高次離散値保持要素†

金 台 然*・野 瀬 俊 郎**

Higher-Order Discrete-Data Holders

Tai Kyu KIM* and Toshiro Nose**

A holder which converts the discrete input signal into continuous form by interpolation or extrapolation of the input pulse train is used frequently as an accessory of a digital computer. And this so called zero-order holder is commonly used.

The purpose of this paper is to find a systematic procedure for obtaining the transfer function of higher-order holders from Lagrange's interpolation formula connected with directly sampled values and to show the characteristics of the systems thus found.

A general method is made for the technique of realizing the higher-order holders. The N th-order holders thus obtained are composed of a zeroorder holder, N integrators and several potentiometers. The frequency response and the error characteristic of the higher-order holder are given.

The instantaneous error and the mean squared error of each holder to the sinusoidal input have been measured by using higher-order holders constructed on a hybrid computer. Then the maximum instantaneous errors of the holders to the sinusoidal input are estimated theoretically and experimentally. The experimental results show that the instantaneous errors and signal to noise ratios are improved remarkably by increasing the order of the holders.

1. ま え が き

連続系に計算機が含まれているとき、計算機出力は離散値保持要素によって連続信号に変換される。この

ような離散値保持要素のうちで頻繁に使用されているのは現在値のみをつぎの標本値を得るまで一定値に保持するいわゆる0次保持要素である。0次保持要素はサンプラと線形演算増幅器によって簡単に構成できるが、動作原理上この要素では比較的大きな誤差が生ずる。このため現在値および1つ手前の標本値を使用してつぎの標本値を得るまでの連続波形を得るいわゆる1次保持要素またはその変形がある^{1), 2), 3)}。離散値保持要素としては以上の0次および1次保持要素がよく知られている。

一方、より高精度の離散値保持要素を得るために過去の任意個数の標本値を使用して必要な連続信号を実現する優れた方法が示されているが⁴⁾、この手法には系の決定手順の中に試行錯誤による部分もある。

そこでここでは1個の0次保持要素、 n 個の積分器および係数器を使用して n 次離散保持要素を系統的に構成する方法およびこれらの要素の周波数特性、誤差特性を示した。最近では集積回路などを使用した小形高性能の0次保持要素および線形演算増幅器が製作されているので、ここで示された高次保持要素の実現はきわめて容易であろう。

2. 系 の 誘 導

離散値を表わすパルス信号の幅は標本間隔 T に比べてきわめて小さいものとする、時間 t に対する連続信号 $e(t)$ の標本点 nT (n は整数) における標本値列 $e(nT)$ が与えられているとき、 T がナイキストの標本化間隔を満足しておれば、理想フィルタを使用すると $e(nT)$ に対応する $e(t)$ を得ることができる。しかし理想フィルタは実現不可能であるから実際には離散値保持要素によって $e(nT)$ より $e(t)$ の近似波形を求めることになる。いま標本値を直接使用するLagrangeの補間公式に後退階差を適用すると^{4), 5), 6)}、標本間隔 T を一定とし、標本点 $t=nT$, $(n-1)T$, $\dots$, $(n-k+1)T$ における k 個の標本値より得られる $t=nT+\tau$ ($0 \leq \tau < T$) における連続信号 $e(t)$ の近似多

† 第 15 回自動制御連合講演会で発表 (昭和 47・11)

* 青山学院大学理工学部 東京都世田谷区千歳台 6-16-1

** (株)日立製作所 コンピュータ事業部 東京都品川区南大井 6-23-15

* College of Science and Engineering, Aoyama Gakuin University, Setagaya-ku, Tokyo

** Computer Group, Hitachi, Ltd., Shinagawa-ku, Tokyo

(Received July 30, 1973)

項式 $c_n(t)$ はつぎのように書ける.

$$c_n(t) = e(nT) + \frac{\tau}{T} \{e(nT) - e[(n-1)T]\} + \dots \\ + \frac{\tau(\tau+1)\dots[\tau+(k-1)T]}{k! T^k} \\ \times \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} e[(n-j)T] \quad (1)$$

これはつぎのように整理することができる.

$$c_n(t) = \sum_{j=0}^k e[(n-j)T] \\ \times \sum_{l=j}^k \frac{(-1)^l}{j!(l-j)!} \prod_{i=1}^{l-1} \left(\frac{\tau}{T} + i \right) \quad (2)$$

ただし

$$\prod_{i=1}^{l-1} \left(\frac{\tau}{T} + i \right) = 1$$

この $c_n(t)$ は区間 $nT \leq t < (n+1)T$ のみのもので、この区間以外では零である。ここで(2)式をラプラス変換すると、同式はつぎのように表示できる.

$$c_n(S) = \sum_{j=0}^k e[(n-j)T] e^{-nTS} \\ \times \sum_{l=j}^k \frac{(-1)^l}{j!(l-j)! T^l} \\ \times \{\mathcal{L}[g_l(t)] - \mathcal{L}[g_l(t)u(t-T)]\} \quad (3)$$

ただし

$$g_l(t) = t(t+T)\dots\{t+(l-1)T\}, l > 1, t \geq 0$$

$$g_0(t) = 1$$

$$u(t-T): t-T \geq 0 \text{ の単位階段関数}$$

$$e: \text{自然対数の底}$$

(3)式は区間 $nT \leq t < (n+1)T$ における保持要素出力の複素表示であるから、任意時刻 $t(0 \leq t < \infty)$ での保持要素出力 $y(t)$ は $c_n(t)$ の n についての総和であることより、 $y(t)$ の複素表示 $y(s)$ は(3)式を使用しつぎのように書ける.

$$y(S) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(S) \quad (4)$$

いま(3)および(4)式に保持要素の次数 k を実際に代入すると(4)式はつぎようになる.

$$k=0, y(S) = \left[\frac{1-e^{-TS}}{S} \right] \sum_{m=0}^{\infty} e(mT) e^{-mTS} \quad (5)$$

$$k=1, y(S) = \left[(1-e^{-TS})^2 \left(\frac{1}{S} + \frac{1}{TS^2} \right) \right] \\ \times \sum_{m=0}^{\infty} e(mT) e^{-mTS} \quad (6)$$

$$k=2, y(S) = \left[(1-e^{-TS})^3 \left(\frac{1}{S} + \frac{3}{2TS^2} + \frac{1}{T^2S^3} \right) \right] \\ \times \sum_{m=0}^{\infty} e(mT) e^{-mTS} \quad (7)$$

$$k=3, y(S) = \left[(1-e^{-TS})^4 \left(\frac{1}{S} + \frac{11}{6TS^2} + \frac{2}{T^2S^3} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{T^3S^4} + \frac{1}{T^3S^4} \right) \right] \sum_{m=0}^{\infty} e(mT) e^{-mTS} \quad (8)$$

以上のような計算を順次実施すれば k 次保持要素にたいして(4)式はつぎのように整理できる.

$$y(S) = \left[(1-e^{-TS})^{k+1} \left(\frac{\alpha_k}{S^{k+1}} + \frac{\alpha_{k-1}}{S^k} + \dots + \frac{\alpha_0}{S} \right) \right] \\ \times \sum_{m=0}^{\infty} e(mT) e^{-mTS} \quad (9)$$

(9)式において $\alpha_p(p=0, 1, 2, \dots, k)$ は、たとえば(4)~(8)式のように、保持要素の次数 k によって決まる定数である.

さて(4)~(9)式において左辺 $y(S)$ は保持要素の出力であり、右辺の

$$\sum_{m=0}^{\infty} e(mT) e^{-mTS}$$

は連続信号 $e(t)$ を標本間隔 T で標本化した標本値列である。したがって(4)~(9)式右辺の $[\]$ の中は k 次保持要素の伝達関数である.

なお Lagrange の補間公式による従来の方法⁴⁾では適当な時間遅れ(delay)を選び(9)式中の $\alpha_p(p=0, 1, 2, \dots, k)$ に対応する係数を決定している。この場合、時間遅れの選定の仕方によって同じ次数の保持要素において要素の伝達関数に変化する。しかし、標本化された元の連続信号の性質がどのようであれ(実際には元信号に含まれる周波数成分等を考慮した標本間隔で標本化されるのであるが)、信号の補間または補外は適当な標本間隔をもつ標本値によってなされるのであるから、使用する現在値、過去の標本値の数(保持要素の次数)と補間または補外方法とが決められ、標本区間における元連続信号の近似曲線である補間または補外曲線は一義的に定まる⁵⁾。すなわち、標本値は標本間隔 T によって観測される値であるから、一定次数の保持要素を構成するとき独立の可変パラメータは T のみである。したがって保持要素の次数が決まれば保持要素伝達関数の可変量は T のみとなるわけで、(4)~(9)式中の伝達関数はこのことを表わしている.

つぎに(9)式で得られる k 次保持要素の伝達関数を $H_k(S)$ とすると

$$H_k(S) = (1-e^{-TS})^k \left(\frac{1-e^{-TS}}{S} \right) S F_k(S) \quad (10)$$

$$\text{ただし } F_k(S) = \frac{\alpha_k}{S^{k+1}} + \frac{\alpha_{k-1}}{S^k} + \dots + \frac{\alpha_0}{S}$$

なかの $(1-\varepsilon^{-TS})^k$ はつぎのように展開できる。

$$(1-\varepsilon^{-TS})^k = \mu_0 + \mu_1 \varepsilon^{-TS} + \dots + \mu_k \varepsilon^{-kTS} \quad (11)$$

ただし $\mu_i = \binom{k}{i}$, $i=0, 1, 2, \dots, k$

(11)式を用いて(10)式をブロック線図で表わすと Fig. 1 (a) のようになる。ここで積分演算器を開回路で使用せず、さらにむだ時間要素を使用しないために Fig. 1 (a) と等価な Fig. 1 (b) を構成する。Fig. 1 (b) 中の係数 β_i ($i=1, 2, \dots, k$) は Fig. 1 (a) および (b) よりつくられる連立方程式を解けば求まる⁴⁾。たとえば $k=1 \sim 3$ について Fig. 1 (b) 中の β_i を実際に求めると $\beta_i = -\alpha_i$ となる。なおこのとき $\alpha_0=1$ である。これらの $\beta_i = -\alpha_i$ を Fig. 1 (b) に代入し $k=1 \sim 3$ の保持要素を構成したものが Fig. 2 である。

3. 周波数応答

保持要素伝達関数 $H_k(S)$ のうち $k=0 \sim 3$ についての周波数応答をベクトル軌跡で表わすことにする。なおベクトル軌跡は $\Omega = T\omega$ に関して示され、軌跡を描くに当って Ω を 0.1 間隔で計算機によって数値計算した。さらに保持要素の次数による特性の比較のために 0 次保持要素も含まれている。

3.1 0 次保持要素

0 次保持要素の伝達関数

$$H_0(S) = \frac{1-\varepsilon^{-TS}}{S} \quad (12)$$

に $S=j\omega$ を代入し $T\omega=\Omega$ に関して表示する。

$$H_0(j\Omega) = T \cdot \frac{1-\varepsilon^{j\Omega}}{j\Omega} \quad (13)$$

これの実数部 $\text{Re}(\Omega)$ および虚数部 $\text{Im}(\Omega)$ をそれぞれ Ω に関して計算し、その結果を図示したものが Fig. 3 である。なおつぎの関係がある。

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} H_0(j\Omega) = T \quad (14)$$

3.2 1 次保持要素

1 次保持要素の伝達関数 $H_1(S)$ は(6)式より

Fig. 1 Higher-order holder

Fig. 2 Practical forms of higher-order holder

$$H_1(S) = (1-\varepsilon^{-TS})^2 \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{TS^2} \right) \quad (15)$$

である。これに $S=j\omega$ を代入し $T\omega=\Omega$ について表示するとつぎのようである。

Fig. 3 Vector-locus of zero-order holder

Fig. 5 Vector-locus of second-order holder

Fig. 4 Vector-locus of first-order holder

$$H_1(jQ) = T(1 - \varepsilon jQ) \left(\frac{1}{jQ} + \frac{1}{(jQ)^2} \right) \quad (16)$$

上式について3.1章と同様な計算をすることによって Fig. 4 が得られる。なおこのときつぎの関係

$$\lim_{Q \rightarrow 0} H_1(jQ) = T \quad (17)$$

が利用されている。

3.3 2次保持要素

2次保持要素の伝達関数 $H_2(S)$ は(7)式より

$$H_2(S) = (1 - \varepsilon^{-TS})^3 \left(\frac{1}{S} + \frac{3}{2TS^2} + \frac{1}{T^2S^3} \right) \quad (18)$$

である。これに $S = j\omega$ を代入し $T\omega = Q$ について表示するとつぎのようである。

$$H_2(jQ) = T(1 - \varepsilon^{-jQ})^3 \left(\frac{1}{jQ} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(jQ)^2} + \frac{1}{(jQ)^3} \right) \quad (19)$$

(19)式について3.1章と同様な処理をすれば Fig. 5 が得られ、ここでつぎの関係も利用されている。

$$\lim_{Q \rightarrow 0} H_2(jQ) = T \quad (20)$$

3.4 3次保持要素

3次保持要素の伝達関数 $H_3(S)$ は(8)式より

$$H_3(S) = (1 - \varepsilon^{-TS})^4 \left(\frac{1}{S} + \frac{11}{6TS^2} + \frac{2}{T^2S^3} + \frac{1}{T^3S^4} \right) \quad (21)$$

Fig. 6 Vector-locus of third-order holder

である。Fig. 6 は (21) 式に3.1章と同様な操作を施して得られたものである。なおつぎの関係がある。

$$\lim_{Q \rightarrow 0} H_3(jQ) = T \quad (22)$$

Fig. 3~6 において示されたように $Q = T\omega$ の値が1付近より小さい場合には、保持要素の次数が大きくなるにつれて周波数応答の位相が進み、このことは保持要素の次数による予測効果の推移を表わしている。一方、 Q の値が大きくなると保持要素の次数が増すにつれて位相遅れは著しくなる。

4. 正弦波入力に対する誤差

Fig. 2 において入力信号を正弦波信号としたときの瞬時誤差および S/N について述べる。なお参照のために0次保持要素に関しても併記する。

4.1 最大瞬時誤差

一般波形の連続信号を標準化した標本値列を任意次数の保持要素によって連続信号に復元するとき、誤差の定量的な表示は複雑になるので、このことは別の機

会に報告することにして、ここでは連続信号は正弦波とする。すなわち、任意連続信号を標本化し、それを復元したときの誤差は、連続信号に含まれる各周波数成分の標本回数に影響されると思われる。それで正弦波の標本回数と誤差との関係について検討しておけば任意信号の場合の誤差の目安とすることができるであろう。このような理由から連続信号 $e(t)$ はつぎの

$$e(t) = E \sin \omega t \quad (23)$$

とする。これを一定標本間隔 T で標本化したときの標本値列 $e(nT) = E \sin(n\omega T)$ による k 次保持要素出力 $y_k(\tau)$ の誤差 $\varepsilon_k(\tau)$ はつぎのようにかける。

$$\begin{aligned} \varepsilon_k(\tau) &= e(nT + \tau) - y_k(\tau) \\ &= E \sin \omega(nT + \tau) - y_k(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq T \end{aligned} \quad (24)$$

ここで $T(\tau)$ は τ が左方より T に接近することを示す。 $\varepsilon_k(\tau)$ の最大値は (24) 式によって評価できるが、このときには保持要素の次数 k により、 τ に関する k 次の式を処理することになる。この処理は k の値が大きくなると煩雑である。一方、復元信号の精度を考慮すると実際の信号の標本化周期は連続信号に含まれる最大周波数成分の周期に比べて十分に小さくすることが多いと思われる。このような場合の (24) 式の最大値 $|\varepsilon_k(\tau)_{\max}|$ を簡単に評価する方法についてここでは述べることにしよう。

4.1.1 0 次保持要素

0 次保持要素の出力 $y_0(\tau)$ は (12) 式より

$$y_0(\tau) = e(nT), \quad 0 \leq \tau \leq T \quad (25)$$

となり、この $y_0(\tau)$ は $0 \leq \tau \leq T$ で一定 (勾配は 0) である。 $k=0$ として (25) 式を (24) 式に代入した $\varepsilon_0(\tau)$ において $\varepsilon_0(0)=0$ である。ここで標本間隔 T は (23) 式の周期に比べて十分に小さいとすると、標本点 nT と $(n+1)T$ との間では同式の $e(t)$ はほぼ直線とみなすことができるであろう。このようであると、 $y_0(\tau)$ は一定であるから、 $e(t)$ の勾配の大きさが最大になる時刻近傍 (T の値によって $e(t)$ の勾配の大きさが最大になる正確な点で標本化されないこともある) で標本化したとき、つぎの標本点における誤差を $|\varepsilon_0(\tau)_{\max}|$ の近似値と考えてよいはずである ($\because \varepsilon_0(0)=0$)。

$e(t)$ の勾配の大きさが最大になるのは $e(t)$ の 1 次微係数を用いて $|de(t)/dt| = |E\omega \cos \omega t|$ より、 $\omega t = 2m\pi$, ($m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) のときである。これらの点に関しては $y_0(\tau)=0$ である。よって $n\omega T = 2m\pi$, $\tau=T$, $k=0$ および $y_0(\tau)=0$ を (24) 式に代入すればつぎの結果が得られる。

$$|\varepsilon_0(\tau)_{\max}| \simeq |E \sin \omega T| \quad (26)$$

4.1.2 1 次保持要素

1 次保持要素の出力 $y_1(\tau)$ は (15) 式より

$$\begin{aligned} y_1(\tau) &= e(nT) + \frac{\tau}{T} [e(nT) - e\{(n-1)T\}] \\ 0 \leq \tau \leq T \end{aligned} \quad (27)$$

である。この $y_1(\tau)$ は $0 \leq \tau \leq T$ において $e(nT)$ を通り、勾配が $[e(nT) - e\{(n-1)T\}]/T$ の直線 (勾配の変化率は 0) である。 $k=1$ として (27) 式を (24) 式に代入した $\varepsilon_1(\tau)$ において $\varepsilon_1(0)=0$ である。 T は $e(t)$ の周期に比べて十分に小さいとすると、 $0 \leq \tau \leq T$ において $e(nT + \tau)$ は $e(nT)$ と $e\{(n+1)T\}$ とを通るほぼ直線と考えてよいであろう。このようであると、 $e(t)$ の勾配と $y_1(\tau)$ の勾配との差が最大になるような標本点すなわち $e(t)$ の勾配の変化率の大きさが最大になる点近傍で標本化したとき、つぎの標本点における誤差が $|\varepsilon_1(\tau)_{\max}|$ の近似値とみなすことができるはずである。 $e(t)$ の勾配の変化率の大きさが最大になるのは、 $e(t)$ の 2 次微係数を用いて $|d^2e(t)/dt^2| = |-E\omega^2 \sin \omega t|$ より、 $\omega t = 2m\pi + (\pi/2)$ のときである。よって $n\omega T = 2m\pi + (\pi/2)$ を (27) 式に代入し、その結果を (24) 式に適用し、 $k=1$, $\tau=T$ として整理すればつぎの関係が得られる。

$$|\varepsilon_1(\tau)_{\max}| \simeq |2E(1 - \cos \omega T)| \quad (28)$$

4.1.3 2 次保持要素

2 次保持要素の出力 $y_2(\tau)$ は (18) 式より

$$\begin{aligned} y_2(\tau) &= e(nT) + \frac{\tau}{2T} [3e(nT) - 4e\{(n-1)T\} \\ &\quad + e\{(n-2)T\}] + \frac{\tau^2}{2T^2} [e(nT) \\ &\quad - 2e\{(n-1)T\} + e\{(n-2)T\}], \\ 0 \leq \tau \leq T \end{aligned} \quad (29)$$

となる。これは $0 \leq \tau \leq T$ において $e(nT)$ を通る τ に関する 2 次曲線である。 $k=2$ として (29) 式を (24) 式に代入した $\varepsilon_2(\tau)$ において $\varepsilon_2(0)=0$ である。0 次および 1 次保持要素の最大瞬時誤差の近似値を得た場合と同様にすると、 $|\varepsilon_2(\tau)_{\max}|$ は $e(t)$ の 3 次微係数の絶対値が最大になる点付近で生ずることになる。(23) 式の 3 次微係数の大きさが最大になる点を求め 4.1.1 または 4.1.2 と同様の操作をすればつぎの結果が得られる。

$$|\varepsilon_2(\tau)_{\max}| \simeq |E(\sin 2\omega T - 2\sin \omega T)| \quad (30)$$

4.1.4 3 次保持要素

3 次保持要素の出力 $y_3(\tau)$ は (21) 式より

$$\begin{aligned} y_3(\tau) &= e(nT) + \frac{\tau}{T} \left[\frac{11}{6} e(nT) - 3e\{(n-1)T\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} e\{(n-2)T\} - \frac{1}{3} e\{(n-3)T\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\tau^3}{2T^2} [2e(nT) - 5e\{(n-1)T\} \\
& + 4e\{(n-2)T\} - e\{(n-3)T\}] \\
& + \frac{\tau^3}{6T^3} [e(nT) - 3e\{(n-1)T\} \\
& + 3e\{(n-2)T\} - e\{(n-3)T\}], \\
& 0 \leq \tau \leq T \quad (31)
\end{aligned}$$

となる。これは $0 \leq \tau \leq T$ において $e(nT)$ を通る τ に関する 3 次曲線である。 $k=3$ として (31) 式を (24) 式に代入した $\varepsilon_3(\tau)$ において $\varepsilon_3(0)=0$ である。前記と同様にすると $|\varepsilon_3(\tau)_{\max}|$ は $e(t)$ の 4 次微係数の大きさが最大になる点付近で生ずることになる。(23) 式の 4 次微係数の絶対値が最大になる点を求め 4.1.1 または 4.1.2 と同様の処理をすればつぎの関係を得ることができる。

$$\begin{aligned}
|\varepsilon_3(\tau)_{\max}| \approx & |E(7 \cos \omega T - 4 \cos 2\omega T \\
& + 3 \cos 3\omega T - 4)| \quad (32)
\end{aligned}$$

Fig. 7 は (26), (28), (30) および (32) 式を使用して各保持要素の $|\varepsilon_k(\tau)_{\max}|$ を正弦波 1 周期当りの標本点の個数 T_i/T ($T_i=2\pi/\omega$ は入力正弦波の周期, T は標本周期) に関して計算機によって求め, その結果を図示したものである。なおこのとき (23) 式の $E=1$ に基準化してあり, さらに数値計算に際しての T_i/T の間隔は 0.5 である。ここで従来方法⁴⁾ の例題として示されている 3 次保持要素について, 前記と同様の計算によって T_i/T に対する $|\varepsilon_k(\tau)_{\max}|$ を求めるとつぎ

Fig. 7 Variations of maximum instantaneous error $|\varepsilon_k(\tau)_{\max}|$
 T_i : Period of sinusoidal input
 T : Sampling period
 k : Order of holder

のようである。 T_i/T の値が 10, 30 および 50 に対する $|\varepsilon_k(\tau)_{\max}|$ の値はそれぞれ 17.6, 0.55 および 0.13 [%] であり, これらの値は, Fig. 7 と比較すると, 同図の 3 次系より 2 次系に近い値となっている。

Fig. 7 は 2 において述べた保持要素の次数および標本間隔が決まれば一義的に誘導される保持要素の誤差特性例を示したものである。保持要素の次数を高くすることによって誤差が少なくなるのは当然であるが, Fig. 7 は, 事情によって標本間隔が固定されているとき, より誤差の少ない復元信号を実現する際の保持要素次数を定める目安となるであろう。

4.2 測定結果

Fig. 2 に示された系をハイブリッドシステム HID-AS 200 のアナログ計算機部 ALS 505 によって構成し測定した。このときの入力信号は $e(t)=100 \sin(\pi/10)t$ [V] である。

Fig. 8 Input and output wave forms of various order holders

Fig. 8 (a) は各保持要素への入力波形であり、(b), (c), (d) および (e) はそれぞれ 0 次, 1 次, 2 次および 3 次保持要素の出力波形である。このときの標本間隔は $T=1$ [s] である。なお Fig. 8 では記録紙の送り速度および振幅感度は等しくしてある。

Fig. 9 は各保持要素の誤差 (入力-出力) を示したもので、Fig. 8 と同時に記録された。なお Fig. 8 および Fig. 9 における $\Downarrow$ 印は共通軸を示したものである。

Fig. 9 において各保持要素の最大瞬時誤差の生ずる点は 4.1.1~4.1.4 で述べた点とほぼ一致し、さらに同図に示された最大瞬時誤差値は Fig. 7 において $T_i/T=20$ に対する $|e_k(\tau)_{\max}|$ の値とほぼ一致している。

Fig. 10 は入力波形が Fig. 8 (a) であるときの各保持要素の S/N を示したものである。ここでは

$$\frac{S}{N} = 10 \log_{10} \left[\frac{\text{入力の 2 乗平均値}}{\text{誤差の 2 乗平均値}} \right] \text{ [dB]}$$

である。Fig. 10 の横軸は Fig. 7 と同様に正弦波 1 周期当りの標本点の個数である。Fig. 10 において Fig. 8 および Fig. 9 の波形にたいする S/N は 0 次, 1 次, 2 次および 3 次保持要素についてそれぞれ 14.3, 25.7, 36.8 および 45.4 [dB] である。

Fig. 7~10 に示されたように保持要素の次数を増す

Fig. 9 Error signal forms for sinusoidal input shown on Fig. 8 (a)

Fig. 10 Signal to noise ratios of higher-order holder

T_i : Period of sinusoidal input

T : Sampling period

k : Order of holder

ことによって最大誤差および S/N は著しく改善される。たとえば Fig. 8 (a) と (e) ではみかけ上一致しており、さらに Fig. 9 においては最大誤差が (a) では約 31% に対し (d) では 1% である。なお Fig. 7 および Fig. 10 は一定誤差値, S/N 値を維持しながら標本回数を減少する場合にも活用できるだろう。

5. む す び

本稿では Lagrange の補間公式を応用した高次離散値保持要素の系統的な構成方法および得られた要素の特性について述べた。

標本間隔が一定の場合には、標本値列の補間(補外)によって連続信号を得るときの独立な変数は標本間隔の値と 1 区間の補間(補外)に使用される標本値の数とであることに注目し、この 2 つの変数のみに依存する係数をもつ高次保持要素の構成方法を示した。1 区間の補外に使用される過去の標本値の数(保持要素の次数)が定めれば、保持要素を構成するときの変数は標本間隔の値のみとなる。一定次数の保持要素で標本間隔 T を変える場合には、積分演算器のゲインを $1/T$ 倍するのみで他の係数は固定されている。

本稿で得られた高次保持要素によって正弦波信号を復元する際の、標本回数および保持要素次数に対する最大瞬時誤差および S/N を示した。これらの特性は連続信号に含まれる各周波数成分に関して標本回数と復元された近似信号の誤差との関係、または標本回数が固定されているとき保持要素次数によって、より誤

差の少ない連続信号を得るときの目安となるであろう。このことに関連して、従来の方法によって示されている 3 次保持要素の場合、標本回数に対する最大瞬時誤差は本手法による 3 次要素よりも 2 次要素に近い値となっている。さらに高次保持要素の周波数応答の位相特性にはつぎの性質がある。保持要素次数の増大と共に ωT の値が小さいところでは位相進みが著しく、このことは保持要素次数による予測効果の推移を示している。 ωT の値が大きいところでは保持要素次数の増大と共に位相遅れも大きくなる。

以上より計算機周辺装置の一つとして高次離散値保持要素を開回路部分に使用すれば、離散値データより高精度の連続信号を実現することができるであろう。

なお、本稿で述べた高次離散値保持要素の任意波形信号に対する誤差の総合的な処理方法については別の機会に報告する予定である。

参 考 文 献

- 1) E. I. Jury: Sampled-Data Control System, 47/55, Wiley (1958)
- 2) J. R. Ragazzini: Sampled-Data Control Systems, 29/51, McGraw-Hill (1958)
- 3) B. C. Kuo: Analysis and Synthesis of Sampled-Data Control Systems, 41/53, Prentice-Hall (1963)
- 4) J. D. Brul'e: Polynomial Extrapolation of Sampled Data with an Analog Computer, IRE Trans. on Automatic Control, Vol AC-7, No. 1, 76/77 (1962)
- 5) 森口繁一, 高田 勝: 数値計算法 I, 31/43, 岩波書店 (1958)
- 6) 吉田耕作編: 応用数学便覧, 325/331, 丸善 (1960)
- 7) J. T. Tou: Digital and Sampled-Data Control Systems, 127/140, McGraw-Hill (1959)
- 8) C. L. Phillips, D. L. Chenoweth, R. K. Cavin, III: Z-Transform Analysis of Sampled-Data Control Systems without Reference to Impulse Functions, IEEE Trans. on Education, Vol. E-11, No. 2, 141/144 (1968)

正 誤 表

第 10 巻 第 2 号「フルイディクス回路系における空気管路のパワー伝送特性」

(高森 年・米持政忠著)

ページ	欄	行	誤	正
245	右	26行目	デなるも	ディクス
"	"	27行目	にィクス	になるも
246	右	(4)式	$\left[\begin{array}{c} A+B/R_L \\ C+D/R_L \end{array} \right] \cdot P_2 \dots$	$\left[\begin{array}{c} A+B/R_L \\ C+D/R_L \end{array} \right] \cdot P_2 =$