ポポフの超安定論によるモデル規範形 適応制御系の解析†

太 田 裕 文*

Analysis of Model Reference Adaptive Control Systems via
Popov's Hyperstability Theorem

Hirobumi OHTA*

Multi-input/multi-output model reference adaptive control systems (MRACS) are investigated in this paper. The main purpose of this analysis is to guarantee the stability of the systems by means of Popov's hyperstability theorem, while most MRACS already designed by Liapunov's second method are single-input/single-output systems.

An analysis by means of the hyperstability criterion is first given by Landau where two important problems are left behind. One of these is a problem containing differentiators, and the other is developing an analysis under the assumption that state variables are measurable. It is therefore one of the objectives of this paper to present a method for designing MRACS without using differentiators. The result is given in Theorem 2 and includes all the results obtained by Butchart and Shackcloth, Parks, Winsor and Roy, and Porter and Tatnall via Liapunov's scheme. It is essentially owing to the positive realness of the transfer function matrix of the system that MRACS are constructed without using derivatives of output errors. The result in the case where state variables are not measurable is presented in Theorem 3 where a dynamics similar to Luenberger's observer is introduced in the adaptive mechanism, corresponding to that given by Dressler, who has investigated an approximate parameter adaptation rule by means of sensitivity consideration.

The two results above are directly applicable to the design of MRACS and give insights into a general method for studying this type of adaptive system. Finally comparisons between the results here and those by Liapunov's

method are given together with examples.

1. 緒 言

適応制御系の研究は、航空機が大型化、高性能化するにつれて、また V/STOL 機など機体が多様化するにつれて、航空機を様々な飛行条件の下で安全に航行させるためにその重要性が確認されてきている¹⁾。その中でもオートパイロット等の設計の目的のためには、急速な適応能力を必要とするため、モデル規範形適応制御系 (MRACS) が最も妥当な方法と考えられる。

MRACS の研究は始め航空機の三軸制御系に対し、Whitaker ら²⁾により導入され、その制御則は M. I. T. rule として知られている。しかしこの M. I. T. rule に基づいて設計された MRACS は簡単な系においてさえ不安定になることが示されたので、始めから系の安定性に重点を置いた Liapunov の直接法による設計が Butchart & Shackcloth³⁾, Parks⁴⁾および Porter & Tatnall⁵⁾等によってなされた。

Parks⁴⁾は Liapunov 法に基づいた従来の設計法をまとめ、さらに Parks のエルミート行列を使うことにより簡単な適応機構が構成できることを示した。しかしその設計法では入力が一定でないとき定常誤差が残る場合があることが Monopoli⁶⁾によって指摘され、その解決策が Winsor & Roy⁷⁾によって示された。

Liapunov 法による設計法は一応の成功を収めたが、また一方では、Popov の超安定定理 (hyperstability theorem)⁸⁾⁹⁾を利用した解析が Landau¹⁰⁾によってなされた。彼により得られた結果は、Butchart & Shackcloth, Parks および Winsor & Roy の結果を包含するものであるが、その解析には不明確な点が多く有る。また上記 2 つの設計法には共通して幾つかの問題点がある。その主なものの一つは適応機構内に出

† 第 15 回自動制御連合講演会で発表 (昭 47・11)

* 名古屋大学工学部 名古屋市千種区不老町

* Faculty of Engineering, Nagoya University, Nagoya
(Received December 31, 1972)

力誤差の微分器を必要とすることであり、他の一つはプラントの状態はすべて測定可能であると仮定している点である。特に適応制御系ではプラントのパラメータは未知変動し、従来使われてきた Luenberger のオブザーバ¹²⁾が直接使えないため、この状態推定は応用上いっそう深刻な問題である。

そこで本稿は Popov の超安定論を使って MRACS を解析し、任意の入力に対して安定性の保障された MRACS を構成することを目的とする。まず Landau によりなされた解析を補足し、微分器を使わない MRACS が見通しよく構成されることを示す。さらに適応機構内のダイナミクスを導入することによりプラントの状態を必要としない MRACS が構成される。ここでループ内に導入されたダイナミクスはオブザーバの役割を果たしていることがわかる。

得られた結論は Dressle¹²⁾が1入力1出力系に対して求めた結果も含んでいる。彼は感度的考察から近似的にパラメータ調整則を誘導したが、その調整則はプラントの状態に換ってモデルの状態を使って構成される点に特長がある。最後に Liapunov 法による結果との比較および例題が示される。

2. ポポフの超安定論

1963年にポポフは1入力1出力線形固定系に対し超安定(hyperstability)の概念を導入し⁸⁾、その後それを多入力多出力系に拡張した⁹⁾。超安定の概念は、非線形関数に課される制約があらわでない点に於てよく知られている絶対安定(absolute stability)の概念と異なり、その拡張となっている。また Anderson¹³⁾は受み系(passive system)に外界から注ぎ込まれるエネルギーに着目し、超安定々理の簡単な証明法を示し、それに物理的意味を与えた。この節ではその結果だけをまとめておく。

考察される力学系は線形固定微分方程式により

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (1a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (1b)$$

と記述される。ここで $\mathbf{x}$ は n 次元状態ベクトル、 $\mathbf{u}$ は q 次元操作量ベクトル、そして $\mathbf{y}$ は m 次元出力ベクトルである。また $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ および $\mathbf{D}$ はそれぞれ $n \times n$, $n \times q$, $m \times n$, $m \times q$ の定数行列である。まずつぎの仮定をする。

【仮定 1】 1) $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ は完全可制御、 $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ は完全可観測である。 2) 出力の次数と入力の次数は等しい($m=q$)。

超安定性は入力も含めた安定性の概念である。すなわち、入力 $\mathbf{u}$ が許容入力集合内のある部分集合の値

を取るように制限されているとき、系の状態 $\mathbf{x}$ が有界な値に止まっているような系の性質を表現したものである。この入力の部分集合を、すべての正数 T に対して不等式

$$\int_0^T \mathbf{u}(t) \mathbf{y}(t) dt \leq \delta (\|\mathbf{x}(0)\|) \sup_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{x}(t)\| \quad (2)$$

を満足する $\mathbf{u}(\cdot)$ の集合により定義する。ここに δ は系の初期状態 $\mathbf{x}(0)$ には依存するが、時刻 T には依存しない非負の定数である。また記号 $(\cdot)'$ は転置を示し、 $\|(\cdot)\|$ はユークリッドノルムを表わす。

このとき(1)式で記述される系の超安定性、漸近超安定性はつぎのように定義される。

【定義 1】⁸⁾⁹⁾ (2)式で定義された部分集合内の任意の要素 $\mathbf{u}(\cdot)$ に対し、不等式

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq M(\|\mathbf{x}(0)\| + \delta) \quad (3)$$

がある正の定数 M とすべての t に対し成立するとき、(1)式の系は超安定と呼ばれる。

【定義 1']⁸⁾⁹⁾ 定義1に加えて、さらに

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = 0 \quad (4)$$

が成立するとき、(1)式の系は漸近超安定と呼ばれる。

【注 1】 超安定、漸近超安定の定義は座標軸の選び方には依存しない。すなわち座標変換行列 $\mathbf{S}$ を例って新しい状態 $\hat{\mathbf{x}}$ に、 $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{S}\mathbf{x}$ と変換しても超安定性は不変である。したがってこの性質は伝達関数行列

$$\mathbf{W}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (5)$$

固有の性質であり、仮定 1-1 の下での $\mathbf{W}(s)$ のある最小次元実現(minimum realization)の性質とは異なる。さてポポフの定理を述べる前に、そこで必要となる正実性(positive realness)の定義を与えておこう。

【定義 2】¹⁴⁾ ある実有理関数行列 $\mathbf{W}(s)$ が正実(positive real)であるための必要十分条件は：

- 1) $\mathbf{W}(s)$ は正の実部をもつ極をもたない、
- 2) 虚軸上 $R_e[s] = 0$ の $\mathbf{W}(s)$ の極は単根で、その極に対する留数行列は非負定のエルミート行列である、
- 3) $j\omega$ が $\mathbf{W}(j\omega)$ の極とはならないすべての実数 ω に対し、 $\mathbf{W}(j\omega) + \mathbf{W}^*(j\omega)$ が非負定である。但し $j = \sqrt{-1}$ であり、 $(\cdot)^*$ は複素共役を表わす。

【定義 2']¹⁴⁾ ある実有理関数行列 $\mathbf{W}(s)$ が強正実(strictly positivereal)であるための必要十分条件は：

- 1) $\mathbf{W}(s)$ が正実である。
- 2) $\mathbf{W}(s)$ のすべての極は左半平面 $R_e[s] < 0$ にある
- 3) すべての実数 ω に対し、 $\mathbf{W}(j\omega) + \mathbf{W}^*(j\omega)$ が正定である。

正実性の代数的検定法は Šiljak¹⁵⁾ に述べられている。

以上の準備の下にポポフの超安定、漸近超安定に関する定理はつぎのように述べられる。

【定理 1】⁸⁾⁹⁾ (5) 式の伝達関数行列 $W(s)$ が超安定系を定義するための必要十分条件は、 $W(s)$ が正実であることである。

【定理 1'】⁸⁾⁹⁾ (5) 式の伝達関数行列 $W(s)$ が漸近超安定系を定義するための必要十分条件は、 $W(s)$ が強正実であることである。

【注 2】 受み系において入出力を適当に選択すれば系の伝達関数行列は正実となる。このとき(2)式の左辺 $\int_0^T u(t)'y(t)dt$ は時間区間 $[0, T]$ の間に外界から系に注ぎ込まれたエネルギーと解釈できる¹³⁾。

3. モデル規範形適応制御系の定式化

本稿では多入力多出力の MRACS を考察する。実在する制御対象および規範モデルは

$$\dot{x}_P = A_P(t)x_P + B_P(t)u \quad (6a)$$

$$y_P = Cx_P \quad (7a)$$

$$\dot{x}_M = A_M x_M + B_M u \quad (6b)$$

$$y_M = Cx_M \quad (7b)$$

で記述される。またプラントとモデルの出力誤差は

$$e = y_M - y_P \quad (8)$$

で与えられる。ここで添字 $(\cdot)_P$ はプラントを意味し、 $(\cdot)_M$ はモデルを示す。但し x は n 次元状態ベクトル、 u は r 次元操作量ベクトル、 y は m 次元出力ベクトルそして C は m 次元出力誤差ベクトルである。また $A_P(t)$ 、 $B_P(t)$ は適応機構に依存して変化する $n \times n$ および $n \times r$ の時間可変行列で、実在プラントを定義する。一方 A_M 、 B_M はそれぞれ $n \times n$ 、 $n \times r$ の定数行列であり、規範モデルを定義する。 C は $m \times n$ の定数観測行列である。

従来 MRACS の解析においては $A_P(t)$ 、 $B_P(t)$ の要素はすべて調整可能と仮定されてきたが、実状に沿ったつぎの仮定に置換える。

【仮定 2】 $A_P(t)$ 、 $B_P(t)$ の可変でない要素はそれぞれ対応する A_M 、 B_M の要素に等しい。また合成行列 $[A_P(t)$ 、 $B_P(t)]$ の時間微分は下から q 個 ($1 \leq q \leq n$) の行ベクトル内内のみ零でない要素を含む。

この仮定を式で表わせば

$$A_{Pi}(t) = A_{Pi}(0) = A_{Mi}, \quad i = 1, \dots, n-q$$

$$B_{Pi}(t) = B_{Pi}(0) = B_{Mi}, \quad i = 1, \dots, n-q$$

となる。但し A_i 、 B_i の添字 $(\cdot)_i$ はそれぞれ行列 A 、 B の第 i 行ベクトルを示す。このときプラントと

モデルの間のパラメータ誤差および初期値誤差は

$$A_M - A_P(t) = FA(t) \quad (9a)$$

$$B_M - B_P(t) = FB(t) \quad (9b)$$

$$x_M(0) - x_P(0) = x_0 \quad (9c)$$

と書き表わされる。ここで $A(t)$ 、 $B(t)$ はそれぞれ $q \times n$ 、 $q \times r$ の時間可変行列で、 F は

$$F = \begin{bmatrix} 0_{(n-q) \times q} \\ I_q \end{bmatrix} \quad (10)$$

なる $n \times q$ 行列である。 $0_{(n-q) \times q}$ は $(n-q) \times q$ の零行列、 I_q は $q \times q$ の単位行列を示す。行列 F を導入した目的は、実在プラントを(6)式の状態ベクトル表示に変形する際に生じる単純な変数変換関係、 $x_i = x_{i+1}$ 等の部分を除くためである。

さて適応機構は次式に従って構成される。

$$\dot{A}_P(t) = -F\Omega(e(\tau), t), \quad \tau \leq t \quad (11a)$$

$$\dot{B}_P(t) = -F\Psi(e(\tau), t), \quad \tau \leq t \quad (11b)$$

ここで Ω および Ψ はそれぞれ $q \times n$ 、 $q \times r$ の行列で、 $A_P(t)$ 、 $B_P(t)$ の各要素と時間区間 $[0, t]$ の間の出力誤差 $e(\tau)$ との非線形依存性を表わす。

【注 3】 環境の変化によるプラントパラメータの変化は適応速度に比し十分緩やかなものであり本質的に一定であると見做し得る。また MRACS は複雑な同定操作を行わないため、他の適応制御系に比べ適応速度が速いことが一つの利点となっている。従って(11)式の関係が成立する。

前節で述べられたポポフの定理では、仮定 1-2 のように入力の次数と出力の次数が等しいことが前提条件となっている。そこでこの定理を使って MRACS を解析するためには、出力行列 C を拡張し、出力方程式として改めて

$$y(\cdot) = Hx(\cdot)$$

を用いる。但し H は $q \times n$ の定数行列である。

以上のことからここで考察される MRACS の目的はつぎのように述べられる。

【定義 3】 実在プラントおよび規範モデルが

$$\dot{x}_P = A_P(t)x_P + B_P(t)u \quad (12a)$$

$$y_P = Hx_P \quad (13a)$$

$$x_M = A_M x_M + B_M u \quad (12b)$$

$$y_M = Hx_M \quad (13b)$$

で記述され、出力誤差が

$$e = y_M - y_P \quad (14)$$

で与えられるものとする。

またパラメータ調整則は(11)式に従うものとする。この MRACS の目的は、ある与えられた入力 $u(t)$ に対し、系の初期状態が

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}_P(0) &\equiv \mathbf{x}_M(0) \\ \mathbf{A}_P(0) &\equiv \mathbf{A}_M, \mathbf{B}_P(0) \equiv \mathbf{B}_M \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

であるとき、 $\mathbf{A}_P(t)$ 、 $\mathbf{B}_P(t)$ を $t > 0$ に対する適応機構にのみ依存して調整することにより、 $\mathbf{x}_P(t)$ を $\mathbf{x}_M(t)$ に一致させることである。

Fig. 1 は(11)～(14)式で与えられた MRACS のブロック線図を示す。(15)式のような初期値誤差を伴う場合に系の漸近安定性を保障することは重要である。その理由は測定誤差は回避し難いものであるということと、適応速度が十分速くない場合にはパラメータ誤差が付きまとう恐れがあるからである。

4. モデル規範形適応制御系の超安定条件

この節では始めプラントの状態を使った MRACS について述べ、つぎに状態が可測でない場合を考察する。

この節で必要な仮定は、仮定 2 および仮定 1-1 に対応したつぎのものである。

〔仮定 3〕 $(\mathbf{A}_M, \mathbf{B}_M)$ は完全可制御、 $(\mathbf{A}_M, \mathbf{H})$ は完全可観測である。

4.1 状態を使った MRACS の構成

前節で定式化された MRACS に対してポポフの定理よりつぎの結論が誘導される。

〔定理 2〕(11)～(14)式で記述された MRACS が漸近超安定であるための必要十分条件は、 $q \times q$ 伝達関数行列

$$\mathbf{W}(s) = \mathbf{H}(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_M)^{-1}\mathbf{F} \quad (16)$$

が強正実であることである。さらに $\dot{\mathbf{A}}_P(t)$ 、 $\dot{\mathbf{B}}_P(t)$ は次式に従って調整されなければならない。

$$\mathbf{\Omega}(t) = [\omega_{ij}(t)] = -[\alpha_{ij}e_i(t)x_{Pj}(t)] \quad (17a)$$

$$i=1, \dots, q, \quad j=1, \dots, n$$

$$\mathbf{\Psi}(t) = [\psi_{ij}(t)] = -[\beta_{ij}e_i(t)u_j(t)] \quad (17b)$$

Fig. 1 Multivariable model reference adaptive control system

$$i=1, \dots, q, \quad j=1, \dots, r$$

ここで α_{ij} と β_{ij} はある正の定数である。

(証明) プラントとモデルの状態誤差を

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}_M(t) - \mathbf{x}_P(t) \quad (18)$$

と定義すれば(9)、(12)式より $\mathbf{z}$ の満足すべき方程式は

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{A}_M \mathbf{z} + \mathbf{F} \mathbf{v} \\ \mathbf{z}(0) &= \mathbf{x}_0, \mathbf{v} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}_P + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

となり、出力誤差は

$$\mathbf{e} = \mathbf{H} \mathbf{z} \quad (20)$$

と表わされる。(19)、(20)式で記述された力学系において、入力を $\mathbf{v}$ 、出力 $\mathbf{e}$ と見做したとき伝達関数行列は(16)式となり、この力学系の零解 $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ が漸近超安定であるための必要十分条件は、定理 1' より $\mathbf{W}(s)$ が強正実となることである。従って残されている問題は入力 $\mathbf{v}$ が常に(2)式を満たすことを示せばよい。(2)式はこの場合、 γ をある定数として

$$\int_0^T \mathbf{e}(t)' \mathbf{v}(t) dt \leq \gamma^2, \quad \forall T \geq 0 \quad (21)$$

と書き直される。上式に(19)式を代入し、それを成分で書き表わせば、

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^n \int_0^T e_i(t) \alpha_{ij}(t) x_{Pj}(t) dt \\ &+ \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^r \int_0^T e_i(t) \beta_{ij}(t) u_j(t) dt \leq \gamma^2 \end{aligned} \quad (22)$$

となる。一方(9)、(11)式より

$$\mathbf{A}(t) = [a_{ij}(t)] = \int_0^t \mathbf{\Omega}(\tau) d\tau + \mathbf{A}(0) \quad (23a)$$

$$\mathbf{B}(t) = [b_{ij}(t)] = \int_0^t \mathbf{\Psi}(\tau) d\tau + \mathbf{B}(0) \quad (23b)$$

と表わされる。ここで $\mathbf{A}(0)$ 、 $\mathbf{B}(0)$ はパラメータの未知の初期値誤差であり次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}(0) &= \mathbf{F}^\# (\mathbf{A}_M - \mathbf{A}_P(0)), \\ \mathbf{B}(0) &= \mathbf{F}^\# (\mathbf{B}_M - \mathbf{B}_P(0)) \\ \mathbf{F}^\# &\triangleq (\mathbf{F}' \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}' \\ &= [\mathbf{0}_{q \times (n-q)} : \mathbf{I}_q] \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

(22)式へ(23)と(17)式を代入すれば、結局(21)式は、

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^n \int_0^T e_i(t) \left\{ \alpha_{ij} \int_0^t e_i(\tau) x_{Pj}(\tau) d\tau \right. \\ &\quad \left. - a_{ij}(0) \right\} x_{Pj}(t) dt \\ &+ \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^r \int_0^T e_i(t) \left\{ \beta_{ij} \int_0^t e_i(\tau) u_j(\tau) d\tau \right. \\ &\quad \left. - b_{ij}(0) \right\} u_j(t) dt \geq -\gamma^2 \end{aligned} \quad (25)$$

と変形される。上式の左辺は簡単な計

算により

$$\begin{aligned}
 (25) \text{ の左辺} = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \left[\left\{ \int_0^T e_i(t) x_{pj}(t) dt \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\alpha_{ij}(0)}{\alpha_{ij}} \right\}^2 - \left(\frac{a_{ij}(0)}{\alpha_{ij}} \right)^2 \right] \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^r \beta_{ij} \left[\left\{ \int_0^T e_i(t) u_j(t) dt \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{b_{ij}(0)}{\beta_{ij}} \right\}^2 - \left(\frac{b_{ij}(0)}{\beta_{ij}} \right)^2 \right] \geq - \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^n \frac{a_{ij}(0)^2}{\alpha_{ij}} \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^r \frac{b_{ij}(0)^2}{\beta_{ij}} \triangleq -\gamma^2 \quad (26)
 \end{aligned}$$

となる。ここで上式の不等式が成立するためには α_{ij} , β_{ij} がある正の定数である必要がある。従って (21) 式は, (26) 式で与えられた定数 γ に対し, すべての関数 $x_p(t)$, $u(t)$ および $e(t)$ と正数 T に無関係に成立する。(証終)

上の定理では状態とパラメータの初期値に無関係に, またすべての関数 $u(t)$ に対し (19) 式の零解 $z=0$ の漸近安定性が保障された。従って $t \rightarrow \infty$ で $z \rightarrow 0$, すなわち $x_p \rightarrow x_M$ となる。しかしながらここではパラメータ誤差についての漸近安定性には何も触れていない。 $t \rightarrow \infty$ につれて u がある一定値になる場合は, x_p は x_M の平衡点 $\bar{x}_M$ に漸近し, そのとき (19) 式より一般に

$$A(\infty) \bar{x}_M + B(\infty) u(\infty) = 0 \quad (27)$$

となるが, 必ずしも $A(t) \rightarrow 0$, $B(t) \rightarrow 0$ とはならない。このことはパラメータ値が異なる 2 つの系において, 入力と同じであれば状態も同じになる場合があることを示している。Porter & Tatnall⁵⁾ においてもこのことは述べられており, 簡単な例が示されている。しかしながら MRACS は本質的に同定問題を回避している点にその特長があるので, 上記のパラメータ誤差が残る点はやむを得ないことに思われる。

特別な場合には $A(t) \rightarrow 0$, $B(t) \rightarrow 0$ となる。このときは (23) 式より

$$A(0) = - \int_0^\infty \Omega(e(\tau)) d\tau, \quad B(0) = - \int_0^\infty \Psi(e(\tau)) d\tau$$

となり, パラメータ調整則はその初期値誤差を推定していることになる。

Fig. 2 は適応機構内の計算ブロックを (17) 式に従って構成した図を示している。

定理 2 の結果は Landau¹⁰⁾ の結果に対応したものである。その適応機構の構成では出力誤差を微分器に通し, その出力を調整則に利用しているが, 微分器の次数等が不明確で理解し難い。一方ここでは状態を線形変換し, 入出力関係を記述する伝達関数行列を強正

Fig. 2 Block diagram of the computing block

実となるように構成することにより, 微分器を必要としない応用上便利な構成が得られた。

4.2 プラントの状態を使わない MRACS の構成

4.1 の MRACS の構成には定理 2 の (17 a) 式のようにプラントの状態が可測である必要があり, これは Liapunov 法にもとづいた解析においても同様である。そこでここでは状態が可測でない場合の構成法について考察するが, この解析は Liapunov 法では極めて困難である。

前節で定義された MRACS を考える。ここでなされる仮定は, 仮定 2, 3 に加えてつぎのものが要である。

【仮定 4】パラメータの初期値 $A(0)$, $B(0)$ は既知である。このとき Fig. 3 で示されるように次式で与えられるループ内の力学系を考える。

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{z}} = & (A_M - FA(t))\hat{z} + F\hat{\theta} + FKH(\hat{z} - z) \\
 \hat{\theta} = & A(t)x_M + B(t)u
 \end{aligned} \quad (28)$$

但し $\hat{z}$ は n 次元ベクトル, K は $q \times q$ 正定行列であり, その他の行列は前に定義されたものである。

z を利用して調整則を構成すれば, 定理 2 に対応したつぎの定理が得られる。

【定理 3】(11) ~ (14) 式で記述された MRACS が漸近超安定であるための必要十分条件は, $q \times q$ 伝達関数行列

$$W(s) = HZ(s)(sI_n - A_M - FKH)^{-1}F \quad (29)$$

が強正実であることである。また $\hat{A}_P(t)$, $\hat{B}_P(t)$ は次式に従って調整されなければならない。

$$\Omega(t) = [\omega_{ij}(t)] = -[\alpha_{ij}e_i(t)(x_{Mj}(t) - \hat{z}_j(t))] \quad (30a)$$

$$\Psi(t) = [\phi_{ij}(t)] = -[\beta_{ij}e_i(t)u_j(t)] \quad (30b)$$

$$i=1, \dots, q, \quad j=1, \dots, r$$

Fig. 3 Multivariable model reference adaptive control system with an observer

但し α_{ij} と β_{ij} はある正の定数で、 $\hat{z}(t)$ は (28) 式で与えられる。また $\mathbf{Z}(s)$ は $\hat{z} \rightarrow z$ への伝達関数行列である。

(証明) (28) 式を (20) 式を使って変形すれば

$$\dot{\hat{z}} = (\mathbf{A}_M + \mathbf{F}\mathbf{K}\mathbf{H})\hat{z} + \mathbf{F}[\mathbf{A}(t)(\mathbf{x}_M - \hat{z}) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} - \mathbf{K}\mathbf{e}] \quad (31)$$

となる。(31) 式が漸近超安定であるための必要十分条件は、(29) 式の $\mathbf{W}(s)$ が強正実であることである。このとき n 次元ベクトル $\mathbf{\varepsilon}$ を

$$\mathbf{\varepsilon} = \hat{z} - z$$

と定義すれば、 $\mathbf{\varepsilon}$ の満足すべき方程式は (19), (31) 式より

$$\dot{\mathbf{\varepsilon}} = (\mathbf{A}_M - \mathbf{F}\mathbf{A}(t) + \mathbf{F}\mathbf{K}\mathbf{H})\mathbf{\varepsilon} \quad (32)$$

となる。上式の特性根が十分大きな負の実部をもつように $\mathbf{K}$ を与えれば、 $t \rightarrow \infty$ で $\mathbf{\varepsilon} \rightarrow 0$ となる。従って (28) 式は z のオブザーバとなり、 $\hat{z}$ はその推定値を与えている。さらに $\hat{z}$ の漸近超安定性より、 $t \rightarrow \infty$ で $\hat{z} \rightarrow 0$ 、従って $z \rightarrow 0$ となる。

残されている問題は (2) 式の不等式

$$\int_0^T \mathbf{e}(t)' [\mathbf{A}(t)(\mathbf{x}_M(t) - \hat{z}(t)) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) - \mathbf{K}\mathbf{e}(t)] dt \leq \gamma^2 \quad (33)$$

が常に満たされていることを示せばよい。定理 2 の証明と同様な方法により、 $\mathbf{K}$ が正定であることおよび (23), (30) 式を使い、

$$\begin{aligned} (33) \text{ の左辺} &\leq \int_0^T \mathbf{e}(t)' [\mathbf{A}(t)(\mathbf{x}_M(t) - \hat{z}(t)) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)] dt \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \left[\int_0^T e_i(t)(x_{Mj}(t) - \hat{z}_j(t)) dt - \frac{a_{ij}(0)^2}{\alpha_{ij}} - \left(\frac{a_{ij}(0)}{\alpha_{ij}} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^r \beta_{ij} \left[\int_0^T e_i(t) u_j(t) dt - \frac{b_{ij}(0)^2}{\beta_{ij}} - \left(\frac{b_{ij}(0)}{\beta_{ij}} \right)^2 \right] \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^n \frac{a_{ij}(0)^2}{\alpha_{ij}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^r \frac{b_{ij}(0)^2}{\beta_{ij}} \triangleq \gamma^2 \quad (34) \end{aligned}$$

と変形される。従って (33) 式は、上式で与えられる γ に対し、すべての関数 $\mathbf{u}(t)$ と正数 T に無関係に成立する。(証終)

上の定理 3 は仮定 4 の下に導かれた。実際プラントはほとんどの場合その動作は定常的なものであるから、パラメータの定常値、すなわち初期値は既知としても差し支えない。また上の

定理では (29) 式の中の $\mathbf{Z}(s)$ が計算できない点に問題がある。しかし $\hat{z}$ と z の差 $\mathbf{\varepsilon}$ は (32) 式に従うから、 $\mathbf{K}$ を適当に選ぶことによりその値は任意の初期値 $\mathbf{\varepsilon}(0)$ からパラメータの変化速度に比し十分速く零にできる。したがって実用上は近似的に

$$\mathbf{Z}(s) \doteq \mathbf{I}_n$$

と考えてもよい。

[注 4] プラントの状態が一部未知、または一部既知の場合は、その部分に対応した調整則をそれぞれ (30 a) または (17 a) 式とすることができる。

5. Liapunov 法との比較

この節では始め多入力多出力系の MRACS について Liapunov の第 2 法に基づいて得られている結果を示し、本稿で得られた結果と比較する。その後 1 入力 1 出力系の例題を示す。

(6)~(8) 式で記述される MRACS について考察する。Liapunov 法を使った解析では観測方程式は考慮されていないから $\mathbf{C} = \mathbf{I}_n$ であり、 $\mathbf{z} = \mathbf{x}_M - \mathbf{x}_P = \mathbf{e}$ となる。また系のパラメータはすべて可調整と仮定するので $q = n$ である。このとき Liapunov 関数 V を

$$V = \mathbf{e}' \mathbf{P} \mathbf{e} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\alpha_{ij}} a_{ij}^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r \frac{1}{\beta_{ij}} b_{ij}^2 \quad (35)$$

と与える。もし

$$\dot{a}_{ij} = -\alpha_{ij} \left(\sum_{k=1}^n e_k p_{ki} \right) x_{Pj} \quad (36 a)$$

$$\dot{b}_{ij} = -\beta_{ij} \left(\sum_{k=1}^n e_k p_{ki} \right) u_j \quad (36 b)$$

と置けば、(35) 式の軌道に沿った時間微分は (19) 式よ

り

$$\dot{V} = e' [A_M' P + P A_M] e \quad (37)$$

となる。 A_M は安定な行列であるから次式を満足する正定行列 P, Q が一意に存在する。

$$A_M' P + P A_M = -Q \quad (38)$$

(36) 式の調整則は Winsor & Roy⁷⁾ および Porter & Tanall⁹⁾ 等により得られた結果であり、定理 2 の (17) 式の調整則は (36) 式において $P = I_n$ の場合に対応している。しかし 4.1 で述べられたように、ここにおいても (37), (38) 式より $\dot{V}$ は半負定であるから、一般にはパラメータ誤差 A, B は残る。

【例題 1】次式で記述される MRACS を考察する。ここで入力 ρ , 出力 θ で共にスカラーである。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^n \theta_M}{dt^n} + \sum_{i=1}^n a_{Mi} \frac{d^{i-1} \theta_M}{dt^{i-1}} &= \sum_{i=1}^r b_{Mi} \frac{d^{i-1} \rho}{dt^{i-1}} \\ \frac{d^n \theta_P}{dt^n} + \sum_{i=1}^n a_{Pi}(t) \frac{d^{i-1} \theta_P}{dt^{i-1}} &= \sum_{i=1}^r b_{Pi}(t) \frac{d^{i-1} \rho}{dt^{i-1}} \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

状態ベクトルと操作量ベクトルを

$$x = [\theta, \dot{\theta}, \dots, \theta^{(n-1)}]' \quad (40a)$$

$$u = [\rho, \dot{\rho}, \dots, \rho^{(r-1)}]' \quad (40b)$$

と定義して上式を状態ベクトル微分方程式に書き改めると (12) 式に対応した式が得られる。但し、

$$A_M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{M1} & -a_{M2} & \dots & \dots & -a_{Mn} \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$B_M = \begin{bmatrix} 0_{(n-1) \times r} \\ b_{M1} \ b_{M2} \ \dots \ b_{Mr} \end{bmatrix}$$

であり、 $A_P(t), B_P(t)$ も同様に求まる。この問題では $q=1$ であるから

$$F = [0 \ \dots \ 0 \ 1]', \quad H = [h_1, h_2, \dots, h_n]$$

となる。(39) 式の MRACS が漸近超安定であるための必要十分条件は、定理 2 より:

$$1) \quad W(s) = H(sI_n - A_M)^{-1} F \\ = \left(\sum_{i=1}^n h_i s^{i-1} \right) / \left(s^n + \sum_{i=1}^n a_{Mi} s^{i-1} \right) \quad (42)$$

が強正実であること、および

$$2) \quad \dot{a}_{Pi}(t), \dot{b}_{Pi}(t) \text{ の調整則は次式で与えられる。}$$

$$\dot{a}_{Pi}(t) = \omega_i(t) = -\alpha_i e(t) x_{Pi}(t), \quad i=1, \dots, n \quad (43a)$$

$$\dot{b}_{Pi}(t) = -\psi_i(t) = \beta_i e(t) u_i(t), \quad i=1, \dots, r \quad (43b)$$

(43) 式は Butchart & Shackcloth³⁾ が求めた結果を含んでいる。

【例題 2】(39) 式を更に簡略化した次式の MRACS を考える。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^n \theta_M}{dt^n} + \sum_{i=1}^n a_i \frac{d^{i-1} \theta_M}{dt^{i-1}} &= K_0 \sum_{i=1}^r b_i \frac{d^{i-1} \rho}{dt^{i-1}} \\ \frac{d^n \theta_P}{dt^n} + \sum_{i=1}^n a_i \frac{d^{i-1} \theta_P}{dt^{i-1}} &= K_c(t) K_v \sum_{i=1}^r b_i \frac{d^{i-1} \rho}{dt^{i-1}} \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

$z \triangleq \theta_M - \theta_P$ とすれば、 z は微分方程式

$$\frac{d^n z}{dt^n} + \sum_{i=1}^n a_i \frac{d^{i-1} z}{dt^{i-1}} = (K_0 - K_c(t) K_v) \sum_{i=1}^r b_i \frac{d^{i-1} \rho}{dt^{i-1}} \quad (45)$$

に従う。(45) 式が漸近超安定であるためには、例題 1 の条件 1 と、 $\dot{K}_c(t)$ を

$$\dot{K}_c(t) = \frac{\beta}{K_v} e(t) \sum_{i=1}^r b_i \frac{d^{i-1} \rho}{dt^{i-1}}$$

と構成すれば保障される。これは Parks⁴⁾ の結果に対応するものである。

【例題 3】例題 1 と同じ MRACS を考え定理 3 を適用する。プラントの状態を使わないで (39) 式が漸近超安定となるための必要十分条件は:

$$1) \quad W(s) = HZ(s)(sI_n - A_M - FkH)^{-1} F \\ = \left(\sum_{i=1}^n h_i s^{i-1} \right) / \left[s^n + \sum_{i=1}^n (a_{Mi} - kh_i) s^{i-1} \right] \quad (46)$$

が強正実であること、および

$$2) \quad \dot{a}_{Pi}(t), \dot{b}_{Pi}(t) \text{ の調整則は}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{a}_{Pi}(t) &= -\alpha_i e(t) (x_{Mi}(t) - \hat{z}_i(t)), \quad i=1, \dots, n \\ \dot{b}_{Pi}(t) &= \beta_i e(t) u_i(t), \quad i=1, \dots, r \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

で与えられることである。但し α_i, β_i と k はある正の定数で、 $\hat{z}$ は (28) 式より与えられる。

(47) 式の構成は Dressler¹²⁾ が感度的考察から、条件

$$\Delta e(t) e(t) \leq 0$$

を設計目的として求めた結果に対応するものである。その結果は (47) 式で $\hat{z} \equiv 0$ とした場合に一致しているが、安定性は極所的にしか保障されないため Liapunov 関数を使ってその安定領域を調べておく必要がある。しかし構成される適応制御系は常に非線形系となるため、簡単な系においてさえその解析は容易ではない。一方本稿では系の漸近安定性を設計目的としているのでその必要はない。

6. 結 言

この論文ではポポフの超安定定理を使って MRACS の安定性の問題を解析した。得られた定理 2 と 3 は適応機構の構成を直接与えるものであり、従来 Liapunov 法に基づいて安定性を保障することから得られた結果 (文献 3) ~ 7)) を統一的に見直すことができる。さらにプラントの状態が可測でない場合の構成について述べ、その結果は Dressler¹²⁾ の結果を含むことが示された。得られたパラメータ調整則 (17), (30) 式は、

(2)式に対応するそれぞれの不等式を入力 u に無関係に成立させるための十分条件となっている。従って別の調整則を見出す可能性が残されている。

今後の問題点としてパラメータ誤差の収束性の研究および適応速度の改良等が残されている。また得られた結果を基にした適応制御系の設計並びに応用も魅力のある問題と思われる。

最後に日頃熱心に御指導をいただいている本学工学部杉浦一郎教授並びに有意義な御助言を与えてくださった研究室の皆様深く感謝の意を表わします。

参 考 文 献

- 1) H. L. Ehlers and P. K. Smyth: Adaptive Control Applications to Aerospace Vehicles, J. Aircraft, Vol. 7, No. 2, pp. 97-116 (1970)
- 2) H. P. Whitaker: Massachusetts Institute of Technology Presentation, Proc. Self Adaptive Flight Control System Symposium, WADC Tech. Rep. 59-49, pp. 16-78 (1959)
- 3) R. L. Butchart and B. Shackcloth: Synthesis of model reference adaptive control systems by Liapunov's second method, Proc. 2nd IFAC Symp. on Theory of Self-Adaptive Control Systems, New York, Plenum, pp. 145-152 (1966)
- 4) P. C. Parks: Liapunov Redesign of Model Reference Adaptive Control Systems, IEEE Trans. on AC, Vol. AC-11, No. 3, pp. 362-367 (1966)
- 5) B. Porter and M. L. Tatnall: Performance characteristics of multi-variable model reference adaptive systems synthesized by Liapunov's direct method, INT. J. Control, Vol. 10, No. 3, pp. 241-256 (1969)
- 6) R. V. Monopoli: Liapunov's Method for Adaptive Control-System Design, IEEE Trans. on AC (Corresp.), Vol. AC-12, No. 3, pp. 334-335 (1967)
- 7) C. A. Winsor and R. J. Roy: Design of Model Reference Adaptive Control Systems by Liapunov's Second Method, IEEE Trans. on AC (Corresp.), Vol. AC-13, No. 2, p. 204 (1968)
- 8) V. M. Popov: The solution of a new stability problem for controlled systems, Automation and Remote Control, Vol. 24, pp. 1-23 (1963)
- 9) V. M. Popov: Hyperstability and optimality of automatic systems with several control functions, Rev. Roumanian Sci. Tech.-Electrotech. and Engrg. Vol. 9, No. 4, pp. 629-690 (1964)
- 10) I. D. Landau: A Hyperstability Criterion for Model Reference Adaptive Control Systems, IEEE Trans. on AC (short paper), Vol. AC-14, No. 5, pp. 552-555 (1969)
- 11) D. G. Luenberger: Observers for Multivariable Systems, IEEE Trans. on AC, Vol. AC-11, No. 2, pp. 190-197 (1966)
- 12) R. M. Dressler: An Approach to Model-Referenced Adaptive Control Systems, IEEE Trans. on AC, Vol. AC-12, No. 1, pp. 75-80 (1967)
- 13) B. D. O. Anderson: A Simplified Viewpoint of Hyperstability, IEEE Trans. on AC (short paper), Vol. AC-13, No. 3, pp. 292-294 (1968)
- 14) R. W. Newcomb: Linear Multiport Synthesis, McGraw-Hill, Ch. III-V (1966)
- 15) D. D. Šiliak: New Algebraic Criteria for Positive Realness, J. Franklin Institute, Vol. 291, No. 2, pp. 109-120 (1971)