不等式拘束条件を有する線形プロセスの計算機制御†

馬 場 順 昭*

Computer Control of Linear Process with Inequality Constraints

Yoriaki BABA*

This paper is concerned with a practical algorithm for the on-line computer control of a linear process with inequality constraints on the control forces. The control signals are determined so as to force the disturbed state to the desired state as soon as possible. The control concept is essentially based on a time-optimal control for a linear discrete-time system without inequality constraints on the control forces, and on Lyapunov's direct method. The control vector, which is suboptimal in the sense of minimum-time control, can be determined immediately by means of performing the product of the constant matrix and the state vector or by solving the linear optimization problem. Because the procedure of calculation is straightforward and does not require much computer time or excessive computer memory, this algorithm seems to be a powerful tool for a computer control system.

1. ま え が き

制御変数に不等式拘束条件を有する線形プロセスの動的最適化手法に関する研究は、近年盛んに行なわれている。最大原理 (MP) と動的計画法 (DP) はその代表的なものであるが、計算時間と記憶容量の点から実用的でないことは衆知の通りである。計算時間はプロセスの変化の速さより十分速くなければならないし、必要とされる記憶容量は少ないほど実用的である。最近では線形計画法 (LP) や非線形計画法など各種の数値計画法を利用したアルゴリズムが提案されている¹⁾。計算機制御系は離散値系となるので、数値計画法は MP や DP などよりよほど有効である。

L. A. Zadeh²⁾ らは線形離散値系の最短時間問題を線形計画問題に帰着させて解くことができることを示

し、高田³⁾ は実際の数値計算法について示した。この手法はかなり実用的ではあるが、最適なサンプリング数 M を直接求める方法がなく、結局、線形計画問題を繰返し解かねばならない。そのため多入出力系において、大きな M に対しては計算時間と記憶容量が増大する。このように最適制御を得ようとする、必ずしも満足できる手法はないので準最適という考え方がより実際的であろうと思われる。

本論文では計算時間と記憶容量の点から実用性に重点をおいた準最短時間のアルゴリズムについて述べる。まず、拘束をもたない線形離散値系の最短時間問題を解き、かつサンプリング周期の影響を考慮した手法について述べる。続いて、準最適の立場から、リアプノフの直接法を導入し、かつ、これを拡張し任意のサンプリング数までの変数を LP により求める手法を示す。これらは、それぞれ長所短所をもつが、2つの手法を結合することによりそれぞれの欠点を除くことができる。制御信号は最適なものではないが、シミュレーションの結果、応答波形は最適の場合に類似している。

2. 問 題 の 設 定

計算機制御においてつぎの仮定を設ける。

(i) プロセスは定係数線形系とし、その動特性は次式で表わされるものとする。

$$\dot{X} = AX + BU \quad (1)$$

ただし、 X は要素を $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ とする n 次元状態ベクトル、 U は要素を $u_i (i=1, 2, \dots, r)$ とする r 次元制御ベクトル、 A および B はそれぞれ $n \times n$ および $n \times r$ の定数行列とする。

(ii) 制御変数には制限があり、つぎのように正規化して考える。

$$|u_i| \leq 1 \quad (i=1, 2, \dots, r) \quad (2)$$

(iii) 状態変数はすべて観測できるものとする。

(iv) 系の目標状態を n 次元状態空間の原点とする。

† 第 14 回制御理論部会で発表 (昭 48・3)

* 防衛大学校航空工学教室 横須賀市走水 1-10-20

* Dept. of Aeronautical Engineering, The Defense Academy, Yokosuka

(Received May 22, 1973)

(v) 計算機は周期的にプロセス状態を監視し制御変数を計算する(注1)。

以上の仮定の下にプロセス状態をなるべく速く原点に整定させるような制御変数を算出する実用的アルゴリズムについて述べる。

3. アルゴリズム-1

3.1 状態推移方程式

(1) 式の状態推移方程式はつぎのように書ける。

$$\mathbf{X}(k+1) = \Phi(T)\mathbf{X}(k) + H(T)\mathbf{U}(k) \quad (3)$$

ここで、 T はサンプリング周期、 k はサンプリング数、 $\mathbf{X}(k)$ および $\mathbf{U}(k)$ はそれぞれ時間 $t=kT$ における状態ベクトルおよび制御ベクトルであり、それらの要素を $x_i(k) (i=1, 2, \dots, n)$ および $u_i(k) (i=1, 2, \dots, r)$ とする。 $\Phi(T)$ および $H(T)$ はそれぞれ次式で与えられるような $n \times n$ 遷移行列および $n \times r$ 駆動行列であり、これらの要素は T のみの関数である。

$$\Phi(T) = e^{AT}, \quad H(T) = \int_0^T \Phi(T-\tau)Bd\tau$$

また、この離散値系において $\Phi(T)$ は正則、 $H(T)$ の列ベクトルは互いに一次独立であり、許容制御可能⁴⁾であるとする。

3.2 拘束のない線形離散値系の最短時間制御

ここでは、制御変数には拘束がないとする。初期点を $\mathbf{X}(0)$ とすると、 M サンプリング後においては

$$\mathbf{X}(M) = \Phi^M(T)\mathbf{X}(0) + \sum_{i=1}^M \Phi^{M-i}(T)H(T)\mathbf{U}(i-1) \quad (4)$$

となる。いま、 $\mathbf{X}(M) = \mathbf{0}$ ($\mathbf{0}$ は n 次元零ベクトル) とすると、(4) 式の両辺に左から $\Phi^{-M}(T)$ をかけて次式を得る。

$$\sum_{i=1}^M \Phi^{-i}(T)H(T)\mathbf{U}(i-1) = -\mathbf{X}(0) \quad (5)$$

ここで、

$$p_i(T) = \Phi^{-i}(T)H(T) \quad (6)$$

とおけば、 $p_i(T)$ は $n \times r$ 行列となり、(5) 式は

$$\sum_{i=1}^M p_i(T)\mathbf{U}(i-1) = -\mathbf{X}(0) \quad (7)$$

と表わされる。さらに、 $n \times rM$ 行列 $P(T)$ および rM 次元ベクトル $\mathbf{U}^*(T)$ を、

$$P(T) = [p_1(T) : p_2(T) : \dots : p_M(T)] \quad (8)$$

$$\mathbf{U}^*(T) = \begin{bmatrix} \mathbf{U}(0) \\ \mathbf{U}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{U}(M-1) \end{bmatrix} \quad (9)$$

と定義すると、(7) 式はつぎのように書ける。

$$P(T)\mathbf{U}^*(T) = -\mathbf{X}(0) \quad (10)$$

これは周期 T で初期点 $\mathbf{X}(0)$ を原点へ M サンプリングで整定させるための制御列 $\mathbf{U}^*(T)$ を与える式である。一般に、(3) 式で表わされる n 次元線形離散値系が M サンプリングで整定するためには(8) 式で定義される $n \times rM$ 行列 $P(T)$ の階数が n でなければならない⁵⁾。これより、

$$rM \geq n \quad (11)$$

を得る。したがって、最小サンプリング数 m は(12) 式で与えられる。

$$\left. \begin{array}{l} \text{(a) } n \text{ が } r \text{ の整数倍のとき; } m = n/r \\ \text{(b) } n \text{ が } r \text{ の倍整数倍でないとき; } m = [n/r] + 1 \end{array} \right\} \quad (12)$$

ここで、 $[n/r]$ は n/r の整数部を表わす記号とする。(12) 式で定まる m を用いて $M=m$ として、(10) 式から $\mathbf{U}^*(T)$ を求めれば、これが最小サンプリング数で整定させるための最適な制御列である。(a) の場合、 $n=rm$ であるから逆行列 $P^{-1}(T)$ が存在し、制御列は (13-a) 式で与えられる。

$$\mathbf{U}^*(T) = -P^{-1}(T)\mathbf{X}(0) \quad (13-a)$$

(b) の場合、 $n < rm$ であり、(10) 式は無限個の解をもつが、ユークリッド・ノルム $\|\mathbf{U}^*(T)\|$ を最小にするような解は一意的に定まる。これは(b) の場合の最小エネルギー制御列を求めることである。 $n \times rm$ 行列 $P(T)$ の階数が n であるとき、 $P(T)$ の転置行列を $P'(T)$ と表わすと、

$$P^{RM}(T) = P'(T)(P(T)P'(T))^{-1} \quad (14)$$

で定義される $rm \times n$ 行列 $P^{RM}(T)$ が存在し、(10) 式の解の中でユークリッド・ノルムを最小にする $\mathbf{U}^*(T)$ は (13-b) 式で与えられる⁶⁾。

$$\mathbf{U}^*(T) = -P^{RM}(T)\mathbf{X}(0) \quad (13-b)$$

この $P^{RM}(T)$ は $P(T)$ の Minimal Right Inverse と呼ばれる。行列 $P^{-1}(T)$ または $P^{RM}(T)$ を高次の系に対し解析的に求めることは困難であるが、数値的には前もって選んだ周期に対し計算しておくことができ、制御列は (13-a) または (13-b) 式で得られる。ここで、数学的記述を簡単にするため $P^{-1}(T)$ または $P^{RM}(T)$ をともに $K(T)$ で表わすと、初期点 $\mathbf{X}(0)$ を m サンプリングで原点に整定させる制御列 $\mathbf{U}^*(T)$ は次式で与えられる。すなわち、

$$\left. \begin{array}{l} \text{(a) の場合; } K(T) \equiv P^{-1}(T) \\ \text{(b) の場合; } K(T) \equiv P^{RM}(T) \end{array} \right\} \quad (15)$$

において、

$$\mathbf{U}^*(T) = -K(T)\mathbf{X}(0)$$

(注1) この一定周期は Fig. 2 において PED と表わされている。

Fig. 1 The sets of all states that can be forced to the origin in two iteration times by the admissible control

$$T_1=0.5, T_2=1.0, T_3=2.0$$

制御変数に制限がある場合、任意の初期点を常に m サンプルングで原点に整定させることはできない。拘束条件 (2) 式を満足するすべての許容制御を加えることにより、 m サンプルングで原点に整定させ得るようなあらゆる初期点の集合をつぎのように $R(T)$ と定義する。

$$R(T) = \left\{ \begin{aligned} &\mathbf{X}(0): \mathbf{X}(0) = -\sum_{i=1}^m p_i(T) \mathbf{U}(i-1), \\ &|u_j(i-1)| \leq 1 \\ &(j=1, 2, \dots, r; i=1, 2, \dots, m) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$R(T)$ は状態空間の部分集合で有界な閉凸集合であり、 T のみの関数である。Fig. 1 は (17) 式で示される例題の $R(T)$ を種々の周期に対し示したものである。

$$\left. \begin{aligned} &\text{動特性: } \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + u \\ &\text{拘束条件: } |u| \leq 1 \\ &\text{目標値: } (x_1, x_2) = (0, 0) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

この例題からも推察できるように、一般に次式を満足する適当な周期 $T, \tilde{T}$ が存在する。

$$\tilde{T} < T, \text{ かつ } R(\tilde{T}) \subseteq R(T) \quad (18)$$

この傾向は周期の小さいところでみられ、任意の $T, \tilde{T}$ に対し (18) 式が常に成立するわけではない。状態点 $\tilde{\mathbf{X}}(0)$ が $R(\tilde{T})$ に含まれるならつぎの関係は自明である。

$$\tilde{\mathbf{X}}(0) \in R(\tilde{T}) \subseteq R(T) \quad (19)$$

$\tilde{\mathbf{X}}(0)$ を最小サンプルング数 m で原点に整定させるための所要時間は周期 T および $\tilde{T}$ に対しそれぞれ mT および $m\tilde{T}$ である。(18)式より $m\tilde{T} < mT$ なので、

Table 1 The times consumed for returning the states **a, b** and **c** to the origin in two iteration times

states \ T_i	$T_1(=0.5)$	$T_2(=1)$	$T_3(=2)$
a	impossible	impossible	4
b	impossible	2	4
c	1	2	4

この場合 $\tilde{T}$ を選ぶ方が有利である。Table 1 は種々の周期に対し Fig. 1 上の点 **a, b, c** を 2 サンプルングで原点に整定させるための所要時間を示したものである。ここで示されている所要時間はおおのの初期点に対しある特定の周期のみを採用し 2 サンプルングで整定させる場合であるが、制御の途中において適当な方法で周期を変化させると更に短い所要時間が期待される。たとえば、Fig. 1 の点 **a** に関していえば、周期を $T_3 \rightarrow T_2 \rightarrow T_1$ と変化させていくのである。アルゴリズム-1 はこのような周期の影響と、3.2 で述べた行列 $K(T)$ の性質を応用したものである。

3.4 アルゴリズム-1

適当な s 個のサンプルング周期 $T_i (i=1, 2, \dots, s)$ を

$$T_1 < T_2 < \dots < T_s \quad (20)$$

となるように選ぶ。ここで、これらの周期に対し次式が成立する必要はない。

$$R(T_1) \subseteq R(T_2) \subseteq \dots \subseteq R(T_s) \quad (21)$$

(12) 式より最小サンプルング数 m を求め、それぞれの選んだ周期 T_i に対し行列 $K(T_i)$ を計算しておく。現在の系の状態を $\mathbf{X}(0)$ とする。 $\mathbf{X}(0)$ を原点へ整定させるのに採用すべき周期 T_j をつぎのようにして決定する。 T_1 から出発し、 T_s まで逐次周期を増加させながら (15) 式より制御列 $\mathbf{U}^*(T_i) (i=1, 2, \dots, s)$ を求め、制御列のすべての成分が (2) 式を満足するかどうか判定する。もし、前もって選んだ s 個の周期の中で、制御列のすべての成分が (2) 式を満足するようなものが得られない場合、この状態点に対しアルゴリズム-1 の適用は無効であり、後述する手法を用いねばならない。いま、条件を満足する最小の周期を $T_j (1 \leq j \leq s)$ とすると、 $\mathbf{X}(0) \notin R(T_i) (i=1, 2, \dots, j-1)$ 、 $\mathbf{X}(0) \in R(T_j)$ である。したがって、この T_j が最良の周期であり、系に加えるべき信号は $\mathbf{U}^*(T_j)$ である。 $j=1$ なら周期が最小なので更新する必要はないが、 $2 \leq j \leq s$ の場合制御の途中で周期を変えることにより更に良好な制御が期待できる。現在の状態を原点へ整定させるまでの所要時間を t_f で表わすと、制御を始める時点においては $t=0$ 、 $t_f = mT_j$ である。

$U^*(T_j)$ を系に加えると同時に、時々刻々変化するプロセス状態に対し、常時 $U^*(T_{j-1})$ を計算し、 $U^*(T_{j-1})$ のすべての成分が (2) 式を満足するかどうか判定する。ある時刻 t において $U^*(T_{j-1})$ のすべての成分が (2) 式を満足するものとすれば、この時点において次式が成立する。

$$t_f = mT_j - t \quad (22)$$

他方、この時点において周期を T_{j-1} に更新したとき、整定するまでの所要時間は mT_{j-1} である。

したがって、

$$mT_j - t > mT_{j-1} \quad (23)$$

なる関係が成立するとき、周期を T_{j-1} へ更新し、系に加える信号を $U^*(T_{j-1})$ とした方が有利である。ここで改めて、 $T_{j-1} \rightarrow T_j$ 、 $X(t) \rightarrow X(0)$ とする。また、 T_{j-1} について上述した関係が得られないうち、 $U^*(T_{j-2})$ のすべての要素が (2) 式を満足するようになった場合、 T_{j-2} について同様な操作を行なう。他の周期に関しても同様である。以上の操作を繰返すと、制御の途中で外乱がなければ多くとも mT_j 時間後に系は整定し、途中で外乱があった場合、多くとも mT_j 時間後には正しい制御信号が得られる。

4. アルゴリズム-2

4.1 リアプノフの直接法と可到達点集合

いま、最短時間という立場から離れ、評価関数を次式のように与えたとリアプノフの直接法⁷⁾ を利用できる。

$$V(X) = X' Q X \quad (24)$$

ここで、 Q はすべての対角要素 $q_{ii} (i=1, 2, \dots, n)$ が正であるような $n \times n$ 対角行列とし、 q_{ii} を重み係数、 Q を重み係数行列と呼ぶ。離散値系におけるリアプノフの直接法によると、(24) 式の一階差分を最小にする制御法則は時間に依存しない線形法則となることは衆知の通りである。実際、制御量には制限があるので飽和要素を通してから系に加える必要がある。系が安定であれば、この制御信号は有効である。しかし、このように 1 サンプル後をみるより最短時間という意味からもっと多くのサンプリング後を考えた方が有利な場合が多い。以下で、任意のサンプリング後までの信号を得る方法を考える。本文では便宜上、 m サンプル後を考える。

(3) 式で表わされる離散値系において、サンプリング周期を T_i 、サンプリング数を m 、初期点を $X(0)$ とし $U(i-1) (i=1, 2, \dots, m)$ を許容制御とした時の状態 $X(m)$ の可到達点集合^{8), 9)} を $W(mT_i)$ で表わす。

$$W(mT_i) = \left\{ X(m) : \begin{aligned} & X(m) = \Phi^m(T_i) X(0) \\ & + \sum_{i=1}^m \Phi^{m-i}(T_i) H(T_i) U(i-1), \\ & |u_j(i-1)| \leq 1 \\ & (j=1, 2, \dots, r; i=1, 2, \dots, m) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$W(mT_i)$ は状態空間の部分集合で有界な閉集合である。 $X(0)$ を固定して考えると、 $W(mT_i)$ は T_i のみの関数である。また、状態 $X(k)$ により定まるつぎのような集合を考える。

$$\Gamma(X(k)) = \{X : X' Q X \leq V(X(k))\} \quad (26)$$

$\Gamma(X(k))$ も状態空間の部分集合で原点を含む有界な閉集合である。 $\Gamma(X(k))$ の境界を $\partial\Gamma(X(k))$ で表わす。系は許容制御可能なので 2 つの集合 $W(mT_i)$ と $\Gamma(X(0))$ の共通集合は空ではない。この共通集合を Ψ とする。すなわち、

$$\Psi = W(mT_i) \cap \Gamma(X(0)) \quad (\neq \emptyset) \quad (27)$$

$W(mT_i)$ と $\Gamma(X(0))$ の性質から、 Ψ は状態空間の部分集合で有界な閉集合となる。 m サンプル後における状態 $X(m)$ が次式を満足するような制御信号を系に加える。

$$X(m) \in \Psi \quad \text{かつ} \quad X(m) \in \partial\Gamma(X(0)) \quad (28)$$

すると次式は自明である。

$$V(X(m)) < V(X(0)) \quad (29)$$

$t=0$ と $t=mT_i$ における評価関数の値の差 ΔV は、

$$\Delta V = V(X(m)) - V(X(0)) \quad (30)$$

となり、(29) 式より、

$$\Delta V < 0 \quad (31)$$

を得る。続いて、現在の状態値 $X(m)$ を新しく初期値 $X(0)$ とし、上述した操作を行なうと同様にして ΔV は負となる。この操作を限りなく繰返すことにより系は整定する。

ここで、(32) 式で与えられる一次式を考える。

$$F = \sum_{i=1}^n q_{ii} \cdot |x_i(0)| \cdot |x_i(m)| \quad (32)$$

mT_i が系の最小の周期に比較しかなり小さい場合、(24) 式の代わりに (32) 式を評価関数と考えることが可能であり、(32) 式を最小にするような制御信号を系に加えると状態 $X(m)$ は (28) 式を満足すると考えられる。すなわち、系は整定する。このように、最小にすべき評価関数を (32) 式とすれば、これは線形であるから最適化の方法として線形計画法を用いることができる。

4.2 線形計画法による制御信号の決定

にもかかわらず本質的には 2 次形式の評価のため原点の近くの収束性が悪い。そこでこれらの欠点を除き長所のみを生かすため 2 つの手法を結合し、アルゴリズム-3 とする。これが実時間閉ループ計算機制御系のアルゴリズムとなる。アルゴリズム-3 のフローチャートを Fig. 2 に示す(注2)。

6. 例 題

6.1 2 次系 (最大原理との比較)

アルゴリズム-3 を (17) 式で示される 2 次系へ適用し、MP による結果と比較する。初期点を (7, 6) とする。サンプリング周期はアルゴリズム-1 に対し、 $T_1=0.125$, $T_2=0.25$, $T_3=0.5$, $T_4=1$, $T_5=2$ を、アルゴリズム-2 に対しては $T_i=0.1$ を選んだ。重み係数は $q_{11}=1$, $q_{22}=1$ とした。本手法および MP によるシミュレーションの結果を Fig. 3 に示す。所要時間は MP に対しては約 14.8 秒、アルゴリズム-3 に対しては約 15.1 秒であった(注3)。

6.2 3 次系 (最短時間サンプル値制御との比較)

Fig. 3 Results of digital computer simulations, comparing the suboptimal control by the present method with the optimal one by the maximum principle

(注2) フローチャート中の記号は本文中の記号に対応している。

(注3) 使用計算機は TOSBAC-3400 (モデル 20-A) で、全体の所要記憶容量は 1,850 語で、1 段階の制御変数算出時間はアルゴリズム-1 に対し約 0.7 ms, アルゴリズム-2 に対し最大約 20 ms であった。

つぎの例題を考え、本手法と最短時間サンプル値制御との比較を行なう。

動特性: $\dot{x}_1=x_2$, $\dot{x}_2=x_3$, $\dot{x}_3=-x_2-0.6x_3+u$

拘束条件: $|u| \leq 1$

目標値: $(x_1, x_2, x_3)=(0, 0, 0)$

初期値: $(x_1, x_2, x_3)=(10, 10, -8)$

前述したように、最短時間サンプル値制御は線形計画法を利用して得ることができる³⁾。ここでは、周期を 1 秒として求めた。一方、本手法においてはサンプリング周期および重み係数をつぎのように選んだ。

アルゴリズム-1: $T_1=0.1$, $T_2=0.5$, $T_3=1$

アルゴリズム-2: $T_i=0.1$; $q_{11}=70$, $q_{22}=1$, $q_{33}=1$
両手法の結果を Fig. 4 に示す。所要時間は最短時間サンプル値制御の場合 11.0 秒であり、本手法に対しては約 12.4 秒であった(注4)。

Fig. 4 Results of digital computer simulations, comparing the suboptimal control by the present method with the optimal discrete one by the linear programming

(注4) 使用計算機は例 6.1 と同じで、全体の所要記憶容量は 2,200 語で、1 段階の制御変数算出時間はアルゴリズム-1 に対し約 1.2 ms, アルゴリズム-2 に対し最大約 65 ms であった。

7. 結 び

制御変数に不等式拘束条件を有する線形プロセスの計算機制御のアルゴリズムについて述べた。アルゴリズム-1 において、本文ではサンプリング数を固定し、サンプリング周期の影響を考慮した。しかし、計算時間と記憶容量に余裕があるなら、当然サンプリング数は固定して考える必要はない。(16)式で表わされるような初期点の集合 $R(T)$ を $R^m(T)$ と書けば、 $R^m(T) \subseteq R^{m+1}(T) \subseteq R^{m+2}(T) \dots$ なる関係が成立する⁴⁾。そこで、与えられた初期点に対して求めた制御信号が許容制御となるまでサンプリング数を増加させるような手法も考えられる。また、アルゴリズム-2 において、時間と容量に余裕がある場合、サンプリング数を整定するまで逐次増加させれば、高田⁹⁾ が示す手法と同様離散値系の最適解を与える。逆の場合、飽和要素をもつ線形制御法則を利用すればよい。本文では計算時間遅れを考慮しなかったが、それが重要となる場合は当然考慮すべきである。

計算時間・記憶容量の点から実用性に重点をおいたアルゴリズム-3 は下記の特徴をもつ。

(1) 行列積を行なうかまたは線形計画問題を一回解くだけで必ず適当な制御信号が得られるので、多くの計算時間を必要としない。

(2) 高次の系でも取扱いが容易であり、プログラムも簡単である。

(3) 磁気ドラムやディスク等の外部記憶装置を利用すれば、かなり大きな系も小型計算機で制御できる。

(4) 制御の途中で外乱があっても、多くとも mT_p 後 (T_p は現在のサンプリング周期) には適当な制御信号が得られる。

最後に、本研究に対し終始懇切な御指導を賜りました防衛大学校高尾吉郎教授、御親切な助言を賜りました同校岡田剛教授に衷心より感謝申し上げます。

参 考 文 献

- 1) 田村康男・成田誠之助：数理計画法と制御系，計測と制御，8-10，679/694 (1969)
- 2) L. A. Zadeh and B. H. Wahlen: On Optimal Control and Linear Programming, IRE Trans. PGAC, Vol. AC-7, July, 45/46 (1962)
- 3) 高田 勝：飽和のある線形プロセスの最短時間サンプル値制御，制御工学，9-12，669/676 (1965)
- 4) J. Wing and C. A. Desoer: The Multiple-Input Minimal Time Regulator Problem (General Theory), IEEE Trans. on A. C., Vol. AC-8, April, 125/136 (1963)
- 5) Julius T. Tou (中村嘉平他訳)：現代制御理論，134/226，コロナ社 (1967)
- 6) J. A. Cadzow and H. R. Martens: Discrete-Time and Computer Control Systems, 274/297, Prentice-Hall, Inc., (1970)
- 7) D. P. Lindorff: Theory of Sampled-Data Control Systems, 224, John Wiley & Sons, Inc., New York・London・Sydney (1965)
- 8) 市川邦彦：システム理論と最適制御，150，朝倉書店 (1970)
- 9) H. Halkin: Advances in Control Systems, 179, Academic Press, New York (1964)
- 10) 坂和愛幸：線形計画法による最適制御の近似解，制御工学，8-10，510/516 (1964)
- 11) 高田 勝：DDC のアルゴリズム，情報処理学会システム制御シンポジウム報告集，59/77 (1971)