無 干 渉 制 御 の 一 般 化[†]

河 野 通 夫*・杉 浦 一 郎*

Generalization of Non-Interacting Control

Michio KONO* and Ichiro SUGIURA*

A non-interacting control of an r -input m -output multivariable control system via state variable feedback is considered. Since inputs of the control law correspond to reference inputs, a non-interacting control system is constructed by the control law with as many inputs as there are outputs of the plant. As a feedforward gain matrix of this control law is not square, this control law changes F -invariant properties. In this paper, sufficient conditions are derived for non-interaction by a control law with a rectangular feedforward gain matrix.

An easily computable criterion for non-interacting is derived. Two examples are given illustrating the result.

In a special case, the structure of the non-interacting system is shown.

1. ま え が き

制御対象の状態方程式を

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1.1a)$$

$$y = Cx \quad (1.1b)$$

とする。ここで x は n 次元状態ベクトル, u は r 次元入力ベクトル, y は m 次元出力ベクトル, A, B, C はそれぞれ $n \times n, n \times r, m \times n$ の行列である。系 (1.1) に制御則

$$u = Fx + Gv \quad (1.2)$$

を適用する。ただし v は m 次元入力ベクトルであり, F は $r \times n$ の行列で, フィードバック行列とよび, G は $r \times m$ の行列で, 前向きゲイン行列とよぶ。 y の第 i 成分を y_i , v の第 i 成分を v_i としたとき, v_i は y_i にだけ影響を与え, $y_i (j \neq i)$ には影響を与えない制御系を無干渉制御系とよぶ。 $r = m$ の

とき, 無干渉制御系を構成する制御則 (1.2) が存在するか否かの必要十分条件は Wolovich ら¹⁾によってえられている。 $r \neq m$ の場合については, Silvermann²⁾ および Morse³⁾ が十分条件について若干の検討をしている。本報告では, $r \neq m$ は場合について, 従来得られた十分条件よりもよい十分条件を与える。

2. 定 義 と 記 号

系 (1.1) の伝達関数行列を $H(s)$ とすれば,

$$\begin{aligned} H(s) &= C[sI_n - A]^{-1}B \\ &= \{(s^{n-1} + a_{n-1}s^{n-2} + \dots + a_1)CB \\ &\quad + (s^{n-2} + a_{n-1}s^{n-3} + \dots + a_2)CAB + \dots \\ &\quad + CA^{n-1}B\} \div (s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0) \end{aligned} \quad (2.1)$$

となる。ただし

$$\det(sI_n - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$$

【定義 1】 C の第 i 行を c_i としたとき, $c_i A^j B \neq 0$ となる最小の j を相対次数とよび, d_i で表わす。ただし, $j = 0, \dots, n-1$ に対して $c_i A^j B = 0$ ならば, $d_i = n-1$ とする。

(2.1) 式からわかるように, 一変数系であれば, 相対次数 d_i は伝達関数の分母と分子の次数差から 1 を引いた値になっている。

系 (1.1) に対して制御則 (1.2) を適用したとき, 構成系は

$$\dot{x} = (A + BF)x + BGv \quad (2.2a)$$

$$y = Cx \quad (2.2b)$$

となる。 v と y の間の伝達関数行列を $H_v(s)$ で表わすと

$$H_v(s) = C[sI_n - (A + BF)]^{-1}BG \quad (2.3)$$

【定義 2】 $H_v(s)$ が対角行列であって, ほとんどすべての s に対して正則であるとき, 制御系は無干渉制御系であるという。

系 (1.1) に対して制御則

$$u = Fx + \hat{u} \quad (2.4)$$

を代入する。ここで $\hat{u}$ は r 次元入力ベクトルであ

[†] 第 15 回自動制御連合講演会で発表 (昭和 47・11)

* 名古屋大学工学部 名古屋千種区不老町

* Faculty of Engineering, Nagoya University, Nagoya

(Received March 7, 1973)

Fig. 1 Multivariable control system

る。このとき構成系は

$$\dot{x} = (A + BF)x + B\hat{u} \quad (2.5a)$$

$$y = Cx \quad (2.5b)$$

となる。

【定義 3】系 (1.1) を系 (2.5) に変換したときに不変な性質を F 不変な性質という。

F 不変な性質の例としては可制御性, invertibility (注 1) 相対次数がある。これに対して, 可観測性は F 不変な性質でない。制御則 (2.4) の代わりに, 制御則 (1.2) を考えてみよう。 $m=r$ であって, G が正則な場合, 制御則 (1.2) は相対次数を保存するが, $m \neq r$ の場合には必ずしも相対次数を保存しない。

3. 主な結果

従来 of 十分条件よりもよい十分条件としてつぎの定理を与える。

【定理】ある非負の整数 $q_1, \dots, q_m$ が存在して

$$\text{rank } B^* = m \quad (3.1)$$

かつ

$$\text{rank } D^*K = \text{rank } D^* \quad (3.2)$$

ならば, 無干渉制御系を構成する F, G が存在する。ただし, 行列の転置を $'$ で表わして

$$B^* = [(c_1 A^{q_1} B)' : \dots : (c_m A^{q_m} B)'] \quad (3.3)$$

$$D^* = [(c_1 A^{d_1} B)' : \dots : (c_m A^{d_m} B)' : \dots : (c_1 A^{q_1-1} B)' : \dots : (c_m A^{q_m-1} B)'] \quad (3.4)$$

$q_i = 0$ のとき

$$c_i A^{q_i-1} B = 0 \quad (3.5)$$

K は B^* の零空間の基ベクトルを並べた行列である。

【証明】 $B^{**} = B^* (B^* B^*)^{-1}$ とすれば, $[B^{**} : K]$ は正則だから

$$\begin{aligned} \text{rank } D^*K &= \text{rank } D^* \\ &= \text{rank } [D^* B^{**} : D^* K] \end{aligned}$$

したがって方程式

$$D^* B^{**} + D^* K N = 0 \quad (3.6)$$

の解が存在する。その解 N_0 を使って, 制御則

$$F = -GA_q^* \quad (3.7a)$$

$$G = B^{**} + K N_0 \quad (3.7b)$$

をとす。ただし

$$A_q^* = \begin{bmatrix} c_1 A^{q_1+1} \\ \vdots \\ c_m A^{q_m+1} \end{bmatrix}$$

このとき,

$$D^*G = 0 \quad (0 \text{ は零行列を表わす})$$

したがって, $k < q_i$ のときには,

$$c_i (A + BF)^k B G = [0 \dots 0]$$

$k = q_i$ のときには,

$$c_i (A + BF)^{q_i} B G = [0 \dots 0 \quad \overset{i}{1} \quad 0 \dots 0]$$

一方,

$$\begin{aligned} c_i (A + BF)^{q_i+1} B G &= c_i A^{q_i+1} B G + c_i A^{q_i} B F B G \\ &= c_i A^{q_i+1} B G + c_i A^{q_i} B F B G = [0 \dots 0] \end{aligned}$$

したがって, $k = 1, \dots, n - q_i - 1$ に対して

$$c_i (A + BF)^{q_i+k} B G = [0, \dots, 0]$$

それゆえ, 無干渉制御系になっている。(Q. E. D)

制御則 (3.7) によって構成された無干渉制御系の相対次数は $q_1, \dots, q_m$ になっている。そしてその伝達関数行列表示は

$$H_v(s) = \text{diag} \left[\frac{1}{s^{q_1+1}}, \dots, \frac{1}{s^{q_m+1}} \right]$$

となり, 積分器無干渉系⁵⁾ になっている。

特別な場合として, $N=0$ で (3.6) 式が成立する場合, つまり,

$$D^* B^* = 0 \quad (3.9)$$

が成立していれば,

$$F = -GA_q^* \quad (3.10a)$$

$$G = B^{**} \quad (3.10b)$$

とすることにより, 無干渉制御系を構成できる。このことをまとめると, つぎの系になる。

【系 1】ある非負の整数 $q_1, \dots, q_m$ が存在して,

$$\text{rank } B^* = m \quad (3.1)$$

かつ,

$$D^* B^* = 0 \quad (3.9)$$

ならば, 無干渉制御系を構成する F, G が存在する。

定理の条件を空間の関係で表現するためにつぎの補題をおく。証明は省略する。

【補題 1】 X, Y をそれぞれ $n \times r, r \times m$ の行列としたとき,

$$\text{rank } XY = \text{rank } X \quad (3.11)$$

となるための必要十分条件は,

$$N(Y) \cap R(X') = 0 \quad (3.12)$$

である。ただし $R(Y), N(Y)$ はそれぞれ行列 Y の列値域空間および零空間を表わす。

補題 1 から, 条件 (3.2) は

$$N(K') \cap R(D^*) = 0$$

(注 1) 入力空間から出力空間への写像に inverse があること。

となる。ところが、

$$N(K') = R'/R(K) = R'/N(B^*) = R(B'^*)$$

であるから、条件 (3.2) は

$$R(B'^*) \cap R(D'^*) = 0$$

と等価である。したがって、つぎの系が得られる。

【系 2】 ある非負の整数 $q_1, \dots, q_m$ が存在して

$$\dim R(B^*) = m \quad (3.13)$$

かつ、

$$R(B'^*) \cap R(D'^*) = 0 \quad (3.14)$$

ならば、無干渉制御系を構成する F, G が存在する。

$q_1 = d_1, \dots, q_m = d_m$ で条件 (3.1) が成立する場合、条件 (3.2) は必要なくなる。

$$F = -B^{*+} \begin{bmatrix} c_1 A^{d_1+1} \\ \vdots \\ c_m A^{d_m+1} \end{bmatrix}$$

$G = B^{*+}$ とすれば、無干渉制御系を構成することができ、しかも相対次数は不変である。このことからつぎの系が得られる。

【系 3】 もし、

$$\text{rank } D = m \quad (3.15)$$

ならば、無干渉制御系を構成する F, G が存在する。ただし、

$$D = B^{*+} \begin{bmatrix} c_1 A^{d_1} B \\ \vdots \\ c_m A^{d_m} B \end{bmatrix}$$

条件 (3.15) が満足されているときの無干渉制御系の構造は付録に示されている。

4. 判定条件

定理は、無干渉制御系を構成することが可能であるための十分条件を与えているが、 $q_1, \dots, q_m$ がわからないために実際の判定条件として使うことは困難である。この節ではより簡単な判定法を提案する。

【定義 4】 行列 W の第 i 行を w_i とする。 w_i が他の行の一次結合で表わしえないとき、行 w_i は rank essential (r.e.) であるという。

$\text{rank } D < m$ のとき、行列 D は r.e. である行と r.e. でない行に分類され、行を交換する適当な行列を P_0 とすれば、

$$P_0 D = \begin{bmatrix} B_0^* \\ \bar{D}_0^* \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

ここで行列 B_0^* は r.e. な行だけからなり、行列 $\bar{D}_0^*$ は r.e. でない行だけからなっている。r.e. な行の index の集合を $J_0, M = \{1, \dots, m\}$ とし、 $\{c_i A^{d_i} B\}, i \in J_0$ で J_0 に属する i を変えてできる行 $c_i A^{d_i} B$ を各行とする行列を表わせば、

$$B_0^* = \{c_i A^{d_i} B\} \quad i \in J_0 \quad (4.2)$$

$$\bar{D}_0^* = \{c_i A^{d_i} B\} \quad i \in M - J_0 \quad (4.3)$$

J_0 の要素の数を p_0 とすれば、定義から、 $\text{rank } B_0^* = p_0$ である。一般に、第 j 段において、行列

$$\{c_i A^{k_{i,j}} B\} \quad i \in M$$

が与えられたとき、行を適当に交換して、r.e. な行 $c_i A^{k_{i,j}} B$ からなる行列 B_j^*

$$B_j^* = \{c_i A^{k_{i,j}} B\} \quad i \in J_j \quad (4.4)$$

と r.e. でない行 $c_i A^{k_{i,j}} B$ からなる行列 $\bar{D}_j^*$

$$\bar{D}_j^* = \{c_i A^{k_{i,j}} B\} \quad i \in M - J_j \quad (4.5)$$

に分割する。ただし J_j は r.e. な行の index の集合であり、その要素の数を p_j とする。そのとき、

$$D_j^* = \{c_i A^{k_{i,j+1}} B\} \quad i \in M - J_j \quad (4.6)$$

と定義する。そして、

$$R(B_j^*) \cap R(D_j^*) = 0 \quad (4.7)$$

が成立するかどうかを調べる。もし (4.7) 式が成立していなければ、計算をとめる。(4.7) 式が成立している場合には、 D_j^* の行を r.e. な行と r.e. でない行に分類し、r.e. な行の index を J_j につけ加えた集合を J_{j+1} とし、 B_{j+1}^* および $\bar{D}_{j+1}^*$ を

$$B_{j+1}^* = \{c_i A^{k_{i,j+1}} B\} \quad i \in J_{j+1} \quad (4.8)$$

$$\bar{D}_{j+1}^* = \{c_i A^{k_{i,j+1}} B\} \quad i \in M - J_{j+1} \quad (4.9)$$

と定義する。ただし $k_{i,j+1} = k_{i,j} (i \in J_j)$, $k_{i,j+1} = k_{i,j} + 1 (i \in M - J_j)$ 条件 (4.7) から、 $\text{rank } B_{j+1}^* = p_{j+1}$ である。 $j=0$ の場合は (4.1) 式で与えられるから、順次 B_j^* を計算することができる。 $p_j = m$ になるか $\min_{i \in M} k_{i,j} = n-1$ になったら、計算をとめる。 $p_j = m$ になったとき、

$$B^* = B_j^*, \quad D^* = [\bar{D}_0^*, \dots, \bar{D}_{j-1}^*]$$

とおく。もし、

$$R(D^*) \cap R(B^*) = 0$$

であれば、系 2 から、無干渉制御系を構成することは可能である。この節で述べた判定条件は定理の十分条件と等価ではない。すなわち、この判定条件を満たしなくても、定理の条件 (3.1), (3.2) を満たす $q_1, \dots, q_m$ が存在することはありうる。

例 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c_1 B = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$$

$$c_2 B = [0 \ 1 \ 1 \ 0]$$

$$c_3 B = [0 \ 1 \ 1 \ 0]$$

相対次数は $d_1=d_2=d_3=0$ であり, $c_2 B$ と $c_3 B$ は一次従属だから,

$$J_0 = \{1\}, \quad M - J_0 = \{2, 3\}$$

$$B_0^* = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$$

$$\bar{D}_0^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_0^* = \begin{bmatrix} c_2 AB \\ c_3 AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$D_0^* = \bar{B}_1^*$ となり, $R(B_0^*) \cap R(D_0^*) = 0$ だから,

$$B_1^* = \begin{bmatrix} B_0^* \\ \bar{B}_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad J_1 = \{1, 2, 3\}$$

$$K_1 = [-1 \ 1 \ 0 \ 1]^T$$

$\text{rank } B_1^* = 3$, $\text{rank } \bar{D}_0^* K_1 = 1$ であるから条件 (3.1), (3.2) を満しており, 無干渉制御系を構成することは可能である.

例 2

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_1 B = [1 \ 1 \ 0 \ 1]$$

$$c_2 B = [1 \ 1 \ 0 \ 1]$$

相対次数は $d_1=d_2=0$ であり, $c_1 B$ と $c_2 B$ は一次従属だから,

$$J_0 = \phi \quad (\phi \text{ は空集合を表わす})$$

$$\bar{D}_0^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_0^* = \begin{bmatrix} c_1 AB \\ c_2 AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

したがって

$$B_1^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad K_1' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J_1 = \{1, 2\}$$

となる.

$$B^* = B_1^* \quad K = K_1 \quad D^* = \bar{D}_0$$

であり, $\text{rank } B^* = 2$, $\text{rank } D^* K = 1$ であるから, 条件 (3.1), (3.2) を満しており, 無干渉制御系を構成することは可能である. 制御則として

$$F = -(B^{**} + K N_0) C A^2$$

$$-(B^{**} + K N_0) \begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_{21} & \theta_{22} & 0 \end{bmatrix} Q$$

$$G = (B^{**} + K N_0) \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

と選ぶ. ただし

$$N_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

このとき, 伝達関数行列表示は

$$H_v(s) = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1}{s^2 + \theta_{12}s + \theta_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2}{s^2 + \theta_{21}s + \theta_{22}} \end{bmatrix}$$

となる. $\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{21}, \theta_{22}$ によって極の位置を任意に指定できる.

5. あとがき

従来の無干渉制御で取扱った制御対象は, 多くの場合, 入力の数と出力の数が等しいという条件がついていた. そして, 前向きゲイン行列が正則な制御則に限定して議論がなされてきた. 制御対象の入力の数と出力の数が等しくない場合, 前向きゲイン行列は矩形である. 前向きゲイン行列が正則でない場合の制御則 (1.2) は F 不変な性質を保存しないので, 議論が複雑になり, 十分条件しかえられなかった. 必要十分条件をえることは今後に残された問題である. 積分器無干渉系を構成してからこの設計法については $m=r$ の場合とまったく同様に議論できる⁵⁾. 最後に, 本研究に関し熱心に御討論して頂いた研究室の諸氏に深く感謝し, お礼を申し上げます.

参考文献

- 1) P.L. Falb and W.A. Wolovich: Decoupling in the Design and Synthesis of Multivariable Control Systems, Trans. IEEE, AC-12-6, 651/659 (1967)
- 2) L.M. Silverman and H.J. Payne: Input-Output Structure of Linear Systems with application to the Decoupling Problem, J. of SIAM Control, 9-2, 199/233 (1971)
- 3) M.K. Sain and J.L. Massey: Invertibility of Linear Time-Invariant Dynamical Systems, Trans. IEEE, AC-14-2, 141/149 (1969)
- 4) M. Cremer: A precompensator of minimal order for decoupling a linear multivariable System, International, J. of Control, 14-6, 1089/1103 (1971)
- 5) E.G. Gilbert: The Decoupling of Multivariable systems by state feedback, J. of SIAM Control,

7-1, 50/63 (1969)

- 6) A. S. Morse and W. M. Wonham: Status of Non-interacting Control, Trans. IEEE, AC-16-6, 568/581 (1971)

《付 録》

ここではつぎの仮定をおく。

- i) rank $D=m$ ii) 制御対象 (1.1) は可制御である。
この条件のもとで Gilbert の与えた正準無干渉系に対応する構成を考える。

$\bar{u}$ を r 次元入力ベクトルとして、制御則

$$u = -D^+ A^* x + [D^+ : K] \bar{u} \quad (\text{付} \cdot 1)$$

を考える。ここで $A^* = \begin{bmatrix} c_1 A^{d_1+1} \\ \vdots \\ c_m A^{d_m+1} \end{bmatrix}$

K は D の零空間の基ベクトルを並べた行列である。

(付・1) 式を系 (2.1) に代入すると、

$$\dot{x} = \bar{A}x + \bar{B}\bar{u} \quad (\text{付} \cdot 2 \text{ a})$$

$$y = Cx \quad (\text{付} \cdot 2 \text{ b})$$

となる。ただし、

$$\bar{A} = A - BD^+ A^* \quad \bar{B} = B[D^+ : K]$$

系 (付・2) の伝達関数行列を $H_i(s)$ とすれば、

$$H_i(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s^{d_1+1}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & & \\ 0 & \frac{1}{s^{d_m+1}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。さて、 $i=1, \dots, r$ に対して部分空間 $\bigcap_{j \neq i} \{\bar{A} | R(\bar{B}_j)\}^\perp$ の基列ベクトルを並べた行列を Q_i' 、部分空間 $\left[\sum_{i=1}^r R(Q_i') \right]^\perp$ の基列ベクトルを並べた行列を Q_{r+1}' とする。ただし $\bar{B}_i$ は $\bar{B}$ の第 i 列であり、

$$\{\bar{A} | R(\bar{B}_i)\} = R(\bar{B}_i) + \bar{A}R(\bar{B}_i) + \dots + \bar{A}^{n-1}R(\bar{B}_i) \quad (\text{付} \cdot 3)$$

とする。また $R(A)^\perp$ は $R(A)$ の直交補空間を表わす。このようにして定義した $R(Q_i')$ はつぎの性質をもつことが文献⁵⁾の証明とほぼ同様にして示される。

- i) $R(Q_i')$ は $\bar{A}'$ に関して不変部分空間である。
ii) $R(Q_i') \cap \sum_{j \neq i} R(Q_j') = 0$
iii) $c_i', \bar{A}' c_i', \dots, \bar{A}'^{d_i} c_i'$ は $R(Q_i')$ の一次独立なベクトルである。
ii) の性質から

$$R(Q_1') \oplus R(Q_2') \oplus \dots \oplus R(Q_{r+1}') = R^n$$

となる。 $R(Q_i')$ の次元を p_i とすれば、 $\sum_{i=1}^{r+1} p_i = n$ である。行列 Q_i を使って、新しい状態変数 $x^i = Q_i x$ を導入すると、 $i=1, \dots, m$ に対しては

$$\dot{x}^i = \hat{A}_i x^i + \hat{b}_i \hat{u}_i \quad (\text{付} \cdot 4 \text{ a})$$

$$y_i = c_i x^i \quad (\text{付} \cdot 4 \text{ b})$$

$i=m+1, \dots, r$ に対しては

$$\dot{x}^i = \hat{A}_i x^i + \hat{b}_i \hat{u}_i \quad (\text{付} \cdot 5)$$

$i=r+1$ に対しては

$$\dot{x}^{r+1} = \sum_{i=1}^{r+1} A_i c_i x^i + \sum_{i=1}^r \hat{b}_i c_i \hat{u}_i \quad (\text{付} \cdot 6)$$

となる。ただし $\hat{u}_i$ は $\bar{u}$ の第 i 成分であり、

$$Q_i \bar{A} = \hat{A}_i Q_i \quad \hat{b}_i = Q_i \bar{B}_i \quad i=1, \dots, r$$

$$\hat{c}_i Q_i = c_i \quad i=1, \dots, m$$

$i=1, \dots, m$ までの部分系は出力に影響をおよぼすが、 $i=m+1, \dots, r+1$ の部分系は可観測でなく、出力に全然影響をおよぼさない。部分系の可制御性については次の補題に与えられている。

【補題 2】 $i=1, \dots, r$ までの部分系は可制御である。

【証明】 仮定 ii) から系 (付・2) は可制御である。したがって

$$\{\bar{A} | R(\bar{B}_i)\}^\perp \cap \bigcap_{k \neq i} \{\bar{A} | R(\bar{B}_k)\}^\perp = 0 \quad (\text{付} \cdot 7)$$

行列 Q_i の定義から (付・7) 式は

$$N([\bar{B}_i, \bar{A}\bar{B}_i, \dots, \bar{A}^{n-1}\bar{B}_i]') \cap R(Q_i') = 0$$

と書ける。このことと補題 1 から

$$\begin{aligned} \text{rank}([\hat{b}_i, \hat{A}_i \hat{b}_i, \dots, \hat{A}_i^{n-1} \hat{b}_i]) \\ = \text{rank}(Q_i [\bar{B}_i, \bar{A}\bar{B}_i, \dots, \bar{A}^{n-1} \bar{B}_i]) \\ = \text{rank } Q_i = p_i \end{aligned}$$

したがって部分系 $(\hat{A}_i, \hat{b}_i)$ は可制御である。

(Q. E. D.)

無干渉制御系を構成する制御則は

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \vdots \\ \hat{u}_m \\ \vdots \\ \hat{u}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 & & \\ & \ddots & & \\ 0 & & \theta_m & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \\ \vdots \\ x^{r+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \\ & & & 0 \end{pmatrix} v$$

で与えられる。ここで θ_i は $1 \times p_i$ 、 Θ_1 は $(r-m) \times \sum_{i=1}^m p_i$ 、 Θ_2 は $(r-m) \times \sum_{i=m+1}^r p_i$ の行列である。補題 2 から、 $i=1, \dots, r$ の部分系は可制御であるから、 $i=1, \dots, r$ の部分系に対応する極の位置は任意に指定できる。

$r=m$ の場合、可観測でない部分系の極は指定できなかったが、 $r>m$ の場合には、可観測でない、極は指定できる部分系が存在する。

元の制御対象 (1.1) に対する制御則は

$$F = -D^+ A^* + [D^+ : K] \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 & & \\ & \ddots & & \\ 0 & & \theta_m & \\ & & & 0 \end{pmatrix} Q$$

$$G = D^+ A \quad A = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_m]$$

$$Q' = [Q_1', \dots, Q_{r+1}']$$

で与えられる。