\mu=1, 2, \dots, \lambda-1$ として $(\lambda-\mu)=1$ のところが f_e に等しい出力成分であり、それより右側のスペクトルは f_e の高調波成分を示す。従って、このときには f_e より低い周波数の側帯波は存在せず、常に規準(1)を満足する。

(2) $f_c/f_e = \sigma/\nu = \lambda + b$ ($0 < b < 1$) の場合

$b=0$ とした Fig. 11 の $|U_n^{\text{II}}|_{\text{max}}$ は、 $b \neq 0$ のときには大きさはそのまま b だけ右に移動する。すなわち $b \neq 0$ のときには多くの側帯波が現われる。ここで f_e より低い周波数の側帯波成分に注目すれば、Fig. 9 より $\lambda \geq 6$ なら常に規準(1)を満足することがわかる。

以上Ⅱ形について規準(1)を満足する f_c/f_e の限界を求める過程を述べたが、規準(2)についても Fig. 9 を利用することができることは前記(1), (2)より明らかである。

なおⅠ形, Ⅱ形についてもほぼ同様な方法により各規準を満足する f_c/f_e の限界を求めることができる。