有界な不確かさをもった線形力学系の相対安定性

奥 山 佳 史*

Relative Stability of Linear Dynamic Systems with Bounded Uncertain Coefficients

Yoshifumi OKUYAMA*

In this paper, the stability problems of linear dynamic systems with bounded uncertain coefficients or nonlinear time-varying elements are investigated in the time domain relating to the transition matrices of the nominal systems. Sufficient conditions for the relative stability of such systems are given in L_1 and L_∞ spaces, respectively.

It is shown that these two conditions are equivalent and described by a simpler form when the nominal systems are time-invariant.

The method of analysis is as follows. First, integral inequality systems are given from the integral equations, which themselves are obtained from the state equations, and then the conditions of boundedness of norms are derived by using the properties of the M-matrix. The principle of this idea is quite simple. But the stability criteria developed here will be perhaps more favourable than any other results which have been already obtained for nonhomogeneous systems involving nonlinear time-invariant ones.

1. ま え が き

安定論というとやや古典的な感じは否めない。完全な系の把握と完全な制御が存在するならば、ありえない問題であるからである。しかし、そうはいって見たところで、理論と実際のギャップは現実的に常に存在している。不確かさ、非線形性、技術的限界などによる系への影響の検討、相対的な意味での安定性は無視しえないものである。すなわち、問題としている線形力学系の近傍の動的性質を明らかにすることが必要となる。

安定性の判定には現在二つの接近法があると考えられる。一つは Liapunov の第2の方法、ある正定状態関数の減衰性に基づく考え方、すなわち、微分方程式

系あるいは差分方程式系（同次系）における状態のある意味での収束性に帰着されるもの。もう一つは入・出力安定とよばれる範ちゅうに属するもので、非同次系そして積分方程式系におけるある意味での状態の有界性に帰着されるものである。

どちらが有利であるか一概にはいえないが、より広い系の構造に関して適用可能であるという意味で、筆者は後者の考え方に以前から興味をもっていた。ここでもその考え方に従っている。

線形時変系（あるいは非線形時変系）の入・出力安定条件としては I. W. Sandberg の円板定理以来いくつかの研究がなされている^{1)~4)}。しかし、それらは表現法、形式の拡張にすぎず本質的に新しい問題への解決はなされていない。

さきに筆者は多変数系への L_2 安定問題の拡張を試み、周波数領域における安定条件の定理を与えたが⁵⁾、ここでは状態方程式で記述される一般の多変数系について時間領域でその相対的安定 (L_1, L_∞ 安定) 条件を定める理論を構成する。

この考え方はかなり以前から筆者がもっていたもので⁶⁾、これまでまとめきれずにいたものである。最近わが国において多変数系への入・出力安定の拡張の試みがいくつかなされているので^{7)~9)}、その一環として改めて、ここに独自の無駄のない（と思われる）理論を展開してみた。

2. 安定の定義と基本的性質

力学系が

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + u(t) \quad (1. a)$$

$$y(t) = C(t)x(t) \quad (1. b)$$

ただし、 $t \in [t_0, \infty)$, $x, u \in R^n$, $y \in R^m$

$A(t) \in R^{n \times n}$; 区分的に連続

$C(t) \in R^{m \times n}$; 有界 ($|C(t)| < \infty$ (注1)),

* 茨城大学工学部 日立市中成沢町 4-12-1

* Faculty of Engineering, Ibaraki University, Hitachi (Received October 2, 1973).

(注1) $|\cdot|$ は各成分の絶対値和のノルム

$[C(t), A(t)]$; 完全可観測

で表わされるとき, 安定の定義をつぎのように定める。

【定義 1】

入力 $u_i \in L_1[t_0, \infty)$, $\forall i \in N \triangleq \{1, 2, \dots, n\}$, 初期状態 $|x_0| < \infty$ ($x_0 \triangleq x(t_0)$) に対し, 出力 y が $y_i \in L_1[t_0, \infty)$, $\forall i \in M \triangleq \{1, 2, \dots, m\}$ となるとき, L_1 安定であるという。ただし, Banach 空間 $L_1[t_0, \infty)$ におけるノルムは

$$\| \cdot \|_1 \triangleq \int_{t_0}^{\infty} | \cdot | dt \quad (2)$$

で定義される。

【定義 2】

入力 $u_i \in L_\infty[t_0, \infty)$, $\forall i \in N$, 初期状態 $|x_0| < \infty$ に対し, $y_i \in L_\infty[t_0, \infty)$, $\forall i \in M$ となるとき, L_∞ 安定であるという。ただし, Banach 空間 $L_\infty[t_0, \infty)$ におけるノルムは

$$\| \cdot \|_\infty \triangleq \text{ess sup}_{t \in [t_0, \infty)} | \cdot | \quad (3)$$

で定義される。

さらに高次のノルムの定義される空間 $L_p[t_0, \infty)$ ($1 < p < \infty$) の問題も存在する。しかし, それは単に問題を複雑にするだけで, 本質的に異なった結論が得られるわけでもないで, ここではとくに考えない。ただし, 空間 L_2 の問題については周波数領域にもっていくことによって面白い結果が得られることは周知の通りである。

(1) 式において, いま

$$\tilde{x}(t) = P(t)x(t) \quad (4)$$

なる状態の座標変換を行なう。すると系の方程式

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= [P(t)A(t)P^{-1}(t) + \dot{P}(t)P^{-1}(t)]\tilde{x}(t) \\ &\quad + P(t)u(t) \end{aligned} \quad (5.a)$$

$$y(t) = C(t)P^{-1}(t)\tilde{x}(t) \quad (5.b)$$

が得られる。これは (1) 式と等価な系である。ただし, $P(t)$ はつぎのような性質をもつ有界, 正則な実数マトリクスであるとする。

- 1) $\dot{P}(t)$; 区分的に連続
- 2) $|\dot{P}(t)| < \infty$, $|P(t)| < \infty$
- 3) $\det P(t) \neq 0$, $\forall t \in [t_0, \infty)$

変換された系 (5) 式もとの系 (1) 式の間においてつぎの補助定理が成り立つ。

【補助定理】

変換された系 (5) 式が $L_1(L_\infty)$ 安定ならば, もとの系 (1) 式も $L_1(L_\infty)$ 安定であり, その逆もいえる。

(証明) (1) 式の系において出力 y は

$$y(t) = C(t)\Phi(t, t_0)\left[x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau)u(\tau)d\tau\right] \quad (6)$$

で表わされる。ただし, $\Phi(t, \tau)$ は

$$\dot{\Phi}(t, \tau) = A(t)\Phi(t, \tau), \quad \Phi(\tau, \tau) = I \quad (7)$$

を満たす遷移マトリクスである。等価系であるから, この関係は (5) 式の系においても, 単に $x_0 = P^{-1}(t_0)\tilde{x}_0$, ($\tilde{x}_0 \triangleq \tilde{x}(t_0)$) と考えることによって保存される。ところで, さきの変換マトリクスの性質より $|P^{-1}(t_0)| < \infty$ であるから, この補助定理が成り立つことは明白である。

3. 問題とする系の表現

ここで問題とする力学系はつぎのような形で表現されるものである。

$$\dot{x}(t) = [A(t) + B(t)]x(t) + u(t) \quad (8.a)$$

$$y(t) = C(t)x(t) \quad (8.b)$$

ただし, $t \in [t_0, \infty)$, $x, u \in R^n$, $y \in R^m$, $A(t) = [a_{ij}(t)] \in R^{n \times n}$ は区分的に連続な既知関数のマトリクス (注 2), $B(t) = [b_{ij}(t)]$ は

$$|b_{ij}(t)| \leq b_{ij}, \quad \forall i, j \in N \quad (9)$$

あるいは $P(t)B(t)P^{-1}(t) \triangleq [\tilde{b}_{ij}(t)]$ において

$$|\tilde{b}_{ij}(t)| \leq \tilde{b}_{ij}, \quad \forall i, j \in N \quad (10)$$

がいえるある意味での上限のみ既知な時間の関数のマトリクスである。 $C(t)$ については系 (1) 式における同じである。

相対安定性とは, 既知線形系 (公称系)

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + u(t) \quad (11.a)$$

$$y(t) = C(t)x(t) \quad (11.b)$$

が安定であり, しかも

$$\dot{\Phi}(t, \tau) = A(t)\Phi(t, \tau), \quad \Phi(\tau, \tau) = I \quad (12)$$

を満たす遷移マトリクス $\Phi(t, \tau)$ が既知 (解析的あるいは近似的な離散値解として既知) であるとき, その遷移マトリクスとの関連において, (8) 式のような “有界な不確かさ” をもった線形力学系の安定性を判定しようとするものである。

このような有界な不確かさによる考え方は, 力学系が (8) 式に対し

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(x, t) + u(t) \quad (13.a)$$

$$y(t) = C(t)x(t) \quad (13.b)$$

$$f: R^1 \times R^n \rightarrow R^n$$

と非線形時変の形で書ける場合にも適用しう。その場合には sector を考えることによって, 上の問題に埋込むことができる。すなわち

$$b_{ij}(t) = f_{ij}(x, t)/x_j(t), \quad \forall i, j \in N \quad (14)$$

ただし,

(注 2) 複雑になるので, (1) 式における一般の時変系の $A(t)$ と特に区別しない。

$$f_i(x, t) \triangleq \sum_{j=1}^n f_{ij}(x, t)$$

と対応させ、(9)式に対しては

$$|f_{ij}(x, t)/x_j(t)| \leq b_{ij}, \quad \forall i, j \in N \quad (15)$$

(10)式に対しては

$$P(t)f(P^{-1}(t)\hat{x}(t), t) \triangleq \tilde{f}(\hat{x}, t) \quad (16)$$

において

$$|\tilde{f}_{ij}(\hat{x}, t)/\hat{x}_j(t)| \leq \tilde{b}_{ij}, \quad \forall i, j \in N \quad (17)$$

$$\text{ただし, } \tilde{f}_i(\hat{x}, t) \triangleq \sum_{j=1}^n \tilde{f}_{ij}(\hat{x}, t)$$

と置けばよい。

4. 従来の理論との関連

本論に入る前に Bellman-Gronwall の不等式¹⁰⁾など従来の理論との関連を明らかにしておこう。

微分方程式系(8)式より明らかに積分方程式系

$$\begin{aligned} x(t) = \Phi(t, t_0) \left[x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau) B(\tau) x(\tau) d\tau \right. \\ \left. + \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau) u(\tau) d\tau \right] \end{aligned} \quad (18.a)$$

$$y(t) = C(t)x(t) \quad (18.b)$$

が得られる。いま、公称系

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + u(t) \quad (19)$$

の $x(t_0) = x_0$ を満す状態を $\hat{x}(t)$ (出力を $y(t)$) と書くことにすれば

$$\hat{x}(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)u(\tau)d\tau \quad (20)$$

であるから、(18.a)式は公称系の解に対し相対的に

$$x(t) = \hat{x}(t) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)x(\tau)d\tau \quad (21)$$

と表わされる。

そこで、つぎのような積分不等式が得られる。

$$|x(t)| \leq |\hat{x}(t)| + \int_{t_0}^t |\Phi(t, \tau)| \cdot |B(\tau)| \cdot |x(\tau)| d\tau \quad (22)$$

この式の性質は、 $u(t) \equiv 0$ の同次系、すなわち、 $\hat{x}(t) = \Phi(t, t_0)x_0$ と書ける場合には Bellman-Gronwall の不等式により明らかにされ

$$|x(t)| \leq k|x_0|\exp[-(\alpha - k|B|)(t - t_0)] \quad (23)$$

を得る。ただし、 $B \triangleq [b_{ij}]$ 、公称系は漸近安定で、

$$|\Phi(t, t_0)| \leq k\exp[-\alpha(t - t_0)], \quad \alpha > 0 \quad (24)$$

そして

$$|\hat{x}(t)| \leq k|x_0|\exp[-\alpha(t - t_0)] \quad (25)$$

と置けるものとする。

この (23) 式より、有界な不確かさをもった力学系(8)式は

$$k|B|/\alpha < 1 \quad (26)$$

ならば漸近安定であることが容易に知れる。

ところで、 $u(t) \equiv 0$ のときはどうなるであろうか。そこで、(22)式についてさきの L_1 ノルム、 L_∞ ノルムを考えてみる。ただし、この段階では状態 x の有界性は保証されていないから、いま仮りに、 L_1, L_∞ についてそれぞれ

$$\|\cdot\|_1^T \triangleq \int_{t_0}^T |\cdot| dt \quad (27)$$

$$\|\cdot\|_\infty^T \triangleq \text{ess sup}_{t \in [t_0, T]} |\cdot| \quad (28)$$

なる時間を限ったノルムを考える。 L_1 ノルムについては

$$\begin{aligned} \|\dot{x}(t)\|_1^T \leq \|\dot{\hat{x}}(t)\|_1^T \\ + \int_{t_0}^T \|\Phi(t, \tau)\|_1^T \cdot |B| \cdot |x(\tau)| d\tau \end{aligned} \quad (29)$$

が得られる。そこで、 $T \rightarrow \infty$ に対し

$$\sup_{\tau \in [t_0, T]} \int_{\tau}^T |\Phi(t, \tau)| dt \cdot |B| < 1 \quad (30)$$

ならば、定義1の L_1 安定を満すことがわかる。いま、(23)式と同様、遷移マトリクス $\Phi(t, t_0)$ が(24)式を満しているとすれば、明らかに(30)式の条件は $k|B|/\alpha < 1$ で十分である。これはさきの Bellman-Gronwall の不等式の結果と一致する。

同じことは、 L_∞ についてもいえる。(22)式より

$$\begin{aligned} \|x(t)\|_\infty^T \leq \|\hat{x}(t)\|_\infty^T \\ + \left\| \int_{t_0}^t |\Phi(t, \tau)| d\tau \right\|_\infty^T \cdot |B| \cdot \|x(t)\|_\infty^T \end{aligned} \quad (31)$$

よって、 $T \rightarrow \infty$ に対し

$$\sup_{t \in [t_0, T]} \int_{t_0}^t |\Phi(t, \tau)| d\tau \cdot |B| < 1 \quad (32)$$

ならば、定義2の L_∞ 安定を満す。同様に、遷移マトリクス $\Phi(t, t_0)$ に(24)式の関係があるとすれば、明らかに、(32)式の条件は $k|B|/\alpha < 1$ で十分で、前の結果と完全に一致する。すなわち、これら(30)、(32)式の条件は、公称系が漸近安定であるとき、問題としている系も漸近安定であることを保証するものである。

ここでは、Bellman-Gronwall の不等式など、従来行なわれていた安定条件との関連を明らかにするため、絶対値とノルムによる状態の有界性の検討を行なった。しかし、このような取扱いをすると、絶対値とノルムとしてマトリクス、ベクトルの各成分の総和を求めるため、その十分条件が厳しくなりすぎる。たとえば、公称系のマトリクス $A(t)$ が可約であるような場合、すなわち、系が動的に分離構造となるような場合

には本質的に無意味なものとなる。このことは力学系の解析にあたってユークリッドノルム $\|x\|=(x'x)^{1/2}$ あるいは一般に二次形式 $\|x\|_G^2=(x'Gx)$ について考えた場合と同様である。

5. 相対安定条件

もっと緩やかな（必要十分条件に近い）条件を導くため、ここでは(21)式におけるベクトルの各成分についての積分不等式を考える。すなわち、 ϕ_{ij} を Φ の各成分とすると、

$$\begin{aligned} |x_i(t)| &\leq |\hat{x}_i(t)| \\ &+ \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \int_{t_0}^t |\phi_{ij}(t, \tau)| \cdot b_{jk} \cdot |x_k(\tau)| d\tau \\ &\quad, \forall i \in N \end{aligned} \quad (33)$$

である。

これにより直接安定性を検討してもよいが、さきに記したように、ここでいう状態 x は入・出力関係のみに注目した場合、どのようにでもとりうるものであるから、状態の座標変換

$$\bar{x}(t) = P(t)x(t) \quad (34)$$

をもって

$$\bar{x}(t) = \hat{\bar{x}}(t) + P(t) \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) P^{-1}(\tau) \bar{x}(\tau) d\tau \quad (35. a)$$

$$y(t) = C(t) P^{-1}(t) \bar{x}(t) \quad (35. b)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \hat{\bar{x}}(t) &= P(t) \Phi(t, t_0) P^{-1}(t_0) \bar{x}_0 \\ &+ P(t) \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) P^{-1}(\tau) u(\tau) d\tau \end{aligned}$$

なる積分方程式系を考え、(33)式の不等式に対し

$$\begin{aligned} |\bar{x}_i(t)| &\leq |\hat{\bar{x}}_i(t)| \\ &+ \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \int_{t_0}^t |\bar{\phi}_{ij}(t, \tau)| \cdot \bar{b}_{jk} \cdot |\bar{x}_k(\tau)| d\tau \\ &\quad, \forall i \in N \end{aligned} \quad (36)$$

ただし

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(t, \tau) &= [\phi_{ij}(t, \tau)] \triangleq P(t) \Phi(t, \tau) P^{-1}(\tau) \\ \bar{b}_{jk} &\geq |\bar{b}_{jk}(t)|, \quad P(t) B(t) P^{-1}(t) = [\bar{b}_{jk}(t)] \end{aligned}$$

から有界性、安定性を定めても不都合は生じない。なんとすれば、さきの補助定理がいえるからである。そして、この(35)式のような積分方程式系でより緩やかな条件が得られるならば、それによって安定性を判定したほうがより有利ということになる。

よって、安定条件（十分条件）はつぎのような定理の形で与えられる。

【定理 1】

マトリクス

$$I - \left[\sup_{\tau \in [t_0, \infty)} \int_{\tau}^{\infty} |\bar{\phi}_{ij}(t, \tau)| d\tau \right] \cdot [\bar{b}_{ij}] \quad (37)$$

の主座小行列式がすべて正となるような有界、正則な変換マトリクス $P(t)$ が存在するならば、公称系(11)式が L_1 安定であるとき、問題としている力学系(8)式も L_1 安定となる。

(証明)

積分不等式(36)式において、時間を限定した L_1 ノルムを考えれば

$$\begin{aligned} \|\bar{x}_i(t)\|_1^T &\leq \|\hat{\bar{x}}_i(t)\|_1^T \\ &+ \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \int_{t_0}^T \|\bar{\phi}_{ij}(t, \tau)\|_1^T \cdot \bar{b}_{jk} \\ &\quad \times \|\bar{x}_k(\tau)\|_1^T d\tau \end{aligned} \quad (38)$$

ベクトル・マトリクスの形で表現するならば

$$\begin{aligned} \|\bar{\bar{x}}_i(t)\|_1^T &\leq \|\hat{\bar{\bar{x}}}_i(t)\|_1^T \\ &+ \int_{t_0}^T \left[\|\bar{\phi}_{ij}(t, \tau)\|_1^T \right] \cdot [\bar{b}_{ij}] \\ &\quad \times \|\bar{\bar{x}}_i(\tau)\|_1^T d\tau \end{aligned} \quad (39)$$

である。これより明らかに不等式

$$\begin{aligned} \left\{ I - \left[\sup_{\tau \in [t_0, \infty)} \int_{\tau}^{\infty} |\bar{\phi}_{ij}(t, \tau)| d\tau \right] \cdot [\bar{b}_{ij}] \right\} \\ \times \|\bar{\bar{x}}_i(t)\|_1^T \leq \|\hat{\bar{\bar{x}}}_i(t)\|_1^T \end{aligned} \quad (40)$$

を得る。ここで、マトリクス $\{\cdot\}$ は非対角成分が正でないマトリクスであるから、その主座小行列式がすべて正であるとき、すべての成分が非負である逆マトリクスをもつ^{9), 10)}。(M-マトリクスにほかならない^{11)~14)}。詳しくは補遺) によって、その条件を満たすとき、不等式

$$\begin{aligned} \|\bar{\bar{x}}_i(t)\|_1^T &\leq \left\{ I - \left[\sup_{\tau \in [t_0, \infty)} \int_{\tau}^{\infty} |\bar{\phi}_{ij}(t, \tau)| d\tau \right] \cdot [\bar{b}_{ij}] \right\}^{-1} \\ &\quad \times \|\hat{\bar{\bar{x}}}_i(t)\|_1^T \end{aligned} \quad (41)$$

を定めることができる。これは限定した時間 T に無関係に成立するから、 $T \rightarrow \infty$ に対してもいえるはずである。すなわち

$$\begin{aligned} \|\bar{\bar{x}}_i(t)\|_1 &\leq \left\{ I - \left[\sup_{\tau \in [t_0, \infty)} \int_{\tau}^{\infty} |\bar{\phi}_{ij}(t, \tau)| d\tau \right] \cdot [\bar{b}_{ij}] \right\}^{-1} \\ &\quad \times \|\hat{\bar{\bar{x}}}_i(t)\|_1 \end{aligned} \quad (42)$$

である。

そこで、 $\|\bar{\bar{x}}_i(t)\|_1 < \infty, \forall i \in N$ に対し、 $\|\bar{\bar{x}}_i(t)\|_1 < \infty, \forall i \in N$ がいえることになる。明らかにこれは、 $\bar{y}_i \in L_1[t_0, \infty), \forall i \in M$ に対し、 $y_i \in L_1[t_0, \infty), \forall i \in M$ を満たす。(証明終)

【定理 2】

マトリクス

$$I - \left[\sup_{t \in [t_0, \infty)} \int_{t_0}^t |\bar{\phi}_{ij}(t, \tau)| d\tau \right] \cdot [\bar{b}_{ij}] \quad (43)$$

の主座小行列式がすべて正となるような有界，正則な変換マトリクス $P(t)$ が存在するならば，公称系(11)式が L_∞ 安定であるとき，有界な不確かさをもった力学系(8)式も L_∞ 安定となる。

(証明)

証明は定理1とまったく同様である。積分不等式(36)式において，時間を限定した L_∞ ノルムを考えれば，

$$\begin{aligned} \|\hat{x}_i(t)\|_\infty^T &\leq \|\hat{x}_i(t)\|_\infty^T \\ &+ \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left\| \int_{t_0}^t |\tilde{\phi}_{ij}(t, \tau)| d\tau \right\|_\infty^T \\ &\times \|\tilde{b}_{jk}\|_\infty^T \|\hat{x}_k(t)\|_\infty^T \end{aligned} \quad (44)$$

ベクトル・マトリクスの形で表現するならば

$$\begin{aligned} [\|\hat{x}_i(t)\|_\infty^T] &\leq [\|\hat{x}_i(t)\|_\infty^T] \\ &+ \left[\left\| \int_{t_0}^t |\tilde{\phi}_{ij}(t, \tau)| d\tau \right\|_\infty^T \right] \cdot [\tilde{b}_{ij}] \\ &\times [\|\hat{x}_i(t)\|_\infty^T] \end{aligned} \quad (45)$$

そして

$$\begin{aligned} \left\{ I - \left[\sup_{t \in [t_0, \infty)} \int_{t_0}^t |\tilde{\phi}_{ij}(t, \tau)| d\tau \right] \cdot [\tilde{b}_{ij}] \right\} \\ \times [\|\hat{x}_i(t)\|_\infty^T] \leq [\|\hat{x}_i(t)\|_\infty^T] \end{aligned} \quad (46)$$

を得る。同じく，マトリクス $\{\cdot\}$ は非対角成分が正でないマトリクスであるから，その主座小行列式がすべて正であるとき，すべての成分が非負である逆マトリクスをもち，結局，

$$\begin{aligned} [\|\hat{x}_i(t)\|_\infty] \\ \leq \left\{ I - \left[\sup_{t \in [t_0, \infty)} \int_{t_0}^t |\tilde{\phi}_{ij}(t, \tau)| d\tau \right] \cdot [\tilde{b}_{ij}] \right\}^{-1} \\ \times [\|\hat{x}_i(t)\|_\infty] \end{aligned} \quad (47)$$

と書くことができる。

よって， $\|\hat{x}_i(t)\|_\infty < \infty$ ， $\forall i \in N$ に対し， $\|\hat{x}_i(t)\|_\infty < \infty$ ， $\forall i \in N$ がいえ，明らかに $y_i \in L_\infty[t_0, \infty)$ ， $\forall i \in M$ に対し $y_i \in L_\infty[t_0, \infty)$ ， $\forall i \in M$ を満すことになる。(証明終)

なお，公称系が線形固定 ($A(t)=A$) で変換マトリクスも固定 ($P(t)=P$)，すなわち遷移マトリクス (の各成分) が

$$\tilde{\phi}_{ij}(t, \tau) = \tilde{\phi}_{ij}(t - \tau), \quad \forall i, j \in N \quad (48)$$

と書ける場合には，これらの二つの定理はまったく等価になる。すなわち，つぎの「系」が得られる。

【系】

マトリクス

$$I - \left[\int_0^\infty |\tilde{\phi}_{ij}(t)| dt \right] \cdot [\tilde{b}_{ij}] \quad (49)$$

の主座小行列式がすべて正となるような有界，正則な定数マトリクス P が存在するならば，線形固定であ

る公称系が $L_1(L_\infty)$ 安定であるとき，問題としている系(8)式も $L_1(L_\infty)$ 安定となる。

(証明)

$$\left[\int_\tau^\infty |\tilde{\phi}_{ij}(t, \tau)| d\tau \right] = \left[\int_\tau^\infty |\tilde{\phi}_{ij}(t - \tau)| d\tau \right] \quad (50)$$

であるから， $t - \tau = \sigma$ とおくことにより定理1において，

$$\left[\sup_{\tau \in [t_0, \infty)} \int_\tau^\infty |\tilde{\phi}_{ij}(t, \tau)| d\tau \right] = \left[\int_0^\infty |\tilde{\phi}_{ij}(\sigma)| d\sigma \right] \quad (51)$$

となる。

一方，

$$\left[\int_{t_0}^t |\tilde{\phi}_{ij}(t - \tau)| d\tau \right] = \left[\int_0^{t-t_0} |\tilde{\phi}_{ij}(\sigma)| d\sigma \right] \quad (52)$$

であるから，定理2において

$$\begin{aligned} \left[\sup_{t \in [t_0, \infty)} \int_{t_0}^t |\tilde{\phi}_{ij}(t, \tau)| d\tau \right] \\ = \left[\sup_{t \in [t_0, \infty)} \int_0^{t-t_0} |\tilde{\phi}_{ij}(\sigma)| d\sigma \right] \\ = \left[\int_0^\infty |\tilde{\phi}_{ij}(\sigma)| d\sigma \right] \end{aligned} \quad (53)$$

となる。(証明終)

なお，遷移マトリクス (の各成分) が(24)式に対して，いま

$$\begin{aligned} |\tilde{\phi}_{ij}(t, t_0)| &\leq \bar{k}_{ij} \exp\{-\bar{\alpha}_{ij}(t - t_0)\}, \quad \bar{\alpha}_{ij} > 0, \\ &\forall i, j \in N \end{aligned} \quad (54)$$

と書けるものとすれば，定理1，定理2，「系」におけるマトリクス(37)，(43)，(49)式はいずれも

$$I - [\bar{k}_{ij}/\bar{\alpha}_{ij}] \cdot [\tilde{b}_{ij}] \quad (55)$$

という形となり，公称系が漸近安定であるとき，問題としている力学系も漸近安定であるための十分条件は，このマトリクス(55)式の主座小行列式がすべて正であることに帰着する。

6. あとがき

有界な不確かさ (あるいは非線形時変特性) をもった線形力学系の相対的な意味での安定性を公称系の遷移マトリクスとの関係において明らかにした。相対安定性といっても，ここでの理論の展開から明らかなように特別なものをいうのではなく，より緩やかな条件 (必要十分条件に近い) を得るための一つの考え方としてこのような形でまとめたのである。ここで得られた安定条件は非線形固定特性をもった系を含めて，入力のある系 (非同次系) において現在明らかにしうる最も有利な条件と信じている。

なお，このような形の安定条件 (十分条件) を定め

ることの意味合いは、力学系の線形モデル化において生ずる有界な不確かさあるいは非線形特性の影響を明らかにし、その基本的性質を定めることにあり、仮りに非線形要素の特性そして入力既知であったにせよ、このような安定問題を明らかにするには無限に近い解軌道の計算が必要であり、ここで示した条件は、それらの解軌道群を分類することによりその計算を縮退する意味をもっている。

おわりに、活発な研究活動において筆者にたえず有意義な刺激を与えて下さる京都大学荒木光彦氏、M マトリクスの性質に関して有益なご指摘をいただいた神戸大学池田雅夫氏に謝意を表す。

補 遺

M-マトリクス (Minkowski 形マトリクス) はつぎのような性質をもつ正方実マトリクス A として定義される^{11)~14)}。

- (i) $A = \rho I - P$
 P : 非負値成分よりなるマトリクス
 ρ : P のすべての固有値の絶対値より大きい正数
- (ii) 対角成分以外すべて正でない。すなわち、 $A = [a_{ij}]$ において $a_{ij} \leq 0$ ($i \neq j$) である一般のマトリクスについては、つぎの等価な条件のいずれかを満たすとき M-マトリクスといえる。
 - 1) $Ax > 0$ となるような $x > 0$ が存在する。
 - 2) A は正則であり、 A^{-1} のすべての成分が非負である。
 - 3) A の主座小行列式がすべて正である。

参 考 文 献

- 1) I. W. Sandberg: A frequency-domain condition for

the stability of systems containing a single time-varying nonlinear element, Bell System Tech. J., **43**, 1601/1638 (1964)

- 2) G. Zames: On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems, Part I, Conditions derived using concepts of loop gain, conicity and positivity, Part II, Conditions involving circles in the frequency plane and sector nonlinearities, IEEE Trans. AC-11, 228/239, 465/476 (1966)
- 3) R. W. Brockett and H. B. Lee: Frequency domain instability criteria for time-varying and nonlinear systems, Proc. IEEE, **55**, 604/619 (1967)
- 4) J. C. Willems: Stability, instability and causality, SIAM J. Control, **7**, 645/671 (1969)
- 5) 奥山: 時変パラメータを含む線形系の L_2 安定について, 計測自動制御学会論文集, **3-4**, 252/259 (1967)
- 6) 奥山: 線形時変系の時間領域における一安定条件, 第 6 回 SICE 学術講演会予稿集, 33/34 (1967)
- 7) 日高, 正司, 藤井: 複数個の非線形要素を含む制御系の入・出力安定について, 第 11 回 SICE 学術講演会予稿集, 655/662 (1972)
- 8) 荒木, 近藤: 複合構造をもつ大規模システムの安定条件, システムと制御, **16**, 728/736 (1972)
- 9) 得丸, 足立, 雨宮: 複合系の入・出力安定について, システムと制御, **17**, 121/125 (1973)
- 10) たとえば, R. Bellman: Stability theory of differential equations (McGraw-Hill, 1953)
- 11) A. Ostrowski: Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale, Comm. Math. Helvetici, **10**, 69/96 (1937)
- 12) A. Ostrowski: Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale und die absolute Konvergenz von linearen Iterationsprozessen, ibid, **30**, 175/210 (1956)
- 13) K. Fan: Note on M-matrices, Quart. J. Math. **11**, 43/49 (1960)
- 14) M. Fiedler and V. Pták: On matrices with non-positive off-diagonal elements and positive principal minors, Czechoslovak Math. J. **12**, 382/400 (1962)