誘導負荷サイリスタ増幅器を含む閉ループ系の振動現象

池田 義弘*・畑 四郎*

Oscillation in Closed-Loop System Involving Thyristor Amplifier with an Inductive Load

Yoshihiro IKEDA* and Shiro HATA*

This paper is concerned with 1/2-harmonic self-oscillation of a first-order system involving a thyristor amplifier.

From investigations of an equivalent PWM system, it is shown that the only 1/2-harmonic self-oscillation occurs in the instability state.

The method of analysis is based on the equation of the system in the state of the limit cycle. The method is applied to closed-loop systems with two kinds of thyristor amplifier, namely an AC-DC converter and a DC chopper, and rigorous conditions for the 1/2-harmonic self-oscillation are obtained in suitable forms for numerical calculations. The analytical results are verified with the experimental results obtained on voltage stabilizing circuits.

1. 緒 言

サイリスタの順変換回路を用いた定電圧回路において、誘導負荷の場合、条件によっては電圧帰還ループでは、サイリスタ増幅器の基本リプル周波数の1/2の自励振動が発生する。また、サイリスタチョップパによる直流直巻電動機の駆動回路において、電動機電流の瞬時値を検出し、電流制御を行なうループでも同様の現象が発生する。これらの場合、サイリスタ回路の負荷は L - R 回路であり、1次系と考えられる。閉ループ系では、安定時にも出力が基本リプル周波数で変動しているが、自励振動が発生すれば変動は一層大きくなり、出力平均値が変動する場合もあるので、振動を防止する必要がある。

このような1/2次調波自励振動現象の解析は、これまでも行なわれているが、厳密な振動条件を与える方法としては、筆者らの知るかぎりでは、フーリエ級数を利用した方法¹⁾のみである。しかし、この方法を

用いて前述の閉ループ系の振動現象の解析を行なうと、誤差が大きくなり、振動条件が実験値よりかなり大きくなる場合がある。これはフーリエ級数の項数を有限項で打ち切ったためである。

そこで1次系に対しては、別の方法を用いるのが妥当であると考え、本論文では、系の動作を表わす1階の微分方程式から1/2次調波の周期解の存在条件を求める方法を提案している。2.では本手法が1次系の安定解析に有効であることを示すために、PWM系モデルを用いて不安定現象について検討すると共に、前述のフーリエ級数による解法を適用した場合の問題点について述べている。3.以下では順変換形とDCチョップパ形のサイリスタ増幅器を含む場合に対し、数値計算に適した形の振動条件式が得られることを示している。実験結果と比較し、理論値が厳密な振動条件を与えること、また安定限界を示すものであることを明らかにしている。

2. 1次系のパルス伝達関数と振動現象についての考察

サイリスタ増幅器は、その動作原理と出力波形から考えると、DCチョップパ形の場合はいうまでもないが、順変換形の増幅器でも放流用ダイオードが接続された場合は、パルス幅変調器(PWM)とみなすことができる。したがって本研究で取り扱う閉ループ系は、Fig. 1に示すようなPWM制御系に変換することができる。このPWM系の動作を示す差分方程式は非線形であるが²⁾、基準入力为零でない場合を考え、

Fig. 1 Block diagram of PWM system

* 大阪府立大学工学部 堺市百舌鳥梅町 4-804

* Faculty of Engineering, University of Osaka Prefecture, Sakai

(Received April 16, 1974)

動作点の近傍で線形化を行なうと一巡パルス伝達関数が求まる。

$$G(z) = KK_A \frac{T}{T_1} \cdot \frac{e^{-T/T_1}}{z - e^{-T/T_1}} \quad (1)$$

PWM への変換に際し、順変換形の増幅器の場合はサイリスタの導通期間と PWM のパルス幅とは等しいものとし、増幅器出力と PWM 出力の平均値も互いに等しいものとしている。\$K_A\$ は各サイリスタ増幅器の直流ゲインを示す。\$T\$ はサンプリング周期を示し、順変換形の場合は \$T = 2\pi/m\omega\$ (\$m\$: 電源相数) である。

特性方程式の根が \$Z\$ 平面の単位円上にあるときが安定限界であるから、(1)式から

$$K \cdot K_A = \frac{T_1}{T} (1 + e^{T/T_1}) \quad (2)$$

となる。特性方程式の根は常に実軸上にあるので、不安定時にはサンプリング周波数の \$1/2\$ の周波数の振動状態で発散していく。したがって 1 次系については、DC チョッパ形とか順変換形のサイリスタ増幅器を含む場合は、不安定状態では常に \$1/2\$ 次調波自励振動が発生することがわかる。しかし、(2)式の条件は実際の現象と比較すると正確でないことがわかった。

ところで、\$1/2\$ 次調波自励振動の条件を求める方法として、サイリスタ増幅器の出力波形のフーリエ級数を利用する方法がある¹⁾。1 次系に対して、この方法を用いて数値計算を行なったところ、解の収束判定が非常に困難であることがわかった。Fig. 2 は自励振動時の順変換形のサイリスタ増幅器 (\$m=2\$) の出力波形と周波数スペクトルの一例を示したものである。基

Fig. 2 Frequency spectrum of output of thyristor amplifier (\$2\omega/2\pi=120\$ Hz, \$\alpha_1=1.70\$, \$\alpha_2=1.44\$)

本リプル周波数成分 \$2\omega\$ を基準にして、各調波成分の減衰度を示している。フーリエ級数を用いる方法では、解の収束速度は出力波形の高調波成分の減衰度と線形部の高域減衰度に依存しているが、1 次フィルタの高域減衰度が 20 dB/dec であることと、Fig. 2' のスペクトルから考えると、この方法では収束の速度は遅くなることが推察される。したがって 1 次系に対しては、線形部の周波数特性に依存しない振動条件式を求めることが望ましい。

3. 順変換形サイリスタ増幅器の場合の振動条件

3.1 振動の臨界条件

Fig. 1 に示す系において、サイリスタ増幅器が AC-DC 変換形である場合を考える。サイリスタによる多相整流回路の出力端子には放流用ダイオードが接続されている。1 次系の制御対象の出力とサイリスタ増幅器の出力電圧との関係は、1 階の微分方程式で記述されるが、サイリスタの点弧位相によって、出力電圧が零である期間の存在する場合と、存在しない場合とに区分して考える必要がある。

まず、零電圧の期間が存在する場合について考察する。Fig. 3 はサイリスタ増幅器の構成図と、\$1/2\$ 次調波自励振動時のサイリスタ増幅器の出力波形と線形要素の出力波形を示す。交流電源側のインピーダンス、およびサイリスタとダイオードの順方向電圧降下を無視すると、電源の各周期ではつぎの式が成立する。

Fig. 3 Schematic diagram of thyristor amplifier and wave forms of oscillation

$$T_1 \frac{dv}{dt} + v = E \sin(\omega t + 2\theta) \cdot u\left(t - \frac{\alpha - \theta}{\omega}\right) \quad (0 \leq \omega t < 2\pi/m) \quad (3)$$

ただし, $\theta = \pi(1/2 - 1/m)$, $u(t)$: 単位ステップ関数

(3)式を解くと $v(\omega t)$ を得る.

$$v(\omega t) = v(0)e^{-\gamma\omega t} + E\gamma e^{-\gamma\omega t} \int_{\alpha-\theta}^{\omega t} e^{\gamma\omega\tau} \sin(\omega\tau + 2\theta) d\omega\tau \quad (4)$$

ただし $\gamma = 1/\omega T_1$

1/2 次の振動が発生している場合, 図のように異なる波形を交互に繰返す. 一方を $v_1(\omega t)$, 他方を $v_2(\omega t)$ とすると, 境界条件はつぎのようになる.

$$v_1(2\pi/m) = v_2(0), \quad v_2(2\pi/m) = v_1(0) \quad (6)$$

また, サイリスタ増幅器の入力 v_i は $K(v_r - v)$ と表せるので, サイリスタの点弧位相を決定する式は

$$K\{v_r - v(\omega t)\} = E_c \cos(\omega t + 2\theta) \quad (6)$$

ただし, E_c : 余弦電圧の最大値
となり, 振動時にはつぎの位相において成り立つ.

$$\omega t = \alpha_1 - \theta \quad (v(\omega t) = v_1(\omega t))$$

$$= \alpha_2 - \theta \quad (v(\omega t) = v_2(\omega t))$$

したがって, (6)式から1/2 次の振動が存在するためのループゲインを与える式が求まる.

$$KK_A = \frac{(1 + \gamma^2)(1 - e^{-\gamma(4\pi/m)})\sin(\alpha + \theta)}{\gamma(2\pi/m)e^{-\gamma(2\pi/m)}\{(1 + 2\gamma^2 - e^{-\gamma(2\pi/m)})\sin(\alpha + \theta) - \gamma(1 + e^{-\gamma(2\pi/m)})\cos(\alpha + \theta) - \gamma(1 + e^{\gamma(2\pi/m)})e^{-\gamma(\alpha - \theta)}\}} \quad (\theta \leq \alpha \leq 2\pi/m + \theta) \quad (9)$$

上式は線形部の周波数特性には関係しないので, 2. で述べた数値計算上の問題点も解決される.

つぎに, 零電圧の期間がない場合については, 同様の手法により(9)式に相当する式が求まる. しかし, ↗

$$KK_A = -\frac{mE}{2\pi} \cdot \frac{\cos(\alpha_1 + \theta) - \cos(\alpha_2 + \theta)}{v_1(\alpha_1 - \theta) - v_2(\alpha_2 - \theta)} > 0 \quad (7)$$

ただし, $K_A = mE/2\pi E_c$: 順変換形サイリスタ増幅器の直流ゲイン

すなわち, (7)式を満たすようなゲイン $KK_A > 0$ が存在すれば, 1/2 次調波自励振動が存在し, もし $KK_A < 0$ しか存在しなければ振動は存在しない.

(4), (5)式を用いると(7)式の右辺の分母はつぎのようになる.

$$v_1(\alpha_1 - \theta) - v_2(\alpha_2 - \theta) = E\gamma \frac{e^{-\gamma(2\pi/m)}}{1 - e^{-\gamma(4\pi/m)}} \times [e^{-\gamma(\alpha_1 - \theta)}\{e^{-\gamma(2\pi/m)}I(\alpha_1) + I(\alpha_2)\} - e^{-\gamma(\alpha_2 - \theta)}\{I(\alpha_1) + e^{-\gamma(2\pi/m)}I(\alpha_2)\}] \quad (8)$$

ただし

$$I(\alpha) = \int_{\alpha-\theta}^{2\pi/m} e^{\gamma\omega t} \sin(\omega t + 2\theta) d\omega t$$

(8)式を(7)式に代入すると, 点弧位相が α_1, α_2 (その差は振動の大きさに関係する) であるときのループゲイン KK_A を与える式を得る. ここでは 1/2 次調波自励振動の臨界条件を求めるため, α_1 と α_2 を平均の点弧位相 α に限りなく近づけると, (7)式から最終的につぎのような点弧位相 α と臨界ゲインの関係式を得る.

↘ 数値計算の結果, 常に $KK_A < 0$ になることから不安定状態にならないことがわかる.

さらに, 出力側に放流用ダイオードを含まない場合についても, 同様の手法により検討した結果, 順変換器動作の範囲では $KK_A < 0$ となり, 常に安定であることがわかった. その詳細は省略する.

3.2 実験結果および検討

Fig. 4 (a), (b)は, 単相全波形 ($m=2$) と 3 相半波形 ($m=3$) のサイリスタ増幅器を含む 1 次閉ループ系について, 時定数 T_1 をパラメータとし, 任意の点弧位相 α に対する臨界ゲインの関係を表している. 図の実線の上側が振動の発生領域を示す. 図には Fig. 1 と同様の構成の定電

Fig. 4 Critical gain vs. time constants as parameter and firing angle

圧制御系を使って、実験を行なって求めた臨界ゲインを示す。理論値と実験値がよく一致していることがわかる。

3.1 で(7)式と(8)式を用いると、点弧位相 (α_1 , α_2) に対する KK_A が求まることを述べた。そこで常に平均値が一定であるという条件を付加し、数値計算を行なうと、臨界ゲイン以上に KK_A を増加した場合、その値に応じて振動の振幅も増加することがわかる。実験でもこの関係は確かめられ、 α_1 と α_2 のいずれか一方が最大 ($\pi/2 + \pi/m$) になるまでは安定な 1/2 次調波自励振動になり、他の振動は発生しなかった。しかし、この状態からさらに KK_A を増加すると、1/2 次の振動状態の、さらに 1/2 次の振動が発生し、1/4 次の概周期振動が観測された。

以上の結果、(9)式が安定限界を与えることが結論できる。なお、(9)式において α を $2\pi/m + \theta$ に近づけたとき、臨界ゲインは

$$KK_A = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{m}{2\pi} (1 + e^{\gamma(2\pi/m)})$$

となり(2)式と一致する。Fig. 4 を参照すると、(2)式は動作点を考慮しない場合の安定限界を与えることがわかる。

4. DC チョップパ形サイリスタ増幅器の場合の振動条件

4.1 振動の臨界条件

Fig. 1 と同様の構成の系において、DC チョップパ形サイリスタ増幅器を含む場合の振動条件を求める。ここで取り扱う DC チョップパは、チョップパ周期が一定で、チョップパのオフになる時刻が固定の場合を考える。Fig. 5 はサイリスタ増幅器の構成図と、1/2 次調波自励振動時のサイリスタ増幅器の出力波形と、1 次遅れ要素の出力波形を示す。サイリスタ増幅器の出力波形は完全な方形波と考えると、1 次遅れ要素の出力との関係は次式で与えられる。

$$T_1 \frac{dv}{dt} + v = E \{u(t-\tau) - u(t-T)\} \quad (10)$$

ここで、 E は電源電圧、 T はチョップパ周期、 τ はチョップパがオンになる時刻とする。

(10)式はチョップパの各周期毎に成立する。3.1 と同様の手順により、(10)式の解を求めた後、1/2 次の自励振動が存在するための境界条件を求める。さらに、チョップパのオンになる時刻を決定する式

$$K\{v_r - v(t)\} = E_s(1 - t/T) \quad (t = \tau)$$

ただし、 E_s は周期 T ののこぎり波状電圧の最大値を用いて、臨界ゲインの式を求めると、最終的につぎ

Fig. 5 Schematic diagram of thyristor amplifier and wave forms oscillation

のような式を得る。

$$KK_A = \frac{T_1}{T} \cdot \frac{1 - e^{-2T/T_1}}{\{2 - (1 + e^{-T/T_1})e^{(T-\tau)/T_1}\}e^{-T/T_1}} \quad (11)$$

ただし、 $K_A = E/E_s$: DC チョップパ形サイリスタ増幅器の直流ゲイン

(11)式はチョップパ通電時間に対する 1/2 次調波自励振動の臨界ゲインを与え、同式を満たすようなゲイン $KK_A > 0$ が存在すれば、振動を発生することを意味する。

4.2 実験結果および考察

Fig. 6 は(11)式による数値計算結果と実験結果を示す。図の実線の上側が振動の発生領域を示す。実験はフリップフロップ形のサイリスタチョップパを用い、負荷として演算増幅器を利用した 1 次フィルタの場合と誘導負荷の場合について行なった。実験の結果、不安定時には 1/2 次調波自励振動が発生することが確かめられた。順変換形の場合と異なり、臨界ゲインに保つと、微小な振動から徐々に振動が大きくなり、 τ_1 か τ_2 が T に近い値になったところで安定する。しかも、このとき出力平均値が増加することがわかった。この状態からさらにゲインを増加すると、順変換形の場合と同様、1/4 次やその概周期の振動に移行する。

4.1 ではチョップパ回路の転流コンデンサの影響を無視して、増幅器出力を完全な方形波として解析を行なっている。演算増幅器を利用したフィルタの場合は実負荷は抵抗であり、その値を小さくすることにより転流コンデンサの影響は無視することができる。Fig. 6 でも理論値と実験値がよく一致している。しかし、誘導負荷のときは動作点によって負荷電流が変化し、通電時間が小さいほど転流コンデンサの影響が現われやすくなる。図の $T_1/T = 1.6$ における実験結果はその一例であるが、負荷の定数は $L = 0.720$ H. $R = 55.2 \Omega$, 転流コンデンサは $C = 0.39 \mu\text{F}$, チョップパ周期 $T = 1/$

Fig. 6 Critical gain vs. time constants as parameter and duty factor

120 sec とした場合である。理論値との誤差は、転流コンデンサの影響により出力波形にピークが生じるためである。この誤差が問題になるような場合には、(11)式の通電時間 $T-\tau$ を等価通電時間³⁾とすることにより、近似的に補正することができる。Fig. 6 の点線はその補正後の理論値を示し、実験値ともよく一致している。

等価通電時間とは、転流コンデンサの影響により、チョップの通電時間が等価的に増加したと考えるものである。これによって実験値のほうが理論値より常によく一致することがわかるので、実際上その影響が問題になることは少ないものと思われる。さらに、転流コンデンサの容量を可能なかぎり減少させることによって、誤差を十分小さくすることが可能である。

以上の結果(11)式が安定限界を与えることが結論できる。なお、同式において $T-\tau$ を零に近づけた場合、臨界ゲインは(2)式と等しくなり、Fig. 6 を参照すると、(2)式は動作点を考慮しない場合の安定限界を与えることがわかる。

5. 結 言

誘導負荷時のサイリスタ増幅器を含む閉ループ系に発生する 1/2 次調波自励振動について考察した。その

結果を要約するとつぎのようになる。

(1) もとの閉ループ系と等価な PWM 制御系について安定性の検討を行い、1 次系の場合は 1/2 次調波自励振動が発生することを示した。

(2) 一般に m 相の順変換形の増幅器に対しては(9)式、DC チョップ形の増幅器に対しては(11)式により 1/2 次調波自励振動の臨界ゲインが求まることを示した。これらの式は比較的簡単な形をしており数値計算を容易に行なうことができる。種々の負荷定数に対し実験を行なった結果、理論式が厳密な臨界ゲインを与えること、さらに安定限界を与えるものであることを確かめた。

(3) 順変換形の増幅器については、出力側に放流用ダイオードが接続された場合には条件付安定であるが、接続されていない場合には無条件に安定である。

(4) DC チョップ形の増幅器については、転流コンデンサの影響による誤差が問題になる場合には、等価通電時間の考え方をを用いることにより(11)式を補正することが可能である。なお、最近転流コンデンサの影響の少ないチョップが実用化されつつある⁴⁾。

以上の結果から 1/2 次調波自励振動の防止策としては、順変換形の場合であれば相数を変更するか、DC チョップ形の場合であればチョップ周期を変える方法、場合によっては負荷にリアクトルを接続する方法など、負荷定数に応じて適当な方法を講じるならば、より安定な系を構成することができる。また、動作点を広範囲に変える必要のない場合には、その範囲を制限することによって無条件に安定な系にすることも可能である。本文の結果はこれらの防止策を実行する場合の資料を与える。

おわりに、本研究に対し有益なご助言を頂いた本学工学部助手入江寿一氏と、研究に協力頂いた卒研生活木義博君（現在、花王石鹸勤務）に謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) 池田・畑：サイリスタ増幅器を含む閉ループ系の 1/2 次調波自励振動，計測自動制御学会論文集，9-4，373/377 (1973)
- 2) Monroe: Digital Processes for Sampled Data Systems, 446, John Wiley & Sons (1962)
- 3) 入江，藤井，石崎：サイリスタチョップによる直流他励電動機の運転特性，電気学会誌，88-955, 675/683 (1968)
- 4) 入江，石崎：高周波サイリスタチョップ，計測自動制御学会論文集，9-6, 696/703 (1973)