振幅変調および強度変調レーザ光の出力 SN 比

大 下 真二郎*・森 永 規 彦**・滑 川 敏 彦**

Output Signal-to-Noise Ratios for Amplitude and Intensity Modulated Lasers

Shinjiro OSHITA*, Norihiko MORINAGA** and Toshihiko NAMEKAWA**

The general expressions of the autocorrelation function and the output SNR of a photodetector are derived for a coherent laser either amplitude or intensity modulated by a stationary Gaussian random modulating signal in the presence of background light. Two types of the modulating signal are considered: the baseband and the bandpass modulating signals. The effects of the center frequency of the modulating signal, the modulation degree, the effective average quantum rate, the wave interaction noise, the shot noise, the modulation method, and the input CNR on the output SNRs are discussed. It is shown that the output SNRs increase as the modulation degree, the effective average quantum rate, and the input CNRs become large. The bandpass modulating signal is better than the baseband modulating signal when the effective average quantum rate and input CNRs are large.

It is also shown that the intensity modulation is superior to the amplitude modulation only for the baseband modulating signal case with large effective average quantum rate and large input CNR. This paper gives results useful for the field of laser communication.

1. ま え が き

レーザ応用は非常に広い分野にわたるものであるが、その内、レーザ計測、レーザ通信などの分野においては、時間的に変動する何らかの信号（情報）によって変調された、いわゆる被変調レーザ光を取扱う場合が多い。この場合、最も多いのが AM 系^(注1)であるが、AM 系は普通、振幅変調と強度変調とに分類される。また信号処理の観点からすれば、アナログ AM 系とデジタル AM 系とにわけることができる。

る。このように分類して考えた場合、ディジタル AM 系に関しては通信分野と関連して、その方式、特性についてかなり詳しく解析され、報告された文献も相当数にのぼっている^{1)~5)}。

ところで一方アナログ AM 系に関しては通信および計測分野においてよくみうけられ、たとえば変調周波数を用いた測距方式⁶⁾、マイケルソン形干渉計を用いた精密測長方式⁷⁾、においてもレーザ光の強さは変調を受けているし、あるいはまた、同期方式を採用した微弱光検出方式におけるアナログ処理⁸⁾、実時間光相関器^{9), 10)}などもアナログ AM 系とみなせる。このように計測分野においてはアナログ AM 系が非常に多いわけであるが、その反面、アナログ AM 系に対する光検波特性に関しては、復調信号出力に対してショット雑音のみを考慮した近似的な特性しか求められていない¹¹⁾、被変調レーザ光と背景雑音光との光検波器における相互変調作用や波動干渉雑音の影響、あるいは振幅変調と強度変調との光検波出力における違いなどすべて不明瞭なままで、出力 SN 比をより厳密に論じるには不十分な状況にある。

本論文では以上のことを念頭において、アナログ AM 系に対し、被変調レーザ光と背景雑音光とが光検波器の入力となる場合の出力 SN 比について、一般的並びに数値解析を行なってより厳密に出力 SN 比の特性を論じている。すなわち、変調信号として、0 周波数近傍にスペクトル分布を有するベースバンド変調信号および高い中心周波数のまわりにスペクトル分布を有するバンドパス変調信号の二種類を仮定し、変調度、実効光子数、入力 CN 比、の各パラメータや、波動干渉雑音、ショット雑音、あるいは変調信号の種類の違いや、振幅変調と強度変調の違い、などが出力 SN 比にいかに関与を及ぼすかを詳しく解析し、アナログ AM 系を対象としたレーザ計測の出力特性に関する評価の際の有用な資料を与えている。なお本

* 信州大学工学部 長野市若里 500

** 大阪大学工学部 吹田市字山田上

* Faculty of Engineering, Shinshu University, Nagano

** Faculty of Engineering, Osaka University, Suita
(Received November 8, 1972)

(注 1) 本論文では振幅変調と強度変調をまとめて AM 系と呼ぶことにする。

論文では、変調信号として一般的にランダム信号を仮定しているが、たとえ周期的な正弦信号を扱おう場合でも、本論文で得られた結果と本質的な差異はない。

2. 振幅変調レーザ光に対する出力 S N 比

2.1 一般的解析

Fig. 1 に示されているアナログ AM レーザ系の光検波器の入射電界 $V(t)$ は振幅変調レーザ光と背景雑音光とからなっており、次式で表わされる¹²⁾。

$$V_A(t) = (1 + V_s(t))V_x(t) + V_n(t) \quad (1)$$

ここに、実関数 $V_s(t)$ は変調信号であって平均値 0 の定常からプロセス、また複素電界 $V_x(t)$, $V_n(t)$ はレーザ光および背景雑音光を示しており、これらすべては統計的に独立であるとする。

また本論文では過変調はないものとして $1 + V_s(t) \geq 0$ と仮定するが、ガウス形ランダム変調信号の場合にはその平均電力 P_s が 9^{-1} より小さければ $1 + V_s(t) < 0$ となる確率はわずかに 0.136% 以下に過ぎず過変調はないものとみて差支えないので、以下 $P_s \leq 9^{-1}$ として解析を進めることにする。

このような入射電界 $V_A(t)$ に対する瞬時強度 $I_A(t)$ および平均強度 $\langle I_A(t) \rangle$ はつぎのように与えられる

$$\begin{aligned} I_A(t) &= V_A^*(t)V_A(t) = (1 + V_s(t))^2 V_x^*(t)V_x(t) \\ &\quad + V_n^*(t)V_n(t) + (1 + V_s(t))(V_x^*(t)V_n(t) \\ &\quad + V_x(t)V_n^*(t)) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\langle I_A(t) \rangle = \langle V_A^*(t)V_A(t) \rangle = (1 + P_s)\langle I_x(t) \rangle + \langle I_n(t) \rangle \quad (3)$$

ただし、 $*$, $\langle \rangle$ は複素共役および平均操作を意味し、 $\langle I_x(t) \rangle$, $\langle I_n(t) \rangle$ はそれぞれレーザ光と背景雑音光に対する平均強度を示しており次式で与えられる。

$$\langle I_x(t) \rangle = \langle V_x^*(t)V_x(t) \rangle \quad (4)$$

$$\langle I_n(t) \rangle = \langle V_n^*(t)V_n(t) \rangle \quad (5)$$

つぎに、この入射光電界に対する光検波器の応答について考え、出力電流に対する自己相関関数を導く。光検波器の出力電流は入射光強度に比例した確率で放出される光電子によって生じると考えられる。

いま時刻 t から $t + \delta t$ の間に一つの光電子が放出される確率は、入射光の平均強度 $\langle I_A(t) \rangle$ に関して

$$P_1(t)\delta t = \frac{1}{2}\alpha\langle I_A(t) \rangle\delta t \quad (6)$$

Fig. 1 Optical detection system for amplitude and intensity modulated laser

で与えられる¹²⁾。ただし、係数 $1/2$ は電力と強度との比を示すものであり、また光検波器の感度 α は次式で与えられる

$$\alpha = \frac{\eta}{hF_0} \quad \begin{array}{l} \eta: \text{量子効率} \quad h: \text{プランク定数} \\ F_0: \text{レーザ周波数} \end{array} \quad (7)$$

一般には、時刻 $t_1, t_2, \dots, t_L$ と $t_1 + \delta t_1, t_2 + \delta t_2, \dots, t_L + \delta t_L$ のそれぞれの間に放出される L 個の光電子に関する結合確率は

$$\begin{aligned} P_L(t_1, t_2, \dots, t_L, \delta t_1, \delta t_2, \dots, \delta t_L) \\ = 2^{-L}\alpha^L \langle I_A(t_1)I_A(t_2)\dots I_A(t_L) \rangle \delta t_1 \delta t_2 \dots \delta t_L \end{aligned} \quad (8)$$

で示される。いまこれらの光電子による電流パルスを近似的にデルタ関数で表示すれば、光検波器からの出力電流 $y(t)$ は

$$y(t) = e \sum_j \delta(t - t_j) \quad (9)$$

で表わされる。ただし、 e は電子の電荷である。したがってこの出力電流の自己相関関数 $R_y(\tau)$ は

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= \langle y(t)y(t+\tau) \rangle \\ &= e^2 \sum_{i \neq j} \langle \delta(t - t_i)\delta(t - t_j + \tau) \rangle \\ &\quad + e^2 \sum_i \langle \delta(t - t_i)\delta(t - t_i + \tau) \rangle \end{aligned} \quad (10)$$

となる。さらに、(10)式の右辺の第1項の平均演算には、時刻 t_i と t_j とに二つの電流パルスが同時に現われる結合確率、すなわち、(8)式で $L=2$ の場合を用い、また第2項の平均演算には(6)式を用い、 $R_y(\tau)$ は平均強度 $\langle I_A(\tau) \rangle$ および強度相関 $\langle I_A(t)I_A(t+\tau) \rangle$ に関して次式で与えられる¹²⁾。

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= \frac{1}{4}\alpha^2 e^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_i)\delta(t - t_j \\ &\quad + \tau) \langle I_A(t_i)I_A(t_j) \rangle dt_i dt_j \\ &\quad + \frac{1}{2}\alpha^2 e^2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_i)\delta(t - t_i + \tau) \langle I_A(t_i) \rangle dt_i \\ &= \frac{1}{4}\alpha^2 e^2 \langle I_A(t)I_A(t+\tau) \rangle + \frac{1}{2}\alpha^2 e^2 \langle I_A(t) \rangle \delta(\tau) \end{aligned} \quad (11)$$

(11)式は瞬時強度 $I_A(t)$ の入射光に対する光検波器出力電流の自己相関関数である。したがって(11)式に(2), (3)式を代入すれば出力電流の自己相関関数 $R_y(\tau)$ はつぎのように求まる。

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= \frac{1}{4}\alpha^2 e^2 [2(1 + P_s)\langle I_x(t) \rangle \langle I_n(t) \rangle \\ &\quad + (1 + 2P_s + 4R_s(\tau) \\ &\quad + \langle V_s^2(t)V_s^2(t+\tau) \rangle) \langle I_x(t)I_x(t+\tau) \rangle \\ &\quad + (1 + R_s(\tau))(R_x^*(\tau)R_n(\tau)) \end{aligned}$$

$$+ R_x(\tau) R_n^*(\tau) + \langle I_n(t) I_n(t+\tau) \rangle] \\ + \frac{1}{2} \alpha e^2 [(1+P_s) \langle I_x(t) \rangle + \langle I_n(t) \rangle] \delta(\tau) \quad (12)$$

ここに、 $R_s(\tau)$ 、 $R_x(\tau)$ 、 $R_n(\tau)$ についてはつぎのように定義されている。

$$R_s(\tau) = \langle V_s(t) V_s(t+\tau) \rangle \quad (13)$$

$$R_x(\tau) = \langle V_x^*(t) V_x(t+\tau) \rangle \quad (14)$$

$$R_n(\tau) = \langle V_n^*(t) V_n(t+\tau) \rangle \quad (15)$$

さて、まず変調信号 $V_s(t)$ は平均値 0 の定常ガウス信号であるので、その電力相関については次式のようになる。

$$\langle V_s^2(t) V_s^2(t+\tau) \rangle = P_s^2 + 2R_s^2(\tau) \quad (16)$$

またレーザ光については、その周波数 F_0 をとすれば、その複素電界 $V_x(t)$ はつぎのように書ける。

$$V_x(t) = A e^{j2\pi F_0 t} \quad (17)$$

ただし、 A は一定振幅を示している。したがって、このようなレーザ光に対する平均強度 $\langle I_x(t) \rangle$ 、自己相関関数 $R_x(\tau)$ および強度相関 $\langle I_x(t) I_x(t+\tau) \rangle$ は以下のようになる。

$$\langle I_x(t) \rangle = \langle V_x^*(t) V_x(t) \rangle = A^2 \quad (18)$$

$$R_x(\tau) = \langle V_x^*(t) V_x(t+\tau) \rangle = A^2 e^{j2\pi F_0 \tau} \quad (19)$$

$$\langle I_x(t) I_x(t+\tau) \rangle = A^4 \quad (20)$$

さらに背景雑音光に対しては、その電力スペクトル密度が F_0 の近傍に分布している定常狭帯域ガウスプロセスを仮定すれば、 $V_n(t)$ はつぎのように表わせる。すなわち

$$V_n(t) = n(t) e^{j(2\pi F_0 t + \phi(t))} \quad (21)$$

ここに、包絡線 $n(t)$ と位相 $\phi(t)$ はともに F_0 に比べて非常にゆるやかにランダムな変動をしている。そしてその平均強度 $\langle I_n(t) \rangle$ 、自己相関関数 $R_n(\tau)$ および強度相関 $\langle I_n(t) I_n(t+\tau) \rangle$ は

$$\langle I_n(t) \rangle = \langle V_n^*(t) V_n(t) \rangle = 2P_n \quad (22)$$

$$R_n(\tau) = \langle V_n^*(t) V_n(t+\tau) \rangle = 2r_n^2(\tau) e^{j2\pi F_0 \tau} \quad (23)$$

$$\langle I_n(t) I_n(t+\tau) \rangle = 4P_n^2 + 4r_n^2(\tau) \quad (24)$$

ただし、 P_n は背景雑音光の平均電力で

$$P_n = P_n(0)/2 = r_n(0) \quad (25)$$

である。

変調信号、レーザ光および背景雑音光に対する (16) ~ (25) 式の関係を用いて (12) 式を書き直せば、出力自己相関関数 $R_y(\tau)$ はつぎのようになる。

$$R_y(\tau) = \alpha^2 e^2 [A^2(1+P_s)/2 + P_n] \delta(\tau) \\ + R_1(\tau) + R_2(\tau) + R_3(\tau) \quad (26)$$

ここに、 $R_1(\tau)$ 、 $R_2(\tau)$ 、 $R_3(\tau)$ についてはそれぞれ

$$R_1(\tau) = \alpha^2 e^2 A^4 R_s(\tau) \quad (27)$$

$$R_2(\tau) = \alpha^2 e^2 [A^4 R_s^2(\tau)/2 \\ + A^2(1+R_s(\tau))r_n(\tau) + r_n^2(\tau)] \quad (28)$$

$$R_3(\tau) = \alpha e^2 [A^2(1+P_s)/2 + P_n] \delta(\tau) \quad (29)$$

で与えられる。ここに (26) 式の右辺の第 1 項は直流成分、 $R_1(\tau)$ は出力信号成分、 $R_2(\tau)$ は波動干渉雑音¹³⁾ と呼ばれるもので、信号の 2 次ひずみ成分および背景雑音光のゆらぎに起因する雑音である。そして最後の $R_3(\tau)$ がショット雑音を示している。(26) 式にフーリエ積分をほどこすと光検波器出力電流 $y(t)$ の電力スペクトル密度 $W_y(F)$ がつぎのように求まる。すなわち

$$W_y(F) = \alpha^2 e^2 [A^2(1+P_s)/2 + P_n] \delta(F) \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \{R_1(\tau) + R_2(\tau) + R_3(\tau)\} e^{-j2\pi F \tau} d\tau \quad (30)$$

(30) 式の電力スペクトル密度をもつ出力電流 $y(t)$ は次段の出力フィルタで通過帯域外の成分を除去されて出力となる。いま出力フィルタのインパルス応答を $h(t)$ とすれば、(9) 式を用いてフィルタ出力 $z(t)$ はつぎのようになる。

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t') h(t-t') dt' = e \sum_j h(t-t_j) \quad (31)$$

この出力 $z(t)$ の電力スペクトル密度は $y(t)$ の電力スペクトル密度 $W_y(F)$ および出力フィルタの周波数応答 $H(F)$ から求まるので、そのうちの信号電力と雑音電力の比をとることによって、出力 SN 比は以下のように求まる

$$\left(\frac{S}{N}\right) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |H(F)|^2 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} R_1(\tau) e^{-j2\pi F \tau} d\tau \right\} dF}{\int_{-\infty}^{\infty} |H(F)|^2 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (R_2(\tau) + R_3(\tau)) e^{-j2\pi F \tau} d\tau \right\} dF} \quad (32)$$

2.2 数値解析

前節において、背景雑音光と共存する振幅変調レーザ光に対する本検波系の出力 SN 比の一般式が導出された。本節では、変調信号の種類、変調度、背景雑音光の帯域幅(被変調レーザ光の所要帯域)、実効光子数および入力 CN 比に関して具体的な出力 SN 比を求めて、それぞれが出力 SN 比に与える影響を調べ、本検波系の特性を明確にする。

まず変調信号については始めにも説明したように、ベースバンド変調信号とバンドパス変調信号の二つの場合を考え、それぞれの電力スペクトル密度 $W_{si}(F)$ $W_{sh}(F)$ をとする。

$$W_{si}(F) = \begin{cases} G_s, & 0 < |F| \leq B_s, \\ 0, & \text{その他の周波数} \end{cases} \quad (33)$$

$$W_{sh}(F) = \begin{cases} G_s, & F_h - B_s \leq |F| \leq F_h + B_s, \\ 0, & \text{その他の周波数} \end{cases} \quad (34)$$

Fig. 2 Power spectral density of the modulating signal.

ただし、 $B_s \ll F_h \ll F_0$ であり、添字 l, h はそれぞれベースバンド変調信号およびバンドパス変調信号を示している。(33), (34)式の関係が Fig. 2 に示されている。

また、これらの変調信号を取出し、不必要な雑音成分を取り除くために、光検波器の後に下記の周波数特性をもつ理想出力フィルタを用いる

$$|H_l(F)| = \begin{cases} 1 & 0 < |F| < B_s \\ 0 & \text{その他の周波数} \end{cases} \quad (35)$$

$$|H_h(F)| = \begin{cases} 1 & F_h - B_s < |F| < F_h + B_s \\ 0 & \text{その他の周波数} \end{cases} \quad (36)$$

さらに背景雑音光の電力スペクトル密度 $W_{Anl}(F)$, $W_{Anh}(F)$ については、ここでは理想的な光入力フィルタを用いるものとしてその帯域を被変調レーザ光のそれと等しいものと仮定する。したがって、

$$W_{Anl}(F) = \begin{cases} G_n & F_0 - B_s \leq F \leq F_0 + B_s \\ 0 & \text{その他の周波数} \end{cases} \quad (37)$$

$$W_{Anh}(F) = \begin{cases} G_n & F_0 - F_h - B_s \leq F \leq F_0 + F_h + B_s \\ 0 & \text{その他の周波数} \end{cases} \quad (38)$$

変調信号、背景雑音光および出力フィルタに対するこれらの仮定のもとに(32)式を計算すれば出力 SN 比はつぎのように求まる

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{Al} = \frac{1}{\left[\frac{3}{8}m^2 + \frac{3}{8a^2} + \frac{1}{2m^2a^2} + \frac{3}{16m^2a^4} + \frac{1}{2\gamma}\left(1 + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^2a^2}\right)\right]} \quad (39)$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{Ah} = \frac{1}{\left[\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{m^2a^2} + \frac{1}{2m^2a^2}\left(1 + \frac{f_h}{2}\right) + \frac{1}{\gamma}\left(1 + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^2a^2}\right)\right]} \quad (40)$$

ただし、

$$m = \sqrt{P_s} : \text{実効変調度} \quad (41)$$

$$a^2 = \frac{A^2}{4G_nB_s} : \text{ベースバンド変調信号の場合の入力}$$

$$\text{SN 比} \quad (42) \text{ (注 2)}$$

$$f_h = F_h/B_s \quad (43)$$

である。また α については

$$\gamma = \frac{\alpha A^2}{2B_s} = \frac{\eta A^2}{2hF_0B_s} \quad (44)$$

であって、変調信号の帯域幅の逆数 B_s^{-1} で与えられる時間内にレーザ光によって放出される実効光子数である。

Fig. 3, 4 の実験は(39), (40)式の関係を示している、以下に近似式によってその特徴を明らかにしておく。

(1) $a^2 \ll 1$ の場合

(i) $a^2 \ll \gamma$ のとき:

(注 2) バンドパス変調信号の場合の入力 CN 比は

$$\frac{A^2}{4G_n(F_h + B_s)} = \frac{A^2}{4G_nB_s(1 + f_h)} = \frac{a^2}{1 + f_h}$$

であるので、 a^2 と f_h とから決められるが a^2 に比例する。

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{Al} \Big|_{\substack{a^2 \ll 1 \\ a^2 \ll \gamma}} = \frac{16}{3}m^2a^4 \quad (45)$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{Ah} \Big|_{\substack{a^2 \ll 1 \\ a^2 \ll \gamma}} = 2m^2a^4 \left/ \left(1 + \frac{f_h}{2}\right)\right. \quad (46)$$

このときの出力雑音成分はほとんど背景雑音光の2次ひずみ成分であり、したがって出力 SN 比は a^2 の2乗に比例するとともにバンドパス変調信号の場合には変調信号の中心周波数の影響を受ける。

(ii) $a^2 \gg \gamma$ のとき:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{Al} \Big|_{\substack{a^2 \ll 1 \\ a^2 \gg \gamma}} = 2m^2a^2\gamma \quad (47)$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{Ah} \Big|_{\substack{a^2 \ll 1 \\ a^2 \gg \gamma}} = m^2a^2\gamma/(1 + f_h) \quad (48)$$

このときの出力雑音成分は背景雑音光によるショット雑音の影響によるものであり、したがって a^2 以外に γ に比例し、またバンドパス変調信号の場合には変調信号の中心周波数が影響する。

(2) $a^2 \gg 1$ の場合

(iii) $a^2 \ll \gamma$ のとき:

 Fig. 3 Output signal-to-noise ratios (Base band modulating signal $m=1/3$)

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{Al} \bigg|_{\substack{a^2 \ll 1 \\ a^2 \gg \gamma}} = \frac{8}{3} m^2 \quad (49)$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{Ah} \bigg|_{\substack{a^2 \ll 1 \\ a^2 \gg \gamma}} = \frac{a^2}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{m^2}\right)} \quad (50)$$

ベースバンド変調信号では必然的に生じる変調信号の 2 次ひずみ成分が出力 SN 比の限界を与えている。一方、バンドパス変調信号では変調信号の 2 次ひずみ成分は出力フィルタの帯域内には入ってこないで、 a^2 に比例して出力 SN 比は大きくなる。

(iv) $a^2 \gg \gamma$ のとき

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{Al} \bigg|_{\substack{a^2 \gg 1 \\ a^2 \gg \gamma}} = \frac{1}{\left[\frac{3}{8} m^2 + \frac{1}{2\gamma} \left(1 + \frac{1}{m^2}\right)\right]} \quad (51)$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{Ah} \bigg|_{\substack{a^2 \gg 1 \\ a^2 \gg \gamma}} = \frac{\gamma}{\left(1 + \frac{1}{m^2}\right)} \quad (52)$$

ベースバンド変調信号の場合には変調信号の 2 次ひずみ成分以外に被変調レーザ光自身によるショット雑音加わる。一方、バンドパス変調信号の場合には変調信号の 2 次ひずみ成分はないので、被変調レーザ光自身によるショット雑音だけとなり γ に比例することになる。また変調度に関しては、当然のことながら、変調度の大きいほうが出力 SN 比も大きい。

このように入力 CN 比の表示は変調信号の種類によっても異なるし、また振幅変調と強度変調によっても異なってくるが、すべて a^2 に比例していることには変わりなく、また背景雑音光の電力スペクトル密

 Fig. 4 Output signal-to-noise ratios (Bandpass modulating signal $m=1/3$, $f_h=100$)

度 G_n が等しいという条件のもとで変調方式や変調信号を評価するほうが現実的であるので、以後入力 CN 比の大小を示すパラメータとしてこの a^2 を用いることにする。

3. 強度変調レーザ光に対する出力 SN 比

レーザ光の変調方式のうちで重要な振幅変調については前節までに解析されたので、本節ではもう一つの重要な変調方式である強度変調の場合について理論的考察を行ない、振幅変調の場合との比較を通じてその特性を明らかにする。

3.1 一般的解析

強度変調レーザ光の入力複素電界 $V_I(t)$ はつぎのように表現できる。

$$V_I(t) = \sqrt{1 + V_s(t)} V_x(t) + V_n(t) \quad (53)$$

ここでも変調信号の平均電力 P_s は 9^{-1} 以下とし、過変調の影響を無視する。瞬時強度 $I_I(t)$ 、平均強度 $\langle I_I(t) \rangle$ は (2), (3) 式に対応してつぎようになる。

$$\begin{aligned} I_I(t) = & (1 + V_s(t)) V_x^*(t) V_x(t) + V_n^*(t) V_n(t) \\ & + \sqrt{1 + V_s(t)} (V_x^*(t) V_n(t) + V_x(t) V_n^*(t)) \end{aligned} \quad (54)$$

$$\langle I_I(t) \rangle = \langle I_x(t) \rangle + \langle I_n(t) \rangle \quad (55)$$

また、レーザ光および背景雑音光に対する定義 (13) ~ (25) 式を用いると出力電流の自己相関関数 $R_I(\tau)$ は

$$\begin{aligned} R_I(\tau) = & \frac{1}{4} a^2 e^2 [\langle (1 + V_s(t))(1 + V_s(t + \tau)) \rangle \langle I_x(t) I_x(t + \tau) \rangle \\ & + 2 \langle I_x(t) \rangle \langle I_n(t) \rangle + \langle I_n(t) I_n(t + \tau) \rangle] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \langle \sqrt{1+V_s(t)} \sqrt{1+V_s(t+\tau)} \rangle \langle R_s^*(\tau) R_s(\tau) \rangle \\
 & + R_s(\tau) R_s^*(\tau) + \frac{1}{2} \alpha e^2 [\langle I_s(t) \rangle + \langle I_s(t+\tau) \rangle] \delta(\tau)
 \end{aligned} \quad (56)$$

となる。さらに $\sqrt{1+V_s(t)}$ なる変調成分についてはテーラー展開表示すると

$$\sqrt{1+V_s(t)} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} A_i V_s^i(t) \quad (57)$$

ただし

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{1}{2}, \quad A_i = \left(\frac{1}{2} \right) (-1)^{i-1} \frac{(2i-3)!!}{i!}, \\
 (2i-3)!! &= (2i-3)(2i-5) \cdots 3 \cdot 1
 \end{aligned} \quad (58)$$

と表わせる。(57), (58) 式を(56)式に代入して書き改めると $R_I(\tau)$ は最終的につぎようになる。

$$\begin{aligned}
 R_I(\tau) &= \alpha^2 e^2 \left[\frac{A^2}{2} + P_s \right] + \alpha^2 e^2 \left[\frac{4}{A^4 R_s(\tau)} + r_n^2(\tau) \right. \\
 &+ A^2 [1 + \langle \sum A_i V_s^i(t) \rangle \\
 &+ \langle (\sum A_i V_s^i(t)) (\sum A_j V_s^j(t+\tau)) \rangle] r_n(\tau) \Big] \\
 &+ \alpha e^2 \left[\frac{A^2}{2} + P_s \right] \delta(\tau)
 \end{aligned} \quad (59)$$

ここで、

$$\begin{aligned}
 \langle \sum A_i V_s^i(t) \rangle &= \sum_{i=1}^{\infty} A_{2i} (2i-1)!! P_s^i \quad (60) \\
 \langle (\sum A_i V_s^i(t)) (\sum A_j V_s^j(t+\tau)) \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left[A_{2i} A_{2j} \sum_{k=0}^j {}_2C_{2k} \left\{ \sum_{l=0}^k {}_kC_l (-1)^l \right. \right. \\
 &\quad \times \left. \left. \phi_s(\tau)^{2(i+l-k)} \right\} (2i+2j-2k-1)!! P_s^{i+j} \right. \\
 &\quad + A_{2i-1} A_{2j-1} \sum_{k=0}^{j-1} {}_2C_{2k} \left\{ \sum_{l=0}^k {}_kC_l (-1)^l \right. \\
 &\quad \times \left. \left. \phi_s(\tau)^{2(i+l-k)-1} \right\} (2i+2j-2k-3)!! P_s^{i+j-1} \Big]
 \end{aligned} \quad (61), (62)$$

ただし、 $\phi_s(\tau) = R_s(\tau)/P_s$

(59) 式の右辺の内容は第 1 項は直流分、第 2 項は出力信号成分および波動干渉雑音、第 3 項はショット雑音である。このように $R_I(\tau)$ は一般には無限級数となり、複雑であるが(60), (61) 式は $P_s \leq 9^{-1}$ であることを考え合わせれば収束が早いので、 P_s に関して高次のものを無視して最高 3 次の項で近似して $R_I(\tau)$ を単純化し出力成分を明らかにする。まず(60), (61) 式を近似すれば

$$(61) \text{ 式} \doteq -\frac{P_s}{8} - \frac{15P_s^2}{128} \quad (63)$$

$$\begin{aligned}
 (62) \text{ 式} &\doteq \left(\frac{1}{4} + \frac{3P_s}{16} \right) R_s(\tau) + \frac{5R_s^2(\tau)}{64} + \frac{3R_s^3(\tau)}{16P_s} \\
 &\quad (64)
 \end{aligned}$$

となるので出力自己相関関数 $R_I(\tau)$ は

$$\begin{aligned}
 R_I(\tau) &= \alpha^2 e^2 \left[\frac{A^2}{2} + P_s \right] + \alpha^2 e^2 \left[\frac{A^4 R_s(\tau)}{4} \right. \\
 &+ A^2 \left\{ 1 - \frac{P_s}{4} - \frac{15P_s^2}{64} + \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{16} \right) P_s R_s(\tau) \right. \\
 &+ \left. \left. \frac{5R_s^2(\tau)}{64} + \frac{3R_s^3(\tau)}{16P_s} \right\} r_n(\tau) r_n^2(\tau) \right] \\
 &+ \alpha e^2 \left[\frac{A^2}{2} + P_s \right] \delta(\tau)
 \end{aligned} \quad (65)$$

このようにして、強度変調レーザ光に対する光検波器出力電流の自己相関関数が得られたので、出力フィルタを通った成分のうち信号成分と雑音成分の比をとれば出力 SN 比が求まる。

3.2 数値解析

変調信号および出力フィルタに対する定義(33)~(36)式を用いて、振幅変調の場合と同様ベースバンド変調信号、バンドパス変調信号に対する出力 SN 比を以下に求める。まず背景雑音光についてはその帯域幅を被変調レーザ光の所要帯域と同じとするが、被変調レーザ光は(53)式に示されているように一般には F_0 を中心として $V_s(t)$ の無限次の高調波を含むので、被変調レーザ光をひずみなく通すには光入力フィルタとしては無限大の帯域をもつものが必要となるが、実際には(65)式の導出の際にも示したように P_s に関するたかだか 3 次の電力までを通す程度で十分と考えられるので、光入力フィルタの帯域幅としては F_0 を中心に $V_s(t)$ の 3 次までを通すものを仮定する。したがって、光入力フィルタを通った背景雑音光の電力スペクトル密度 $W_{Ini}(F)$, $W_{Inh}(F)$ をつぎのように定める。

$$W_{Ini}(F) = \begin{cases} G_n & F_0 - 3B_s \leq F \leq F_0 + 3B_s \\ 0 & \text{その他の周波数} \end{cases} \quad (66)$$

$$W_{Inh}(F) = \begin{cases} G_n & F_0 - 3F_h - 3B_s \leq F \leq F_0 + 3F_h + 3B_s \\ 0 & \text{その他の周波数} \end{cases} \quad (67)$$

この場合の出力 SN 比はつぎようになる。

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{S}{N} \right)_{II} &= 1 \left/ \left[\frac{2}{m^2} - \frac{1}{4} + \frac{2865m^2}{74752} \right] \right/ a^2 + \frac{11}{4m^2 a^4} \\
 &\quad + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{m^2} + \frac{3}{m^2 a^2} \right)
 \end{aligned} \quad (68)$$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{S}{N} \right)_{Ih} &= 1 \left/ \left[\frac{4}{m^2} - \frac{1}{2} + \frac{33m^2}{64} \right] \right/ a^2 + \frac{6+5f_n}{m^2 a^4} \\
 &\quad + \frac{4}{\gamma} \left(\frac{1}{m^2} + \frac{3+3f_n}{m^2 a^2} \right)
 \end{aligned} \quad (69)$$

Fig. 3, 4 の点線は(68), (69) 式の関係を示している。

以下に出力 SN 比に対する近似式を与え、振幅変

調との比較を通じてその特性を明らかにする。

(1) $a^2 \ll 1$ の場合

(i) $a^2 \ll \gamma$ のとき：

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{II} \Big|_{\substack{a^2 \ll 1 \\ a^2 \ll \gamma}} = \frac{4}{11} m^2 a^4 \quad (70)$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{Ih} \Big|_{\substack{a^2 \ll 1 \\ a^2 \ll \gamma}} = \frac{m^2 a^4}{(6+5f_n)} \quad (71)$$

この場合の出力雑音は背景雑音光の 2 次ひずみ成分であるが(45), (46)式と比べてみると、強度変調のほうが明らかに出力 SN 比の悪いことがわかる。その理由としては、まず変調信号 $V_s(t)$ に関しては

$$\text{振幅変調: } (1 + V_s(t))^2 = 1 + 2V_s(t) + V_s^2(t) \quad (72)$$

$$\text{強度変調: } (\sqrt{1 + V_s(t)})^2 = 1 + V_s(t) \quad (73)$$

であるから、出力信号成分 ($V_s(t)$ の項) は振幅変調では強度変調の 4 倍の電力をもっている。加えて強度変調の所要帯域は振幅変調より広い為にそれだけ背景雑音光電力が大きくなることによるものである。

(ii) $a^2 \gg \gamma$ のとき：

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{II} \Big|_{\substack{a^2 \ll 1 \\ a^2 \gg \gamma}} = \frac{1}{6} m^2 \gamma a^2 \quad (74)$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{Ih} \Big|_{\substack{a^2 \ll 1 \\ a^2 \gg \gamma}} = \frac{m^2 \gamma a^2}{(12+12f_n)} \quad (75)$$

この場合の出力雑音は背景雑音光に基づくショット雑音であるので、(i) の場合と同様出力 SN 比は振幅変調のほうが優れている。

(2) $a^2 \gg 1$ の場合

(iii) $a^2 \ll \gamma$ のとき：

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{II} \Big|_{\substack{a^2 \gg 1 \\ a^2 \ll \gamma}} = a^2 \frac{1}{2} m^2 \quad \left(\frac{S}{N}\right)_{Ih} \Big|_{\substack{a^2 \gg 1 \\ a^2 \ll \gamma}} = \frac{a^2}{36} \quad (76), (77)$$

出力 SN 比は a^2 に比例して増加する。ベースバンド変調信号の場合においては、振幅変調のときに生じた変調信号の 2 次ひずみ成分は強度変調のときには現われないので出力 SN 比は強度変調のほうがよい。一方バンドパス変調信号の場合には、強度変調での出力信号電力が小さいことによる分だけ出力 SN 比も悪い。

(iv) $a^2 \gg \gamma$ のとき：

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{II} \Big|_{\substack{a^2 \gg 1 \\ a^2 \gg \gamma}} = \frac{m^2}{2} \gamma \quad \left(\frac{S}{N}\right)_{Ih} \Big|_{\substack{a^2 \gg 1 \\ a^2 \gg \gamma}} = \frac{m^2}{4} \gamma \quad (78), (79)$$

この場合の出力雑音は被変調レーザ光自身によるショット雑音である。 $m^2 \leq 9^{-1}$ を考慮に入れて(78), (79)式と(51), (52)式を比べてみると、ともに(51), (52)式

のほうが約 4 倍良好であることがわかる。すなわち出力信号成分の大きさだけ振幅変調が強度変調より優れている。

以上の近似による振幅変調との比較の結果、入力 CN 比および実効光子数が十分大きく、かつベースバンド変調信号を用いる場合にのみ強度変調が有効となることが明らかとなった。

4. む す び

以上、振幅変調あるいは強度変調を受けたレーザ光が背景雑音光としてともに光検波器入力となるときに出力 SN 比について理論的解析を行ない、変調方式、変調度、変調信号の種類、実効光子数、波動干渉雑音、ショット雑音および入力 CN 比などが出力 SN 比に及ぼす影響について詳細に論じた。これらの要素をすべて考慮に入れて出力 SN 比の比較を行なうことは一般には非常に複雑であるが、第 2 節と第 3 節の終わりに、それぞれ近似式による比較を試み本質的な特性を明確にしている。このように本論文では、従来あまり明確にされていなかったアナログ AM レーザ方式の出力特性に関して、種々の要因を考慮することによってより厳密な出力 SN 比を与え、レーザ計測分野におけるシステム評価基準に対する有用な一資料を提供するものである。

参 考 文 献

- 1) B. Reiffen, H. Sherman: "An optimum demodulator for Poisson process: photon source detectors", Proc. IEEE, **51**, 1316 (Oct. 1963)
- 2) R. M. Gagliardi, S. Karp: "M-ary Poisson detection and optical communication", IEEE Trans. Communication Technology, **COM-17-2**, 208 (April 1969)
- 3) S. Karp, E. L. O'Neill, R. M. Gagliardi: "Communication Theory for the tree-space optical channel" Proc. IEEE, 1611 (Oct. 1970)
- 4) S. Karp, J. R. Clark: "Photon Counting; A problem in classical noise theory", IEEE Trans. Information Theory, **IT-16-6**, 672 (Nov. 1970)
- 5) S. Karp, R. M. Gagliardi: "The design of a pulse position modulated optical communication systems" IEEE Trans. **COM-17-6**, 670 (Dec. 1969)
- 6) 小林：レーザ応用技術，日刊工業新聞社 p. 145 (1969)
- 7) 文献¹⁾，p. 123
- 8) 市村，稲場：極微弱光の情報検出法の研究，応用物理，**39-9**, 913 (1969)
- 9) E. B. Felstead: "A simple real-time in coherent optical correlator", IEEE Trans. on Aerospace and Electronic System, **AES-3**, 907 (Nov. 1967)
- 10) T. Namekawa, S. Kawachida: "Application of intensity-modulated light by an ultrasonic light modulator to the optical processor", Electronic letters, **18-12** (June 1972)
- 11) W. K. Pratt: "Laser Communication systems", John Wiley & Sons, 174 (1969)
- 12) L. Mandel: "Heterodyne Detection of a Weak Light Beam", JOSA, **56** (Sept. 1966)
- 13) H. Hodara: "Statistics of thermal and laser radiation", Proc. IEEE, **53**, 696 (July 1965)