未知状態ベクトルの算定

市 川 邦 彦*

Calculation of Unknown Initial State

Kunihiko ICHIKAWA*

A method for calculating the unknown initial state from observed output data and control input data is shown in this paper. These data are dealt with as a batch and not continuously in this method. The essential point of the method is to calculate the initial state by constructing an optimization problem and then solving it by the steepest descent method. The method can be applied to nonlinear systems. Two examples show that the initial state can be estimated without discernible error by this method. In the case of a linear time-fixed system, the optimization problem can be solved analytically and does not require the steepest descent method.

1. ま え が き

状態ベクトルの全成分が直接的には検出できないとき、検出できる出力から状態ベクトルを復原する回路の構成については Luenberger のオブザーバは有名である^{1)~3)}。また Luenberger のオブザーバを中心にした研究は非常に多い。Luenberger のオブザーバには、オンラインで状態推定ができるという利点はあるが線形系にしか適用できない。この論文は状態ベクトルの算定を一つの最適問題として捕えて、直接的には検出できない状態を出力データから算定しようとすることに関するものである。計算はオンラインではなく、バッチ処理するものであるが非線形系に適用できる。最後に特に線形固定系の問題も取扱った。

2. 問題の記述と解法の概要

制御対象のベクトル微分方程式が

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (1)$$

で表わされているとする。ここに x は n 次元状態ベク

トル、 u は r 次元制御ベクトルとする。そして $x_i(t)$ が $[0, t_f]$ なる区間にわたって直接的に検出できるものとする。当然 $x_i(0)$ はわかっている。非線形の可観測性に関しては、十分条件についてはかなりのことが明らかにされている⁴⁾ (付録参照)。しかし、その十分条件は、具体的に未知の状態を算定するためのアルゴリズムを与えているわけではない。ここでは $x_i(t)$, $t \in [0, t_f]$, を知って $x(0)$ を知ることについての可観測性の条件は満足されているものとする。

問題は $x_j(t)$, $j=1, 2, \dots, n$, $j \neq i$, を算出することであるが、初期条件と制御関数 $u(t)$ が決まれば $x(t)$ を知ることができるので、問題は初期値 $x_j(0)$, $j=1, 2, \dots, n$, $j \neq i$, を算定する問題に帰着する。

それらの推定値を $\hat{x}_j(0)$, $j=1, 2, \dots, n$, $j \neq i$, とする。これらの初期値に基づく解を $\{\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t), \dots, \hat{x}_n(t)\}$ とする。ここでは

$$J = \int_0^{t_f} \{x_i(t) - \hat{x}_i(t)\}^2 dt \quad (2)$$

を最小ならしめる $\hat{x}_j(0)$, $j=1, 2, \dots, n$, $j \neq i$, を最適な初期値推定と呼ぶことにする。以下に述べる計算アルゴリズムの原理によると、原理的には t_f は任意の値でよいことになるが、ここでは適当な値が用いられているものとする。

いま仮りに定めた $\hat{x}_j(0)$, $j=1, 2, \dots, n$, $j \neq i$ を公称初期値と呼び、公称初期値に基づく(1)式の解を公称解という。 J の公称初期値のところにおけるこう配を求めれば、たとえば最急降下法のようなアルゴリズムによって、最適な初期値推定に到達できるはずである。

3. こう配の算出

(1)式より、1次変分につき

$$(\partial x)' = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) \delta u \quad (3)$$

をうる。ここに

* 上智大学理工学部 東京都千代田区紀尾井町 7

* Faculty of Science and Technology, Sophia University, Chiyoda-ku, Tokyo
(Received January 31, 1974)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_r} \end{bmatrix} \quad (5)$$

そして $(\partial f/\partial x)$ と $(\partial f/\partial u)$ は各マトリクスの要素の x と u に既知の公称解と、既知の $u(t)$ を用いた既知の時間関数マトリクスである。したがって、(3)式は構造がわかった時間可変の線形ベクトル微分方程式となる。いま制御 $u(t)$ は変化させず、公称初期値のみを変化させるとすれば、公称解の1次変分 $\delta \hat{x}$ について

$$(\delta \hat{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \delta \hat{x} \quad (6)$$

をうる。

$x_i(0)$ は既知であるから、これは変えず、これ以外の公称初期値に微小な変動を与えることにする。線形系(6)の遷移マトリクスを $\Phi(t, \tau)$ とすると

$$\delta \hat{x}(t) = \Phi(t, 0) \begin{bmatrix} \delta \hat{x}_1(0) \\ \delta \hat{x}_2(0) \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \delta \hat{x}_n(0) \end{bmatrix} \quad (7)$$

となる。ただし、(7)式の右辺のベクトルにおいて、第 i 番目の要素は0である。いま $\Phi(t, \tau)$ の ij 要素を $\phi_{ij}(t, \tau)$ で表わすと、(7)式より

$$\delta \hat{x}_i(t) = \sum_{j=1, j \neq i}^n \phi_{ij}(t, 0) \delta \hat{x}_j(0) \quad (8)$$

となる。(2)式より、 $\delta \hat{x}_i(t)$ に基づく J の1次変分を計算すると

$$\delta J = -2 \int_0^{t_f} \{x_i(t) - \hat{x}_i(t)\} \delta \hat{x}_i(t) dt \quad (9)$$

をうる。(8)式を(9)式に代入すると

$$\begin{aligned} \delta J = & -2 \int_0^{t_f} \{x_i(t) - \hat{x}_i(t)\} \phi_{i1}(t, 0) dt \cdot \delta \hat{x}_1(0) \\ & \dots \dots \dots \\ & -2 \int_0^{t_f} \{x_i(t) - \hat{x}_i(t)\} \phi_{in}(t, 0) dt \cdot \delta \hat{x}_n(0) \end{aligned} \quad (10)$$

となる。当然(10)式の右辺では第 i 番目の項は欠如している。これより、 J の $\hat{x}_j(0)$, $j=1, 2, \dots, n$, $j \neq i$ に対するこう配がつぎのように求まる。

$$g_j = -2 \int_0^{t_f} \{x_i(t) - \hat{x}_i(t)\} \phi_{ij}(t, 0) dt \quad (11)$$

ここで $\phi_{ij}(t, 0)$ は線形微分方程式(6)において、初期条件を単位ベクトル e^j に取ったときの解の第 i 成分であって、(6)式が確定すれば数値計算によって求める関数である。

4. 計算アルゴリズム

こう配の算出が可能となったので、 $\hat{x}_j(0)$, $j=1, 2, \dots, n$, $j \neq i$ の最適値に到達することができる。そのために最急降下法を用いることにすると、計算アルゴリズムはつぎようになる。

(1) $x_i(0)$ は既知の値を用い、 $x_i(0)$ 以外に対しては適当な推定値 $\hat{x}_i(0)$ を定める。

(2) 上記の初期値および既知の $u(t)$ を用い、微分方程式(1)を解き $\hat{x}_i(t)$ と $(\partial f/\partial x)$ を決定する。

(3) 微分方程式(6)において、初期条件を e^j , $j=1, 2, \dots, n$, $j \neq i$ に取ったときの解（すべて n 次元ベクトルである）を求め、それらの第 i 成分のみを取り出し、 $\phi_{ij}(t, 0)$, $j=1, 2, \dots, n$, $j \neq i$ を決める。

(4) (11)式に従ってこう配 g_j , $j=1, 2, \dots, n$, $j \neq i$ を求める。

(5) ε をあらかじめ定めた微小量として

$$\max_{j \neq i} |g_j| < \varepsilon \quad (12)$$

が成立しているか否かを調べる。もし成立していれば最適な初期値推定に到達したものととして計算を終わる。そうでないときは、つぎのステップに進む。

(6) つぎの式によって初期値推定を改良する。

$$\begin{aligned} [\hat{x}_j(0)]_{\text{new}} &= [\hat{x}_j(0)]_{\text{old}} - \alpha g_j, \\ j &= 1, 2, \dots, n, \quad j \neq i \end{aligned} \quad (13)$$

ただし、 α は適当に小さな正数。 $[\hat{x}(0)]_{\text{new}}$ を用いてステップ(1)に戻る。

以上述べた計算法は、検出できる量がスカラ関数 $x_i(t)$ の場合に限らず、もっと多くの状態変数が検出できる場合に容易に拡張できる。このような未知状態ベクトルの算定は、たとえば最適制御を行なうのに必要である。外乱がしばしば系に入りうるということを考えると、初期値推定ということは1回だけ行なえばよいというものではなく、できるだけ頻繁に繰返し行なうことが望ましい。その意味からは t_f はなるべく短かくしたほうがよいことになるが、あまり短かいと検出誤差の影響が現われて精度の高い初期値推定はできなくなるであろう。また操作中の初期値推定ということではなく、1回の実験に対して初期値推定を行なうという場合でも、外乱の混入のおそれがあるほど大き

な t_f を用いることも意味のないことになる。このように t_f には適当な大きさがあると考えられるが、それに関する議論はここでは行なわないことにする。

この問題の解を求めるのに必要な計算の量および記憶量は大きざっぱに言って同程度の規模のシステムで最適制御を求めるのに必要な計算量および記憶量に比べてそれぞれ約2倍程度である。

5. 例題

流体抵抗を受けるばね質量系の自由運動を例にとる。その運動はつぎの状態ベクトル微分方程式で表わされる。

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -5x_1 - x_2 |x_2|$$

〔例題1〕 $x_1(t)$ が検出できて、初期時刻から5秒までの間のデータが Fig. 1 のように与えられていて $x_2(t)$ を算定する問題。文献⁴⁾ による可観測条件を用いると可観測であることがわかる。 $x_2(0)$ の初期推定値 $\hat{x}_2(0)$ を -10 に取り、前節で述べたアルゴリズムに従って $\hat{x}_2(0)$ の最適値を求めた結果 $\hat{x}_2(0)=0$ を得た。このような初期値のもとでの公称解 $\hat{x}_1(t)$ は Fig. 1 とまったく変らないものを得た。このときの $\hat{x}_2(t)$ を Fig. 2 に示す。実は Fig. 1 は初期値を $(5, 0)$ に取ったときの解であって $x_2(t)$ も知っていたのであるが、 $x_2(t)$ のデータをまったく隠しておいて計算によって求めた結果の $\hat{x}_2(t)$ は $x_2(t)$ とまったく一致したのである。

〔例題2〕 $x_2(t)$ が検出できて、初期時刻から2秒までの間のデータが Fig. 3 のように与えられていて $x_1(t)$ を算定する問題。この場合も可観測性の十分条件が満足されている。 $x_1(0)$ の初期推定値を 1.0 に取り、前節で述べたアルゴリズムに従って $\hat{x}_1(0)$ の最適値を求めた結果 $\hat{x}_1(0)=0$ を得た。このような初期値のもとでの公称解 $\hat{x}_2(t)$ は Fig. 3 とまったく変わらないものを得た。このときの $\hat{x}_1(t)$ を Fig. 4 に示す。実は Fig. 4 は初期値を $(0, 5)$ に取ったときの解であって $x_1(t)$ も知っていたのであるが、 $x_1(t)$ のデータをまったく隠しておいて計算によって求めた結果の $\hat{x}_1(t)$ は $x_1(t)$ とまったく一致したのである。

例題1では繰返し数（初期値の更新回数）は約120で総計算時間は約2時間半を要した。これに対して例題2では繰返し数は9で総計算時間は4.8分であった。この異常の開きは、例題1では初期値の初期推定が真値と著しく異なっていたこと、およびデータの観測時間が例題1では5秒であるのに対し、例題2では2秒であることに原因している。もちろん計算時間が

長かった他の理由としてあまり収束速度が速くない連続式最急降下法を用いたこともある。ただ、この研究ではどんなに精度よく未知初期値が算定できるかに重点をおき、計算時間の短縮化にはあまり力を入れなかったことを断っておく。

6. 線形固定系における初期値の算定

以下述べるように線形固定系の場合は最急降下法のような繰返計算ではなく解析的な計算によって初期状態を算定することができる。

線形固定系

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (14)$$

を考える。簡単のため第1成分 $x_1(t)$ が観測されているとする。すなわち、出力を $y(t)$ とすると

$$y(t) = h^T x(t) \quad (15)$$

$$h = [10 \cdots 0]^T \quad (16)$$

である。この系が可観測であると仮定する。初期値 ξ^0 を与えたときの解の第1成分が既知の関数 $y(t)$ に等しくなるという条件で ξ^0 を求めよう。ただし ξ^0_1 は $x_1(0)=y(0)$ としてすでに観測されている。初期値が ξ^0 であるときの解は

Fig. 1
Output record in
Ex. 1

Fig. 2
Calculated state
variable in Ex. 1

Fig. 3
Output record in
Ex. 2

Fig. 4
Calculated state
variable in Ex. 2

$$x(t; \xi^0) = e^{At} \xi^0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \quad (17)$$

である。その第 1 成分は

$$x_1(t; \xi^0) = h^T e^{At} \xi^0 + h^T \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \quad (18)$$

となり、これより

$$h^T e^{At} \xi^0 = x_1(t; \xi^0) - h^T \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \quad (19)$$

をうる。無限冪級数 e^{At} は Cayley-Hamilton の定理により、 A の $n-1$ 次式で表わされ

$$e^{At} = \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A + \dots + \alpha_{n-1}(t)A^{n-1} \quad (20)$$

の形に書くことができる。 A の特性根に重複がないものとする、 $\alpha_0(t), \alpha_1(t), \dots, \alpha_{n-1}(t)$ はつぎの式によって求められる⁵⁾。

$$\begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \dots \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_n \dots \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad (21)$$

ここに $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ はマトリクス A の固有値である。

(21) 式において、 $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$ は互に独立な時間関数であり、また右辺左側のマトリクスは正則であるから (Vandermonde マトリクスの逆である)、 $\alpha_0(t), \alpha_1(t), \dots, \alpha_{n-1}(t)$ も互いに独立な時間関数である。

(20) 式で、左から h^T を乗ずると

$$\begin{aligned} h^T e^{At} &= \alpha_0(t)h^T + \alpha_1(t)h^T A + \dots + \alpha_{n-1}(t)h^T A^{n-1} \\ &= [\alpha_0(t) \quad \alpha_1(t) \dots \alpha_{n-1}(t)] \begin{bmatrix} h^T \\ h^T A \\ \vdots \\ h^T A^{n-1} \end{bmatrix} \quad (22) \end{aligned}$$

をうる。(22) 式において、 $\alpha_0(t), \alpha_1(t), \dots, \alpha_{n-1}(t)$ は互いに独立な時間関数であり、また右辺右側のマトリクスは可観測性の仮定によって正則である。よって行ベクトル $h^T e^{At}$ の各成分は互いに独立な時間関数である。すなわち

$$h^T e^{At} = [k_1(t) \quad k_2(t) \dots k_n(t)] \quad (23)$$

とおけば $k_1(t), k_2(t), \dots, k_n(t)$ は互いに独立な時間関数である。

状態ベクトル微分方程式が与えられると、(23) 式の $h^T e^{At}$ を計算することができる。いま

$$k^T(t) = [k_1(t) \quad k_2(t) \dots k_n(t)]^T \quad (24)$$

とおく、未知の初期状態を ξ^0 とする。自由応答解または実際の応答から強制力による影響

$$\int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

を差引いたものの第 1 成分は $k^T(t)\xi^0$ で表わされる。

ゆえに、 $y(t)$ を強制力による影響を差引いた応答とす

れば、つぎの評価関数を得られる。

$$J = \int_0^{t_f} \{y(t) - k^T(t)\xi^0\}^2 dt \quad (25)$$

J を最小ならしめる ξ^0 はつぎの関係式を満足する。

$$\begin{bmatrix} \langle k_1(t), k_1(t) \rangle & \langle k_1(t), k_2(t) \rangle & \dots & \langle k_1(t), k_n(t) \rangle \\ \langle k_2(t), k_1(t) \rangle & \langle k_2(t), k_2(t) \rangle & \dots & \langle k_2(t), k_n(t) \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle k_n(t), k_1(t) \rangle & \langle k_n(t), k_2(t) \rangle & \dots & \langle k_n(t), k_n(t) \rangle \end{bmatrix} \xi^0 = \begin{bmatrix} \langle k_1(t), y(t) \rangle \\ \langle k_2(t), y(t) \rangle \\ \vdots \\ \langle k_n(t), y(t) \rangle \end{bmatrix} \quad (26)$$

ただし $\langle a(t), b(t) \rangle$ は $\int_0^{t_f} a(t)b(t)dt$ のことである。

左辺のマトリクスを K とおく。 K は $k_1(t), k_2(t), \dots, k_n(t)$ から作られるマトリクスでグラム・マトリクスである。 K は $k_1(t), k_2(t), \dots, k_n(t)$ が独立なときは正定である。よって (26) 式より、 ξ^0 を求めることができる。この結果はすでに得られている結果⁶⁾ と本質的には同じであるが、(26) 式を構成するためには $h^T e^{At}$ を計算するだけでよく、 A の固有値を求める必要がない。

7. む す び

状態ベクトルが直接検出できない場合に状態の初期値を算定する方法として、一つの最適問題を設定し、これを最急降下法によって解くという方法を示した。この方法は非線形系にも適用できる。データの観測時間は原理的には任意であるが、実際問題としては適当な長さがあるであろう。しかし、この点についてはこの研究は触れなかった。線形系の場合には最急降下法によらず、解析的に求める。

この論文では確定論による議論をしているので、ルーエンバーガのオブザーバと比較してみよう。オブザーバはオン・ラインとして使用できハードウェアの構成も簡単であるが状態推定に必要な時間は無限大である。この論文で述べた方法は本来オフ・ラインでバッチ処理することを目的としているが、オン・ライン計算機を用いるならば、計算を繰返し繰返し行なうことによって初期推定を更新することができ、オブザーバより有利な場合もありうる。

おわりに有益な討議を頂いた足利工大の山根裕造講師および本学の清水紀美子助手に感謝する。また例題 1, 2 の数値計算においては同助手より多大の援助をうけた。また本研究には本学の電子計算機 IBM 1130 を使用したことを書き添えておく。

参 考 文 献

- 1) D.G. Luenberger, : Observing the state of a linear

- system, IEEE Trans. MIL, Electron., MIL-8, 74/80, Apr. (1964)
- 2) D.G. Luenberger: Observers for multivariable systems, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-11**, 190/197, Apr. (1966)
 - 3) D.G. Luenberger: An Introduction to Observer, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-16**, 596/602, Dec. (1971)
 - 4) S.R. Kuo, D.L. Elliot and T.J. Tarn: Observability of Nonlinear Systems, Information and Control, **22**, 89/99 (1973)
 - 5) 市川：可制御性と可観測性, 計測と制御, **10-4**, 283/288 (1971)
 - 6) K. Ogata: State Space Analysis of Control Systems, 404, Prentice Hall (1967)

〔付 録〕

非線形系の可観測について

文献⁴⁾を要約して非線形系に関する可観測性について説明する.

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x), \quad x \in R^n \\ y &= h(t, x), \quad y \in R^m, \quad m < n \end{aligned} \right\} \quad (\text{A1})$$

なる系において, f および h は k 回微分可能とする. ただし, k とは $km \geq n$ を満足する最小な整数. x の初期点 x^0 の集合 Ω_0 と, 出力軌道 $y(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, の集合が 1 対 1 に対応するとき, この系は可観測であるという. つぎつぎと微分することによって

$$\left. \begin{aligned} y(t_0) &= h_0(x(t_0), t_0) \\ \dot{y}(t_0) &= h_1(x(t_0), t_0) \\ &\dots\dots\dots \\ y^{(k-1)}(t_0) &= h_{k-1}(x(t_0), t_0) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A2})$$

をうる.

$$z = \begin{bmatrix} y(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \\ \vdots \\ y^{(k-1)}(t_0) \end{bmatrix}, \quad H(x(t_0)) = \begin{bmatrix} h_0(x(t_0), t_0) \\ h_1(x(t_0), t_0) \\ \vdots \\ h_{k-1}(x(t_0), t_0) \end{bmatrix} \quad (\text{A3})$$

とおく. $H(x(t_0))$ は $x(t_0)$ をベクトル z に移す写像で, 可観測性とは, この写像 $H(x(t_0))$ が 1 対 1 の写像になっていることである. $H(x, t)$ のヤコビアンを $J(x)$ とおく. すなわち

$$J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_0}{\partial x_1} & \frac{\partial h_0}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial h_0}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_{k-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial h_{k-1}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial h_{k-1}}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (\text{A4})$$

とおく. $J(x)$ は $km \times n$ のマトリクスである. 可観測性の十分条件としてつぎの二つのものが考えられている.

(1) ratio condition, $AJ(x)$ が ratio condition を満足するような $n \times km$ の定数マトリクス A が存在すること. ratio condition とは正方マトリクスの主小行列式 $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ の絶対値が非零かつ有界であることである.

(2) strongly positive semidefinite, $AJ(x)$ がすべての x に対して strongly positive semidefinite となるような $n \times km$ の定数マトリクス A が存在すること. strongly positive semidefinite とは, a) すべての x に対し $\det AJ(x) > 0$, b) すべての x に対し $AJ(x) + [AJ(x)]^T$ のすべての主小行列式が非負なることをいう.