状態依存性雑音を受ける変係数線形系の安定性[†]

丹 羽 昌 平*・早 勢 実*・杉 浦 一 郎*

Stability of Linear Time Varying Systems with State-Dependent Noise

Shohei NIWA*, Minoru HAYASE* and Ichiro SUGIURA*

The stability of linear time invariant systems with state dependent noise is considered by McLane and Kleinman, and a stabilizability condition is given by Wonham.

In this paper, exponential asymptotic stability with probability 1 and mean square stability of a linear time-varying system with Gaussian noise which is linearly dependent on the state variables are considered.

It is shown that the mean square stability implies the exponential asymptotic stability with probability 1 and that it also implies the stability of the system without noise.

As a result, a sufficient condition of mean square stability is given. Using this result a sufficient condition is given for the stabilizability by a state feedback of a linear time-varying control system with state and control dependent noise.

1. ま え が き

この論文では状態に線形に依存するガウス雑音を受ける変係数線形系の確率的な安定性について考察し安定であるための十分条件を示す。また状態および制御依存性の雑音を受ける線形制御系の線形フィードバックによる安定化可能性についても論ずる。

状態依存性のガウス雑音を受ける定係数線形系の安定性および安定化可能性については McLane⁷⁾ Kleinman⁹⁾ らが必要十分条件を得ている。また Wonham^{1), 2), 3)} はより確めやすい十分条件を得ており Haussmann⁴⁾ はその条件を改良している。

本稿では変係数線形系が状態変数に線形に依存するガウス雑音を受ける場合について確率1の指数漸近安定性および2乗平均安定性に関する考察を行なう。

結果として2乗平均安定ならば確率1で指数漸近安定であること、および雑音を受ける系が2乗平均安

定ならば雑音のない系は安定でなければならないことが示され、さらに2乗平均安定のための十分条件が与えられる。

またこの結果を用いて状態および制御変数に線形に依存するガウス雑音を受ける線形変係数制御系において線形フィードバック制御を行なう場合これによって2乗平均安定の意味で安定な系が構成できるための十分条件を与える。

2. において系の記述, 3. において確率1の安定性および乗平均安定性の定義を与え, 4. において安定性に関する考察を行ない主な定理を述べる。5. においては線形フィードバック制御による安定化可能性について述べる。6. で例題について従来の条件との比較を行なった。本文中 A' は行列 A の転置行列を示し, A, B が正方対称行列のとき $A > B$ (または $A \geq B$) により $A - B$ が正定 (または準正定) であることを示す。またベクトル x に対して $\|x\|$ により通常のユークリッドノルムを表わし $m \times n$ 行列 A に対して x を n 次元ベクトルとすると

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

により $\|A\|$ を定義する。

(A 1) … (A 7) は仮定 (または条件) を示す。

2. 系の記述

正規性の状態依存性雑音を受ける線形系のモデルとしてつぎの伊藤形の確率微分方程式で記述される系を考える。

$$dx = A(t)xdt + G(t, x)dw \quad (1)$$

$$t \in [t_0, \infty)$$

$$x(t_0) = x_0$$

ここで $x(t)$ は n 次元状態ベクトル $w(t)$ は正規化された l 次元ベクトル Wiener 過程, $A(t)$ は $n \times n$ 次元行列, $G(t, x)$ は次式で与えられる $n \times l$ 次元行列とする。

$$G(t, x) = \sum_{i=1}^n x_i G_i(t) \quad (2)$$

[†] 第15回自動制御連合講演会で発表 (昭47・11)

* 名古屋大学工学部 名古屋市千種区不老町

* Faculty of Engineering, Nagoya University, Nagoya
(Received July 20, 1973)

ここで $G_i(t)$ は $n \times l$ 次元行列, x_i はベクトル x の第 i 成分を表わす. $A(t)$, $G_i(t)$ の各成分は $[t_0, \infty)$ で連続かつ有界であるとする.

3. 安定性の定義

ここではこの論文において考察する安定性, すなわち確率1の指数漸近安定および2乗平均安定の定義を行なう.

【定義1】 (Kushner¹³⁾)

(1)式の0解が確率1で安定であるとはすべての正数 ρ および ε に対しある正数 $\delta(\rho, \varepsilon, t_0)$ が存在して $\|x_0\| < \delta(\rho, \varepsilon, t_0)$ ならば

$$P_{x_0, t_0} \left\{ \sup_{\infty > t \geq t_0} \|x(t)\| \geq \varepsilon \right\} \leq \rho \quad (3)$$

が成立することである.

ここで P_{x_0, t_0} は時刻 t_0 で状態 $x(t_0) = x_0$ が与えられたときの条件付確率を表わす.

【定義2】 (Kushner¹³⁾)

(1)式の0解が確率1で指数漸近安定であるとは, 0解が確率1で安定であって, すべての正数 λ に対してある正の定数 $K(\lambda, x_0)$ および a が存在して, すべての $T \geq t_0$ に対し

$$P_{x_0, t_0} \left\{ \sup_{\infty > t \geq T} \|x(t)\| \geq \lambda \right\} \leq K(\lambda, x_0) \exp[-a(T - t_0)] \quad (4)$$

が成立することである.

(1)式の解を $x(t)$ とし $X(t) = E(x(t)x'(t))$ とおくと $X(t)$ はつぎの行列微分方程式の解となる.

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= A(t)X(t) + X(t)A'(t) + \bar{\Pi}(t, X(t)) \\ X(t_0) &= E(x_0, x_0') \triangleq X_0 \geq 0 \end{aligned} \quad (5)$$

ここで

$$\bar{\Pi}(t, X(t)) \triangleq \sum_{i,j=1}^n [X(t)]_{ij} G_i G_j' \quad (6)$$

($[]_{ij}$ はマトリクスの (i, j) 要素を表わす).

【定義3】

(1)式の0解が2乗平均安定であるとは, 行列微分方程式(5)の0解が一樣漸近安定であることである.

(これは(5)式の0解が指数漸近安定であることと同等である)

4. 安定性に関する考察

以下では(1)式の系について確率1の指数漸近安定性および2乗平均安定性に関する考察を行なう.

つぎの定理は(1)式の系の0解が2乗平均安定であるための必要十分条件を示す.

《定理1》

(1)式の系の0解が2乗平均安定であるための必要

十分条件は Q をある $n \times n$ 次定数正定対称行列としつぎの $n \times n$ 次行列微分方程式

$$\begin{aligned} \dot{W}(t) + A'(t)W(t) + W(t)A(t) + \Pi(t, W(t)) + Q &= 0 \\ W(T) &= 0 \quad (t_0 \leq t \leq T) \end{aligned} \quad (7)$$

の解を $W(t, T)$ とするとき

$$\lim_{T \rightarrow \infty} W(t, T) = \bar{W}(t) \quad (8)$$

が存在して, $\bar{W}(t)$ は(7)式を満し

$$0 < w_1 I \leq \bar{W}(t) \leq w_2 I \quad (9)$$

となることである. (ここで w_1, w_2 はある定数とする)

ここで $\Pi(t, W(t))$ はその (i, j) 要素が次式で与えられる $n \times n$ 行列とする.

$$[\Pi(t, W(t))]_{ij} = \text{tr}[G_i'(t)W(t)G_j(t)]$$

(証明) (必要性)

$n \times n$ 行列 U の (i, j) 要素 u_{ij} を並べたベクトルを $\hat{U}$ で表わす. すなわち $\hat{U}' = (u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1n}, u_{21}, \dots, u_{2n}, \dots, u_{n1}, \dots, u_{nn})$ となる. $\hat{U}$ の $R^{n \times n}$ のノルムを $|\hat{U}|$ で表わすと $|\hat{U}|^2 = \text{tr}(UU')$ また

$$\begin{aligned} \|U\|^2 &= \lambda_{\max}(UU') \leq \text{tr}(UU') \leq n \lambda_{\max}(UU') \\ &= n \|U\|^2 \end{aligned}$$

($\lambda_{\max}(UU')$ は UU' の固有値の最大値を示す)により

$$\|U\| \leq |\hat{U}| \leq \sqrt{n} \|U\| \quad (10)$$

(5)式をベクトルで表わした微分方程式を

$$\dot{\hat{X}}(t) = a(t)\hat{X}(t) \quad \hat{X}(t_0) = \hat{X}_0 \quad (11)$$

とする (ここで $a(t)$ は $n^2 \times n^2$ 行列).

$$\dot{U}(t) + A'(t)U(t) + U(t)A(t) + \Pi(t, U(t)) = 0$$

$$U(T) = U_T \quad (12)$$

なる行列微分方程式の解 $U(t)$ を考える.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\hat{X}'(t)\hat{U}(t)) &= \frac{d}{dt} \text{tr}(X(t)\dot{U}(t)) = \text{tr}[\dot{X}(t)U(t) \\ &+ X(t)\dot{U}(t)] = \text{tr}[A(t)X(t)U(t) \\ &+ X(t)A'(t)U(t) + \bar{\Pi}(t, X(t))U(t) \\ &+ X(t)\dot{U}(t)] = \text{tr}[X(t)(\dot{U}(t) + A'(t)U(t) \\ &+ U(t)A(t) + \Pi(t, U(t)))] = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

((5)式(12)式および付録による)

したがって $\hat{U}(t)$ は, (11)式の随伴微分方程式の解となる. すなわち $\hat{U}(t)$ は次式を満す.

$$\dot{\hat{U}}(t) + a'(t)\hat{U}(t) = 0 \quad (14)$$

ゆえに(7)式の解 $W(t)$ のベクトル表示 $\hat{W}(t)$ は

$$\begin{aligned} \dot{\hat{W}}(t) + a'(t)\hat{W}(t) + \hat{Q} &= 0 \\ \hat{W}(T) &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

の解となる.

(11)式に対する遷移行列を $\Phi_a(t, s)$ とすると

$$\hat{W}(t, T) = \int_t^T \Phi_a(s, t) \hat{Q} ds \quad (16)$$

(5)式で $X_0=Q$ とおくと一様漸近安定性により

$$|\Phi_a(s, t)\hat{Q}| \leq c_1 e^{-c_2(s-t)} \quad (17)$$

ゆえに

$$\|W(t, T)\| \leq |\hat{W}(t, T)| \leq \int_t^T |\Phi_a(s, t)\hat{Q}| ds \leq w_2 \quad (18)$$

となるある数 w_2 が存在する。また $W(t, T)$ が T について単調非減少であるから $\bar{W}(t)$ が存在し

$$\bar{W}(t) \leq w_2 I \quad (19)$$

また, $\bar{W}(t) \geq 0$ により $\Pi(t, \bar{W}(t)) \geq 0$ だから(注1), $\dot{x} = A(t)x$ の遷移行列を $\Phi(t, s)$ とすると

$$\begin{aligned} \bar{W}(t) &= \int_t^\infty \Phi'(s, t) \{ \Pi(s, \bar{W}(s)) + Q(s) \} \Phi(s, t) ds \\ &\geq \int_t^\infty \Phi'(s, t) Q(s) \Phi(s, t) ds \end{aligned} \quad (20)$$

$A(t)$ の有界性により (Brockett¹²⁾ p. 204)

$$\hat{W}(t) \geq w_1 I \quad (21)$$

また

$$W(t) = \int_t^\infty \Phi_a(s, t) Q ds \quad (22)$$

は(15)式を満す, したがって $\bar{W}(t)$ は(7)式を満す。(十分性)

(5)式に対する Liapunov 関数として

$$U(X) = tr[\bar{W}(t)X(t)] \quad (23)$$

とおくと, $X_0 \geq 0$ のとき $X(t) \geq 0$ だから

$$w_1 tr X \leq V(X) \leq w_2 tr X \quad (24)$$

また $X(t)$ は対称だから

$$\|X\| \leq tr X \leq n \|X\| \quad (25)$$

したがって

$$w_1 \|X\| \leq V(X) \leq n w_2 \|X\| \quad (26)$$

ゆえに $\|X\| \rightarrow \infty$ のとき $V(X) \rightarrow \infty$

また $X=0$ のときのみ $V(X)=0$

また(5)式の解 $X(t)$ にそう $V(X)$ の時間微分 $\dot{V}_{(5)}(X)$ は

$$\begin{aligned} \dot{V}_{(5)}(X) &= tr[\dot{\bar{W}}(t)X(t) + \bar{W}(t)\dot{X}(t)] \\ &= tr[\dot{\bar{W}}(t)X(t) + \bar{W}(t)(A(t)X(t) + X(t)A'(t) \\ &\quad + \bar{\Pi}(t, X(t)))] \\ &\text{(付録により)} \\ &= tr[(\dot{\bar{W}}(t) + \bar{W}(t)A(t) + A'(t)\bar{W}(t) \\ &\quad + \bar{\Pi}(t, \bar{W}(t)))X(t)] \\ &= -tr[QX(t)] \leq -q_1 tr X(t) \end{aligned} \quad (27)$$

(q_1 はある正の定数)

$X(t)$ の対称性により $X(t) \neq 0$ のとき $tr X(t) > 0$

ゆえに $X \neq 0$ のとき

(注1) Wonham²⁾ 定理 2.1 参照

$$\dot{V}_{(5)}(X) < 0 \quad (28)$$

これから(1)式の系の0解は2乗平均安定となる。

(q. e. d.)

つぎに2乗平均安定性と確率1の指数漸近安定性との関係について考察する。

$V(x, t)$ を x について2回 t について1回連続微分可能な実数値関数とすると(1)式の解 $x(t)$ に対する Differential generator は次式により与えられる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V(x, t) &= V_t(x, t) + x' A' V_x(x, t) \\ &\quad + \frac{1}{2} tr[G(t, x)' V_{xx}(x, t) G(t, x)] \end{aligned} \quad (29)$$

(ここで V_x はベクトル $[\partial V / \partial x_i]$, V_{xx} はマトリクス $[\partial^2 V / \partial x_i \partial x_j]$ を表わす)

(A1)

ある x について2回, t について1回連続微分可能な実数値関数 $V(x, t)$ が存在して, $(x \in R^n, t \in [t_0, \infty))$

$$\alpha_1 \|x\|^2 \leq V(x, t) \leq \alpha_2 \|x\|^2 \quad (30)$$

$$\mathcal{L}V(x, t) \leq -\beta \|x\|^2 \quad (31)$$

(ここで $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ は正の定数)

となる。

[補題 1]

(A1)が成立すれば(1)式の系の0解は確率1で指数漸近安定となる。

(証明) 定係数系の確率1の漸近安定性に関する定理(Kushner¹³⁾) とほぼ同様であるので省略する。

[補題 2]

(1)式の系の0解が2乗平均安定ならば(A1)が成立する。

(証明) 定理1により(7), (9)式を満す $\bar{W}(t)$ が存在する。

$$V(x, t) = x' \bar{W}(t) x \quad (32)$$

とおくと(9)式により

$$w_1 \|x\|^2 \leq V(x, t) \leq w_2 \|x\|^2 \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V(x, t) &= x' [\dot{\bar{W}}(t) + A'(t)\bar{W}(t) + \bar{W}(t)A(t)] x \\ &\quad + tr[G(t, x)' \bar{W}(t) G(t, x)] \\ &= x' [\dot{\bar{W}}(t) + A' \bar{W}(t) + \bar{W}(t) A(t)] x \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i tr[G_i'(t) \bar{W}(t) G_j(t)] x_j \\ &= x' [\dot{\bar{W}}(t) + A'(t)\bar{W}(t) + \bar{W}(t)A(t) \\ &\quad + \Pi(t, \bar{W}(t))] x = -x' Q x \leq -q_1 \|x\|^2 \end{aligned} \quad (34)$$

(ここで q_1 はある正の定数)

ゆえに (A1) が成立する。(q. e. d.)

補題 1, 2 により, つぎの定理が得られる。

《定理 2》

(1) 式の系の 0 解が 2 乗平均安定であるならば確率 1 で指數的漸近安定である。

以下では 2 乗平均安定性について考察し定理 3.4 において 2 乗平均安定のための十分条件を与えるがこれは定理 2 によって確率 1 の指數的漸近安定性の十分条件にもなる。

つぎの補題 3 は (1) 式の系の 0 解が 2 乗平均安定ならば $w(t)=0$ とおいた雑音のない系の 0 解は一樣漸近安定でなければならないという直観的に明らかな事実である。

(A2)

常微分方程式

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad (35)$$

$$x(t_0) = x_0$$

の 0 解が一樣漸近安定である。

[補題 3]

(1) 式の系の 0 解が 2 乗平均安定であるならば (A2) が成立する。

(証明)

定理 1 により (7), (9) 式を満たす $\bar{W}(t)$ が存在する。

$$V(x, t) = x' \bar{W}(t) x \quad (36)$$

とおくと

$$w_1 \|x\|^2 \leq V(x, t) \leq w_2 \|x\|^2 \quad (37)$$

(35) 式の解にそう。 $V(x, t)$ の微分 $\dot{V}_{(35)}(x, t)$ は

$$\begin{aligned} \dot{V}_{(35)}(x, t) &= x' [\bar{W}(t) + A'(t)\bar{W}(t) + \bar{W}(t)A(t)]x \\ &= -x' [Q + \Pi(t, \bar{W}(t))]x \\ &\leq -x' Q x < -q_1 \|x\|^2 \end{aligned} \quad (38)$$

((7) 式および $\Pi(t, \bar{W}(t)) \geq 0$ による)

これから (A2) が成立することがわかる。(q. e. d.)

(A3)

(A2) が成立するとき (35) 式に対する遷移行列を $\Phi(t, \tau)$, $Q(t)$ を次式を満たす連続な $n \times n$ 対称行列とし,

$$q'I \leq Q(t) \leq q_2 I \quad (\text{ここで } q_1, q_2 \text{ はある正の定数}) \quad (39)$$

$$S(t) = \int_t^\infty \Phi'(\tau, t) Q(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau \quad (40)$$

とするとき, ある定数 ε が存在し

$$Q(t) - \Pi(t, S(t)) \geq \varepsilon I > 0 \quad (\forall t \in [t_0, \infty)) \quad (41)$$

が成り立つ。

《定理 3》

(A3) が成立するならば (1) 式の系の 0 解は 2 乗平均である。

(証明) (5) 式に対する Liapunov 関数として

$$V(X) = \text{tr}[S(t)X(t)] \quad (42)$$

とおくと $X_0 \geq 0$ のとき $X(t) \geq 0$ およびある定数 s_1, s_2 が存在して $0 < s_1 I \leq S(t) \leq s_2 I$ となることから定理 1 の証明と同様にして $V(X) \geq 0, \|X\| \rightarrow \infty$ のとき $V(X) \rightarrow \infty, X=0$ のときのみ $V(X)=0$

また (5) 式の解 $X(t)$ にそう $V(X)$ の時間微分 $\dot{V}_{(5)}(X)$ は

$$\begin{aligned} \dot{V}_{(5)}(X) &= \text{tr}[\dot{S}(t)X(t) + S(t)\dot{X}(t)] \\ &= \text{tr}[\dot{S}(t)X(t) + S(t)(A(t)X(t) \\ &\quad + X(t)A'(t) + \Pi(t, X(t)))] \end{aligned}$$

(付録により)

$$\begin{aligned} &= \text{tr}[(\dot{S}(t) + S(t)A(t) + A'(t)S(t) \\ &\quad + \Pi(t, S(t)))X(t)] \end{aligned} \quad (43)$$

$S(t)$ はつぎの微分方程式を満たす。

$$\dot{S}(t) + S(t)A(t) + A'(t)S(t) + Q(t) = 0 \quad (44)$$

したがって

$$\dot{V}_{(5)}(X) = -\text{tr}[(Q(t) - \Pi(t, S(t)))X(t)] \quad (45)$$

(A3) により

$$\dot{V}_{(5)}(X) \leq -\varepsilon \text{tr} X(t) < 0 \quad (X(t) \neq 0 \text{ のとき}) \quad (46)$$

これから (1) 式の系の 0 解は 2 乗平均安定となる。

(q. e. d.)

(A4)

(A2) が成立するとし (40) 式の $S(t)$ 中 $Q(t)=I$ とおいたものを $S_1(t)$ とするとき

$$\|\Pi(t, S_1(t))\| \leq 1 - \varepsilon \quad (\forall t \in [t_0, \infty)) \quad (47)$$

(ここで ε は $0 < \varepsilon < 1$ なるある定数とする)

が成立する。

《定理 4》

(A4) が成立すれば (1) 式の系の 0 解は 2 乗平均安定となる。

(証明) $Q(t)=I$ とすると (A3) 中 (41) 式は

$$I - \Pi(t, S_1(t)) \geq \varepsilon I > 0 \quad (48)$$

となる (47) 式が成立すれば (48) 式が成立する (q. e. d.)

以下では (1) 式が定係数の場合すなわち A および G_i が定数行列の場合について 0 解の 2 乗平均安定性について考察する。

定理 1 の系としてつぎが得られる。

[系 1] (McLane²⁾)

定係数の場合 (1) 式の系の 0 解が 2 乗平均安定であるための必要十分条件は Q を任意の $n \times n$ 次正定対称行列とするときつぎの一次代数方程式

$$A'W + WA + \Pi(W) + Q = 0 \quad (49)$$

の解で正定対称な行列 W が存在することである。

(証明)

定係数の場合定理 1 の条件を満たす $\bar{W}(t)$ は定数行列 $\bar{W}$ となり (49) 式の解となる。逆に (49) の正定対称な解 W が存在すれば $\bar{W}(t)=W$ となる (Wonham²⁾)。

(q. e. d.)

定係数の場合定理 4 (A4) の条件はつぎのようになる。(A4')

A が安定な行列 (固有値の実数部がすべて負の行列) であって

$$\| \Pi \left(\int_0^\infty e^{A't} e^{A't} dt \right) \| < 1 \quad (50)$$

が成立する。

5. 状態および制御依存性雑音を受ける変係数線形系の安定化

5.1 系の記述

状態および制御依存性の正規性雑音を受ける線形系のモデルとしてつぎの確率微分方程式で記述される系を考える。

$$dx = (A(t)x + B(t)u)dt + C(t, u)dw_1 + D(t, x)dw_2 \quad (51)$$

$$t \in [t_0, \infty)$$

$$x(t_0) = x_0$$

ここで x, u は n 次元 m 次元の状態および制御ベクトル $w_i(t)$ ($i=1, 2$) は独立な正規化された l_i 次元ベクトル wiener 過程 $A(t), B(t)$ は $n \times n, n \times m$ 次元行列 $C(t, u)$ および $D(t, x)$ は次式で与えられるとする。

$$C(t, u) = \sum_{i=1}^m u_i C_i(t) \quad (52)$$

$$D(t, x) = \sum_{i=1}^n x_i D_i(t) \quad (53)$$

ここで $C_i(t)D_i(t)$ は $n \times l_1, n \times l_2$ 次元行列, u_i, x_i は u と x の第 i 成分を表わす。

$A(t), B(t), C_i(t), D_i(t)$ は $t \geq t_0$ で連続かつ有界であるとする。

5.2 線形フィードバックによる安定化

ここでは (51) 式で記述されるような系において u として線形フィードバック制御を用いたときの 2 乗平均安定の意味の安定化可能性について考察する。

線形フィードバック制御としては $K(t)$ をある $t \geq t_0$ で連続有界な $m \times n$ 行列とし,

$$u(t) = -K(t)x(t) \quad (54)$$

で表わされるものを考える。

安定性としては定義 3 で述べた 2 乗平均安定性を考えるが定理 2 によりここで与える十分条件は確率 1 の指数漸近安定性の十分条件にもなる。

R をある $n \times n$ 行列とすると $m \times m$ 行列 $\Gamma(t, R)$ および $n \times n$ 行列 $\Delta(t, R)$ をその (i, j) 要素 $[\Gamma]_{ij}$ が次式で与えられる行列とする。

$$[\Gamma(t, R)]_{ij} = tr[C_i(t)' R C_j(t)] \quad (55)$$

$$[\Delta(t, R)]_{ij} = tr[D_i(t)' R D_j(t)] \quad (56)$$

また R_1 をある $m \times m$ 行列とするとき $n \times n$ 行列 $\bar{\Gamma}(t, R_1), \bar{\Delta}(t, R)$ を次式のように定義する。

$$\bar{\Gamma}(t, R_1) = \sum_{ij} [R_1]_{ij} C_i(t) C_j'(t) \quad (57)$$

$$\bar{\Delta}(t, R) = \sum_{ij} [R]_{ij} D_i(t) D_j'(t) \quad (58)$$

$u(t)$ (54) 式のようにおいたときの (51) 式の解を $x(t)$ とし, $X(t) = E(x(t)x'(t))$ とすると, $x(t)$ は次式の解となる。

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) = & (A(t) - B(t)K(t))X(t) \\ & + X(t)(A(t) - B(t)K(t))' \\ & + \bar{\Gamma}(t, K(t)X(t)K'(t)) + \bar{\Delta}(t, X(t)) \end{aligned} \quad (59)$$

$$X(t_0) = E(x_0 x_0') = X_0 \geq 0$$

(A5)

ある $t \geq t_0$ で連続, 有界な $m \times n$ 行列 $K(t)$ が存在して微分方程式

$$\dot{x} = (A(t) - B(t)K(t))x \quad (60)$$

の 0 解が一様漸近安定となる。

(A6)

(A5) が成立するとき $Q(t)$ を次式を満たす連続な $n \times n$ 対称行列とし

$$q_1 I \leq Q(t) \leq q_2 I \quad (\text{ここで } q_1, q_2 \text{ はある正の定数}) \quad (61)$$

$$S_K(t) \triangleq \int_t^\infty \Phi_K'(\tau, t) Q(\tau) \Phi_K(\tau, t) d\tau \quad (62)$$

により $S_K(t)$ を定義する。

(ここで $\Phi_K(\tau, t)$ は (60) 式に対する遷移行列とする) このときある定数 $\epsilon (0 < \epsilon < 1)$ が存在し

$$\begin{aligned} Q(t) - [K'(t)\Gamma(t, S_K(t))K(t) \\ + \Delta(t, S_K(t))] \geq \epsilon I > 0 \quad (\forall t \in [t_0, \infty)) \end{aligned} \quad (63)$$

が成立する。

《定理 5》

(A6) が成立するとき (51) 式において $u(t) = -K(t)x(t)$ とおいた系の 0 解は 2 乗平均安定となる。

(証明)

(51) 式において $u = -K(t)x$ とおいた系に対して

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \quad G(t, x) = (C(t, K(t)x) \quad D(t, x)) \quad (64)$$

とおいて 4 の結果を用いる。

$$C(t, K(t)x) = \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^m C_r(t) [K(t)]_{r,i} x_i \quad (65)$$

であるから

$$G_i(t) = \left(\sum_{r=1}^m C_r(t) [K(t)]_{r,i} \quad D_i(t) \right) \quad (66)$$

したがって,

$$\begin{aligned}
& [\Pi(t, S_K(t))], \\
& = tr \left[\sum_{r,s=1}^m [K(t)]_{r,s} [K(t)]_{s,r} C_r(t) S_K(t) C_s'(t) \right] \\
& \quad + tr [D_r(t) S_K(t) D_r'(t)] \quad (67) \\
& = \sum_{r,s=1}^m [K(t)]_{r,s} [\Gamma(t, S_K(t))]_{r,s} [K(t)]_{s,r} \\
& \quad + [\Delta(t, S_K(t))], \quad (68)
\end{aligned}$$

ゆえに,

$$\Pi(t, S_K(t)) = K'(t) \Gamma(t, S_K(t)) K(t) + \Delta(t, S_K(t)) \quad (69)$$

したがって (A3) の条件は (A6) となる (q. e. d.)

定係数の場合, (A6) の条件はつぎようになる。

(A6')

(A, B) が安定化可能 (Wonham²⁾) (たとえば (A, B) が可制御ならば安定化可能である) であってある $n \times n$ 正定対称行列 Q およびある $m \times n$ 行列 K が存在して

$$\begin{aligned}
& K' \Gamma \left(\int_0^\infty e^{(A-BK)'t} Q e^{(A-BK)t} dt \right) K \\
& + \Delta \left(\int_0^\infty e^{(A-BK)'t} Q e^{(A-BK)t} dt \right) < Q \quad (70)
\end{aligned}$$

が成立する。

(A6') の条件は Wonham の与えた十分条件^{1), 2), 3)}

(A7)

(A, B) が安定化可能であって

$$\inf_K \left\| \int_0^\infty e^{(A-BK)'t} [K' \Gamma(I) K + \Delta(I)] e^{(A-BK)t} dt \right\| < 1 \quad (71)$$

が成立する

とはやや異なっている。両者の関係については例題で論ずる。

6. 例題による検討

[例題 1]

(1) 式に対応して次式で記述される定係数系を考える。

$$dx = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x dt + \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} x_1 dw_1 \quad (E1)$$

定理 3 を用いてこの系の安定性を調べる。(49) 式の Q としてつぎの定数行列を考える。($q_1 > 0$, $q_2 > 0$)

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix} \quad (E2)$$

(40) 式の S は定数行列で

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} q_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} q_2 \end{bmatrix} \quad (E3)$$

(41) 式中 $\Pi(t, S(t))$ も定数行列で

$$\Pi = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} q_1 \alpha^2 + \frac{1}{4} q_2 \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (E4)$$

(41) 式は結局, 次式になる

$$\frac{1}{2} q_1 \alpha^2 + \frac{1}{4} q_2 \beta^2 < q_1 \quad (E5)$$

上式が成立するためには

$$\frac{1}{2} \alpha^2 < 1 \quad (E6)$$

が必要であるが β は制限がない (q_2 を十分小さい正数にとればよいから) すなわち (E6) が成立すれば (E1) の系は二乗平均安定となる。Wonham の安定定理¹⁾⁻³⁾ では $1/2(\alpha^2 + \beta^2) < 1$ という条件しか得られない。

[例題 2]

(51) 式に対応して次式で記述される定係数系を考える。

$$\begin{aligned}
dx &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x dt + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u dt + \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix} u dw_1 \\
& + \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma \end{bmatrix} x_1 dw_2 \quad (E7)
\end{aligned}$$

定理 5 を用いてこの系の安定化可能性を調べる。雑音のない系は $u = -kx_1$ ($k > 1$ とする) で安定化できるのでこれを u として用いる。

(61) 式の Q として (E2) と同じものを考えると (62) 式の S_K は定数行列となり

$$S_K = \begin{bmatrix} \frac{q_1}{2(k-1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} q_2 \end{bmatrix} \quad (E8)$$

(63) 式は

$$\begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} \frac{1}{2} (\gamma^2 + k^2 \alpha^2) q_2 + \frac{\beta^2 q_1}{2(k-1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (E9)$$

となり結局次式が得られる。

$$\frac{\beta^2 q_1}{2(k-1)} + \frac{1}{2} (\gamma^2 + k^2 \alpha^2) q_2 < q_1 \quad (E10)$$

α, β, γ が与えられたときに k を十分大きくまた q_2 を十分小さくすれば (E10) が成立するようにできる。したがってすべての実数 α, β, γ に対して (E7) は安定化可能である。これは Hansmann⁴⁾ の中に使われている例題であって得られた結果は同じである。しかし Wonham の定理¹⁾⁻³⁾ では, $\alpha^2 < 1/2$ が少なくとも要求される⁴⁾。

例題 1 に関する限り定理 3 の条件は Wonham¹⁾⁻³⁾

の条件よりもすぐれており、例題2に関する限り定理5の条件は Wonham の条件よりもすぐれており Hanssmann⁴⁾の条件と同じ結果を与える。しかし Hanssmann の条件は複雑であるのに比べ本稿で与えた条件は直観的に理解しやすい。また変係数系が取り扱える利点がある。

Sunahara, et. al.¹⁴⁾も状態依存性雑音を受ける系の安定性を考察しているが状態依存性雑音を表わす項が $x\sigma dw$ (x, σ は列および行ベクトル) のような形のものに限定されているのでここで取上げた例題1, 2のような形の系が取扱えず状態依存性雑音を受ける線形系の理論としては一般性がない。

7. あとがき

状態に線形に依存するガウス雑音を受ける変係数線形系の安定性について考察し、2乗平均安定のための十分条件を与えた。この条件は雑音のない系が安定であって雑音の大きさが十分小さければ系は安定であることを示している。

また状態および制御変数に線形に依存する変係数線形制御系が線形フィードバックにより2乗平均安定にできるための十分条件を示した。これは雑音のない系が安定化できて雑音の大きさを十分小さくできれば制御系を安定化できることを示す。

定係数の場合 Wonham の十分条件について Hanssmann が改良された十分条件を与えているが、本論文で与えた十分条件についてもより改良して必要十分条件にできるだけ近い条件を求めることが望まれる。

参 考 文 献

- 1) W.M. Wonham: Optimal Stational Control of a Linear System with State-dependent Noise, SIAM J. Control, 5-3, 486/500 (1967)
- 2) W.W. Wonham: On a Matrix Riccati Equation of Stochastic Control, SIAM J. Control, 6-4, 681/697 (1968)
- 3) W.W. Wonham: Random Differential Equations in Control Theory, Probability Methods in Applied Mathematics, A T. Bharucha-Reid ed., Academic

Press (1970)

- 4) U.G. Haussmann: Optimal Stationary Control with state and Control Dependent Noise, SIAM J. Control, 9-2, 184/198 (1971)
- 5) P.J. McLane: Optimal Regulator Problem for a Stationary Linear System with State-Dependent Noise, Trans. ASME, Series D, 92, 363/368 (1970)
- 6) P.J. McLane: Linear Optimal Control of a Linear System with State and Control Dependent Noise, Trans. ASME, Series G, 94, 34/39 (1972)
- 7) P.J. McLane: Asymptotic Stability of Linear Autonomous Systems with State-dependent Noise, IEEE Trans., AC-14-6, 754/755 (1969)
- 8) T. Nakamizo: A Simpler Mean-square Stability Criterion for a Class of Linear Stochastic Systems, IEEE Trans., AC-14-5, 584/585 (1969)
- 9) D.L. Kleinman: On the Stability of Linear Stochastic Systems, IEEE Trans., AC-14-4, 429/430 (1969)
- 10) R.E. Kalman, J.E. Bertram: Control System Analysis and Design via the Second Method of Lyapunov I. Continuous Time Systems, Trans. ASME, 82 D, 371/393 (1960)
- 11) R.E. Kalman: Contributions to the Theory of Optimal Control, Bol. Soc. Mat. Mexicana, 102/119 (1960)
- 12) R.W. Brockett: Finite Dimensional Linear Systems, John Wiley and Sons (1969)
- 13) H.J. Kushner: Stochastic Stability and Control, Academic Press (1967)
- 14) Y. Sunahara, et al.: On Stochastic Controllability for Nonlinear Systems, IEEE Trans., AC-19, 49/54 (1974)

《付 録》

$(tr[X(t)\Pi(t, U(t))]=tr[\Pi(t, U(t))X(t)]$ の証明)

$$\begin{aligned}
 & tr[X(t)\Pi(t, U(t))] \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [X(t)]_{ij} [\Pi(t, U(t))]_{ji} \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [X(t)]_{ij} tr[G_i'(t)U(t)G_j(t)] \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [X(t)]_{ij} tr[G_j(t)G_i'(t)U(t)] \\
 &= tr\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [X(t)]_{ij} G_j(t)G_i'(t)U(t)\right] \\
 &= tr[\Pi(t, X(t))U(t)]
 \end{aligned}$$