多 目 的 計 画 法

——多目的システムの最適化手法——

志 水 清 孝*・日 吉 茂 樹*・広 瀬 正*

Multiple Objective Programming

——Optimization Algorithms for Multiple Objective Systems——

Kiyotaka SHIMIZU*, Shigeki HIYOSHI* and Tadashi HIROSE*

Optimization algorithms for multiple objective systems, in which there exist plural independent objective functions, are studied. Several algorithms for the unique solution to the multiple objective programs are proposed by introducing the concepts of satisfaction condition and the preference order among objective functions and by extending nonlinear programming procedures (the method of centers, the method of feasible directions). The solutions obtained are proved to satisfy Pareto optimality, which is no doubt a basic criterion, although it gives merely conservative rationality for vector minimization problems. The purpose of this paper is to develop new algorithms for the multiple objective programs.

1. 多目的計画法

互いに独立な複数の目的関数をもつ多目的システムの最適化問題はベクトル最小化問題として定式化される。 p 次元ベクトル目的関数 $f(x)$ を r 次元ベクトル制約式 $g(x) \leq 0$ のもとで n 次元ベクトル x に関して最小化する問題をつぎのように書く。

$$\begin{aligned} & \min_x f(x) \\ & \text{subj. to } x \in X = \{x | g(x) \leq 0\} \end{aligned} \quad (1.1)$$

しかし、ベクトル目的関数は通常、代替案の集合に関して半順序関係を生ずるので、スカラ目的関数のときのような全順序関係の場合の最適解と同じように論ずることができない。通常、ベクトル最小化問題はつぎのような Pareto 最適解を求めることを意味する。

【定義 1.1】 つぎのような $\hat{x}$ を Pareto 最適解という。

$f(x) \leq f(\hat{x})$ かつ $f(x) \neq f(\hat{x})$ であるような $x \in X$ は

存在しない。

【定義 1.2】 つぎのような $\hat{x}$ を弱意 Pareto 最適解という。 $f(x) < f(\hat{x})$ であるような $x \in X$ は存在しない。

定義 1.1 の Pareto 最適解は Fig. 1 に示されるように非劣解の集合、曲線 Γ で与えられる。図中、 $\Sigma_s(\hat{x})$ は $f(x) \leq f(\hat{x})$ かつ $f(x) \neq f(\hat{x})$ なる x の集合である。したがって、Fig. 1 は $\Sigma_s(\hat{x}) \cap X = \emptyset$ を示している。以上のことを f_i を座標軸とする f の空間で考えると、Fig. 2 のようになる。 X の写像を $F = f(X)$ とするとき、Pareto 最適解の集合は定義より曲線 Γ' に対応した x である。

もし、 f と g がそれぞれ強凸関数と凸関数ならば、

Fig. 1 Pareto optimal solutions

Fig. 2
Pareto optimal solutions

† 第13回計測自動制御学会学術講演会で発表 (昭 49・8)

* 慶応義塾大学工学部 横浜市港北区日吉町 832

* Faculty of Engineering, Keio University, Yokohama
(Received April 8, 1974)

弱意 Pareto 最適解であって Pareto 最適解でないものは存在せず、両者は等価である。

問題(1.1)を解くために Pareto 最適解の必要十分条件や Pareto 最適解を与える数値計画法が研究されている。たとえば、つぎのようなものがある。

〔最大成分最小化問題〕

$$\min_{x \in X} \max_{i \in \{1, \dots, p\}} \{w_i f_i(x)\} \quad (1.2)$$

ここで、

$$w = \{w_1, \dots, w_p\} \in S_p = \left\{ w \mid w \geq 0, \sum_{i=1}^p w_i = 1 \right\}$$

〔スカラ化問題〕

$$\min_{x \in X} w^T f(x) \quad (1.3)$$

問題(1.2)や(1.3)はいろいろな仮定のもとで、よく知られているように、問題(1.1)の Pareto 最適解あるいは弱意 Pareto 最適解を与える^{7), 3), 6b)}。

《定理 1.1》 $\hat{x}$ がベクトル最小化問題(1.1)の弱意 Pareto 最適解となるための必要十分条件は、 $\hat{x}$ が最大成分最小化問題(1.2)の最適解となるような $w \in S_p$ が存在することである。(証明略)

当然、弱意 Pareto 最適解の必要条件は Pareto 最適解の必要条件でもある。

《定理 1.2》 もし $\hat{x}$ がある $w > 0$ に対してスカラ化問題(1.3)の解ならば、 $\hat{x}$ はベクトル最小化問題(1.1)の Pareto 最適解である。また、 f および g を凸関数としたとき、もし $\hat{x}$ が問題(1.1)の Pareto 最適解ならば、 $\hat{x}$ は問題(1.3)の解となるような $w \in S_p$ が存在する。(証明略)

ベクトル最小化問題の Pareto 最適解に関しては、Kuhn-Tucker⁷⁾, Zadeh¹²⁾, Cunha-Polak³⁾, Chu²⁾ その他^{4), 6), 9)}の研究があり、最近は協力ゲームの観点から Vincent-Leitmann¹¹⁾, Schmitendorf¹⁰⁾ その他により研究されている。

Pareto 最適性は多目的システムの一つの合理性を満たす。そして、Pareto 最適点は実行可能解の部分集合ではあるが普通は無数個の点を与える。しかし、工学的問題においては、普通は唯一の解または適当な大きさの解集合を求めねばならない。すなわち、Pareto 最適解の定義は技術設計のためには余りにも広すぎ、実用的でない。そこで、多目的システムに対して合理的でかつ実用的な(唯一の)解を与える評価方式の哲学が望まれる。そしてその結果、現在ある数値計画法のアルゴリズムを用いて数値的に解を求めうる計算方法を提案することが望まれる。しかし、Pareto 最適性以上の合理性をもつ一般的判断基準は現在のところ与えられていない。

妥協的アプローチは求める最適解の性質を特殊化し、その結果適当なアルゴリズムをうることであるが、いずれにせよ何か一つの合理性基準を確立することが必要である。一つの重要な要因は目的関数 f_i の選好順序および満足度の概念である。つまり、 f_i の選好順序を導入しその情報を利用すること、および満足制約式を導入することである。以下では多目的計画法の 2, 3 の具体的なアルゴリズムを提案する。

2. 最大成分最小化による最適満足解をうるアルゴリズム

ベクトル目的関数に関して十分満足できる実行可能解の部分集合の中から相当説得力のある唯一の最適解を求める定式化を考えてみる。

最適化が不可能な場合、または最適性を明確に定義できないような場合には、目的関数(ベクトル関数の場合にはそのすべてまたはいくつかの成分)がある与えられた値以上になることを保証する満足条件を満たす解集合の中から、適当に設定された判定基準に基づき何らかの意味で最良の解をみつける努力がなされる。本節と次節ではこのような最適満足化によるアルゴリズムを研究する。

最大成分最小化最適満足解：問題(1.1)に対して $f(x)$ の各成分 $f_i(x)$ を最小化させる p 組の通常のスカラ最適化問題

$$\begin{aligned} \min_x f_i(x) \\ \text{subj. to } x \in X = \{x \mid g(x) \leq 0\} \\ i = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (2.1)$$

の解を x^{0i} , $i = 1, \dots, p$ としよう。これは各成分 f_i に関して得られる最小解だから(1.1)の解を x^0 とすると、必ず $f_i(x^{0i}) \leq f_i(x^0)$, $i = 1, \dots, p$ である。

われわれは各成分 f_i に関して満足しうる解領域を S^{0i} で表わそう。このカットによる x^{0i} の近傍領域 S^{0i} は

$$S^{0i} = \{x \mid f_i(x) \leq f_i(x^{0i}) + \alpha_i\} \quad (2.2)$$

で与えられる。ここに α_i は f_i に関する満足範囲を表わす許容量である。そうすれば、多目的システムの満足条件 $x \in X^0 = S^{01} \cap \dots \cap S^{0p}$ のもとで f の最大成分(最も悪い成分)を最小にして得られる最適満足解はつぎのように定式化される。

$$\min_{x, z} z \quad (2.3a)$$

$$\text{subj. to } f_i(x) \leq z, \quad i = 1, \dots, p \quad (2.3b)$$

$$f_i(x) \leq f_i(x^{0i}) + \alpha_i, \quad i = 1, \dots, p \quad (2.3c)$$

$$x \in X = \{x \mid g(x) \leq 0\} \quad (2.3d)$$

ここで、 α_i は S^{0i} に共通領域が存在する程度に大き

くなければ実行不可能である。 α_i は $f_i(x^{0i})$ の値や感度解析に基づき、適当に決められなければならない。この問題の解は満足条件を満たす弱意 Pareto 最適点となっている。

《定理 2.1》 問題(2.3)の解 x^0 は元問題(1.1)の弱意 Pareto 最適解である。

(証明) x^0 が弱意 Pareto 最適解でないとすると、

$$f_i(\tilde{x}) < f_i(x^0), \quad i=1, \dots, p$$

なる $\tilde{x} \in X$ が存在する。明らかに $\tilde{x}$ は(2.3c)を満たす。いま、 $\max_{i \in \{1, \dots, p\}} \{f_i(x^0)\} = z^0$ とすると、

$$f_i(\tilde{x}) < z^0, \quad i=1, \dots, p$$

となり、 $\tilde{x}$ は実行可能解でより小さな目的関数値を与える。これは x^0 が問題(2.3)の解であることに矛盾する。」

問題(2.3)は $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ があらかじめ与えられていると想定している。しかしどの程度の目的関数の悪化を許容するかを逐次、状態に応じて決定したい場合には、問題(2.3)の変形として対話形の計算方法が考えられる。類似の思想は LP の場合、文献¹⁾にみられる。

アルゴリズム 2-1

(ステップ 1) $l=1$ とし、つぎの問題を解く。

$$\begin{aligned} \min_{x, z} \quad & z \\ \text{subj. to } & f_i(x) \leq z, \quad i=1, \dots, p \\ & x \in X = \{x | g(x) \leq 0\} \end{aligned} \quad (2.4)$$

この解を x^1 , 対応する目的関数値を $f(x^1)$ とする。

(ステップ 2) x^1 が与えられたとき、 $f(x^1)$ に関して満足できる成分と満足できない成分にわけ、その添字集合をそれぞれ $S^1, \bar{S}^1$ とする。そして、 $S^1 = \phi$ ならばこの問題は実行不可能、 $\bar{S}^1 = \phi$ ならば x^1 を最適満足解とする。 $S^1 \neq \phi$ かつ $\bar{S}^1 \neq \phi$ ならば、 $i \in S^1$ について $f_i(x^1)$ に関する許容量 $\alpha_i^1 \geq 0$ を決定する。 $(\alpha_i^1 = 0$ は i 番目の目的関数が $f_i(x^1)$ より悪化することは許されないことを意味する。)

(ステップ 3) つぎの問題を解く。

$$\begin{aligned} \min_{x, z} \quad & z \\ \text{subj. to } & f_i(x) \leq z, \quad i \in \bar{S}^1 \\ & f_i(x) \leq f_i(x^1) + \alpha_i^1, \quad i \in S^1 \\ & x \in X = \{x | g(x) \leq 0\} \end{aligned} \quad (2.5)$$

(2.5)式の解を x^{l+1} とし、 $x^{l+1} = x^l$ ならば実行不可能とする。 $x^{l+1} \neq x^l$ ならば l を $l+1$ に置換えてステップ 2 にもどる。

このアルゴリズムは有限回で収束する。

[系 2.1] アルゴリズム 2-1 で得られる解は、元問題(1.1)の弱意 Pareto 最適解である。(証明は定理

2.1 と同様に行ける。)

ステップ 2 で $S^l = \phi$ のとき実行不可能とする理由は x^l が弱意 Pareto 最適解なので(2.5)式のすべての目的関数 f_i , $i \in \bar{S}^l$ を改良する $x \in X$ が存在しないからである。

3. 選好順序のもとでの最適満足解をうるアルゴリズム

目的関数の各成分に選好順序があり、一番重要な成分から順次 $f_1 \succ f_2 \succ \dots \succ f_p$ となっているとする。この結果、 $i < j$ のとき f_j より f_i の方をより最小化したい。このとき、2節で述べた最適満足解は、つぎのように定式化される。

アルゴリズム 3-1

(ステップ 1) $\min_x f_1(x)$

$$\text{subj. to } x \in X = \{x | g(x) \leq 0\} \quad (3.1)$$

の解を x^{01} とする。 $k=2$ とする。

(ステップ 2) $\min_x f_k(x)$ (3.2a)

$$\text{subj. to } f_i(x) \leq f_i(x^{0i}) + \alpha_i, \quad i=1, \dots, k-1 \quad (3.2b)$$

$$x \in X = \{x | g(x) \leq 0\} \quad (3.2c)$$

の解を x^{0k} とする。

(ステップ 3) $k < p$ なら k を $k+1$ に置換えてステップ 2 へ。 $k=p$ なら x^{0p} を選好順序のもとでの最適満足解とする。

ここで α_i は f_i に関する満足許容量で、逐次前のステップの結果をみながら一つずつ決めてゆく。上のアルゴリズムにおいて、 k 番目の選好順位をもつ f_k に関する満足範囲は $x \in X^{0k} = \{x | f_i(x) \leq f_i(x^{0i}) + \alpha_i, i=1, \dots, k-1\}$ で与えられている。

《定理 3.1》 アルゴリズム 3-1 の解 x^{0p} は問題(1.1)の弱意 Pareto 最適解である。

(証明) x^{0p} が弱意 Pareto 最適解でないと仮定しよう。すると、

$$f_i(\tilde{x}) < f_i(x^{0p}), \quad i=1, \dots, p \quad (3.3)$$

なる $\tilde{x} \in X$ が存在する。 x^{0p} は、 p 番目の最適化問題

$$\min_x f_p(x) \quad (3.4a)$$

$$\text{subj. to } f_i(x) \leq f_i(x^{0i}) + \alpha_i, \quad i=1, \dots, p-1 \quad (3.4b)$$

$$x \in X = \{x | g(x) \leq 0\} \quad (3.4c)$$

の解であるが、(3.3)式の関係より $\tilde{x}$ も(3.4b), (3.4c)式を満たし、さらに $f_p(\tilde{x}) < f_p(x^{0p})$ なので $\tilde{x}$ はよ

りよい目的関数値を与える実行可能解となり、 x^{0p} が問題(3.4)の解すなわちアルゴリズム 3-1 の解であることに矛盾する。」

数 値 例

最大成分最小化による最適満足解：

$$\begin{aligned} \min \{ & f_1(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 3)^2, f_2(x) \\ & = (x - 3)^2 + (x_2 - 1)^2 \} \quad (3.5) \\ \text{subj. to } & x_1^2 + x_2^2 - 4 \leq 0, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$f_1(x)$, $f_2(x)$ に関する最適解はそれぞれ $x^{01} = (0.63, 1.90)$, $x^{02} = (1.90, 0.63)$ で、このとき $f_1(x^{01}) = 1.35$, $f_2(x^{02}) = 1.35$ である。いま、 f_1 , f_2 の満足許容量をともに 2.65 とすると満足範囲は Fig. 3 の DEF となる。ここで最大成分最小化問題を解くと解 $\hat{x} = (1.41, 1.41)$ (Fig. 3, 点 A) をうる。 f_1 の満足許容量を 1.10, f_2 は 4.10 とする場合、満足範囲は Fig. 3 の GHB となり、このときの解は $\hat{x} = (1.35, 1.48)$ (Fig. 3, 点 B) である。図中、太線の円弧が Pareto 最適解の集合である。

選好順序 $f_1 > f_2$ のもとでの最適満足解：同じく例(3.5)において、まず f_1 を最小化し、 f_1 に関する満足許容量を 0.75 とすると満足範囲は Fig. 3 の ICJ となる。つぎに f_2 に関して、この範囲内で最適化すると $f_1 > f_2$ のもとでの解 $\hat{x} = (1.22, 1.57)$ (Fig. 3, 点 C) をうる。

4. 満足度関数による評価

2,3 節では満足の概念を制約式として取扱い、最適満足解を定式化した。この節では目的関数値がある満足度を表わす関数を経て評価される場合に、多目的計画の解がもつ性質を調べる。このような関数を満足度関数と呼ぶが、これは一種の評価関数であり、個々の成分目的関数に共通の評価尺度を与える。

さて、満足度関数をつぎのように書くことにする。

$$\begin{aligned} \phi[f(x) + \beta] \\ = (\phi_1[f_1(x) + \beta_1], \dots, \phi_p[f_p(x) + \beta_p]) \quad (4.1) \end{aligned}$$

ここで β_i は任意の定数で、 $\phi_i[f_i(x) + \beta_i]$ ($i=1, \dots, p$) は $f_i(x) + \beta_i$ に関して強意の単調減少関数と仮定する。そしてつぎの問題を考える。

$$\max_{x \in X} (\phi_1[f_1(x) + \beta_1], \dots, \phi_p[f_p(x) + \beta_p]) \quad (4.2)$$

このときつぎの関係が成り立つ。

《定理 4.1》⁸⁾ $\hat{x}$ が問題(4.2)の Pareto 最適解ならば、 $\hat{x}$ は元問題(1.1)の Pareto 最適解である。

(証明) $\hat{x} \in X$ は(4.2)式の Pareto 最適解とする。 $\hat{x}$ が(1.1)式の Pareto 最適解でないならば、 $f(\hat{x}) + \beta \leq f(\tilde{x}) + \beta$ かつ $f(\tilde{x}) + \beta \neq f(\hat{x}) + \beta$ なる $\tilde{x} \in X$ が存

Fig. 3 Multiobjective programming

在する。 $\phi[f(x) + \beta]$ は強意単調減少関数だから、 $\phi[f(\hat{x}) + \beta] \geq \phi[f(\tilde{x}) + \beta]$ かつ $\phi[f(\hat{x}) + \beta] \neq \phi[f(\tilde{x}) + \beta]$ が成り立つ。これは $\hat{x}$ が(4.2)式の Pareto 最適解であることに矛盾する。」

満足度関数に関する最小成分最大化問題

$$\max_{x \in X} \min_{i \in \{1, \dots, p\}} \{\phi_i[f_i(x) + \beta_i]\} \quad (4.3)$$

とスカラ化問題

$$\max_{x \in X} \sum_{i=1}^p w_i \phi_i[f_i(x) + \beta_i] \quad (4.4)$$

についてつぎの定理が成り立つ。

《定理 4.2》 $\hat{x}$ が問題(4.3)の解ならば、 $\hat{x}$ は元問題(1.1)の弱意 Pareto 最適解である。(定理 1.1 と定理 4.1 による)

《定理 4.3》 $\hat{x}$ がある $w_i > 0$ ($i=1, \dots, p$) に対する問題(4.4)の解ならば、 $\hat{x}$ は元問題(1.1)の Pareto 最適解である。(定理 1.2 と定理 4.1 による)

ところで問題(4.3)と等価な数値計画

$$\begin{aligned} \max_{x, z} z \\ \text{subj. to } \phi_i[f_i(x) + \beta_i] \geq z, i=1, \dots, p \end{aligned}$$

の解 $(\hat{x}, \hat{z})$ の $\hat{x}$ は一つの弱意 Pareto 最適解であるが、さらに(この $\hat{x}$ から出発して)つぎの問題

$$\begin{aligned} \max_x \sum_{i=1}^p \phi_i[f_i(x) + \beta_i] \\ \text{subj. to } \phi_i[f_i(x) + \beta_i] \geq \hat{z}, i=1, \dots, p \\ x \in X = \{x | g(x) \leq 0\} \end{aligned}$$

を解けば満足度を考えた問題(1.1)の Pareto 最適解をうることができる⁸⁾。

われわれはベクトル最小化問題の何らかの合理的な解を得たいと思っている。2~4 節では満足の概念を応用して多目的計画法を開発した。以下では通常の非線形計画法の手法を拡張して得られる多目的計画法を

提案する。

5. 中心法による多目的計画法のアルゴリズム

再び 1 節のベクトル最小化問題

$$\begin{aligned} \min_x f(x) \\ \text{subj. to } x \in X = \{x | g(x) \leq 0\} \end{aligned} \quad (5.1)$$

を考える。ただしここで f, g は凸関数と仮定する。

さて、制約領域 $g(x) \leq 0$ と現在値 x^k に関する目的関数のカット $f(x) \leq f(x^k)$ の共通集合の内点は、 x^k よりすべての f_i を改良する実行可能解として魅力のある点である。このような点の中から新しい点 x^{k+1} が得られればさらに強化されたカットを用いて同様の手続を繰返す。この過程は、収束した点が多目的計画として何らかの合理性が保証されれば妥当な手法と考えてよからう。事実、Huard の中心法⁵⁾は通常の実線形計画においてこのような手続が最適解に収束することを証明している。われわれは中心法をベクトル最小化問題に拡張する。

中心法は凸領域内の点 x から境界までの“距離”の概念を用いる。一般に領域 D 内の点 x が与えられたとき、 x から D の境界までの距離 $\mathcal{D}$ はつぎの性質をもつ連続関数 $\mathcal{D}(x, D)$ によって定義する。

- D の境界上の点 x に対して $\mathcal{D}(x, D) = 0$
- D のすべての内点 x に対して $\mathcal{D}(x, D) > 0$
- 領域 D の制約を置換えて $D' \subset D$ なる領域 D' を作る時、 $x \in D'$ なるすべての点 x に対して $\mathcal{D}(x, D') \leq \mathcal{D}(x, D)$
- $D_0 \supset D_1 \supset \dots \supset D_k \supset \dots$ かつ $x \in D_k, k=1, \dots$ のとき、 $k \rightarrow \infty$ で $D_k \rightarrow \phi$ ならば、 $k \rightarrow \infty$ で $\mathcal{D}(x, D_k) \rightarrow 0$ である。

凸領域 D とこの領域上で定義された距離関数 $\mathcal{D}(x, D)$ が与えられたとき、 D の中で $\mathcal{D}(x, D)$ を最大にする点 $\hat{x}$ を D の中心と呼ぶ。すなわち

$$\mathcal{D}(\hat{x}, D) = \max_{x \in D} \mathcal{D}(x, D)$$

領域 $X = \{x | g(x) \leq 0\}$ が内点をもつという仮定のもとでベクトル最小化問題に対するアルゴリズムはつぎのようになる。

x^k を X 内の点とする。このとき $\{x | f(x) \leq f(x^k)\}$ で定義される領域と X との共通部分である凸領域 A^k を考える。そして凸領域 A^k の中で距離関数を最大にする点、つまり A^k の中心に対応した新しい解 x^{k+1} を

$$\mathcal{D}(x^{k+1}, A^k) = \max_{x \in A^k} \mathcal{D}(x, A^k)$$

によってうる。そして x^k を x^{k+1} に置換えてまた計算を始めから行なう。

アルゴリズムの主な計算は各イテレーションでの中心の決定に関するものである。われわれは添字 k に対応した各イテレーションでつぎのような非線形計画問題を解く必要がある。

$$\max_x \mathcal{D}(x, A^k) \quad (5.2a)$$

$$\text{subj. to } f(x) - f(x^k) \leq 0 \quad (5.2b)$$

$$x \in X = \{x | g(x) \leq 0\} \quad (5.2c)$$

ここで距離関数 $\mathcal{D}(x, A^k)$ としては

$$\mathcal{D}(x, A^k) = \min_{i,j} \begin{cases} f_i(x^k) - f_i(x), & i=1, \dots, p \\ -g_j(x), & j=1, \dots, r \end{cases} \quad (5.3)$$

あるいは

$$\mathcal{D}(x, A^k) = \prod_{i=1}^p \{f_i(x^k) - f_i(x)\} \prod_{j=1}^r \{-g_j(x)\} \quad (5.4)$$

のような関数を用いる。問題 (5.2) の最適解 x^{k+1} は領域の内部にあり、制約 (5.2b), (5.2c) の境界にはないので、距離関数として (5.4) 式のような微分可能な関数を選べば勾配法を用いて問題 (5.2) の解は容易に求まる。

つぎに中心法で求めた多目的計画 (5.1) の解が弱意 Pareto 最適解になることを述べる。問題 (5.1) に関して、

$$B = \{x | f(x) < f(\hat{x}), g(x) \leq 0\} \quad (5.5)$$

とおく。問題 (5.1) に対する中心法の解を $\hat{x}$ とすると、領域 B 内のすべての点 x に対して距離関数 $\mathcal{D}(x, B) = 0$ である。

《定理 5.1》 問題 (5.1) に対する中心法の解を $\hat{x}$ とすると、 $\hat{x}$ は問題 (5.1) の弱意 Pareto 最適解である (すなわち $B = \phi$ である)。

(証明) $\hat{x}$ が弱意 Pareto 最適解でないと仮定する。すると、 $f(\hat{x}) < f(\tilde{x})$ なる $\tilde{x} \in X$ が存在する。ここで y を領域 X の内点とする。すなわち $g(y) < 0$ 。いま、

$$x(\theta) = \theta y + (1-\theta)\hat{x}, \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

とおくと、 g の凸性から $x(\theta) \in X$ であり、 $0 < \theta \leq 1$ なる θ に対して $g[x(\theta)] < 0$ 。また、 f の凸性から

$$\begin{aligned} f[x(\theta)] &\leq \theta f(y) + (1-\theta)f(\hat{x}) \\ &= \theta[f(y) - f(\hat{x})] + f(\hat{x}) \end{aligned}$$

ここで $f(\hat{x}) < f(\tilde{x})$ なので θ を十分小さくとれば $f[x(\theta)] < f(\tilde{x})$ となる。(実際、 $0 < \theta < \min_i \bar{\theta}_i$ なる任意の θ に対して $f[x(\theta)] < f(\tilde{x})$ が成り立つ。ここで、

$$\bar{\theta}_i = \frac{f_i(\tilde{x}) - f_i(\hat{x})}{|f_i(y) - f_i(\hat{x})|} > 0$$

すなわち

$$\begin{cases} g[x(\theta)] < 0 \\ f[x(\theta)] < f(\hat{x}) \\ 0 < \theta \leq 1 \end{cases}$$

なる θ が存在し、この θ に対しては $\mathcal{D}(x(\theta), B) > 0$ である。よって $\hat{x}$ が中心法の解であることに矛盾する。」

ベクトル最小化問題に対する中心法のアプローチの収束性の証明は Huard⁵⁾ とまったく同様に行なうことができる。上述のようにベクトル最小化問題に中心法を適用すると弱意 Pareto 最適解に収束する。さらに中心法のアプローチを以下のように修正すると Pareto 最適解が得られる。

問題 (5.1) に関して、

$$A^k = \{x | g(x) \leq 0, f(x) \leq f(x^k)\} \quad (5.6)$$

$$B^k = \{x | g(x) \leq 0, f(x) < f(x^k)\} \quad (5.7)$$

とおく。

アルゴリズム 5-1

〔ステップ 1〕 $k=1$ とし、初期点 $x^1 \in X$ を与える。

〔ステップ 2〕 $B^k = \emptyset$ ならステップ 4 へ。 $B^k \neq \emptyset$ なら、

$$\mathcal{D}(x^{k+1}, A^k) = \max_{x \in A^k} \mathcal{D}(x, A^k) \quad (5.8)$$

によって x^{k+1} を決定する。

〔ステップ 3〕 k を $k+1$ に置換え、ステップ 2 に戻りイテレーションを繰返す。

〔ステップ 4〕 すべての $x \in A^k$ に対して $f(x) = f(x^k)$ なら終了する。さもなければ、すべての $x \in A^k$ に対して $f_i(x) = f_i(x^k)$ なる f_i の項および g_j ($j=1, \dots, r$) の項を $\mathcal{D}(x, A^k)$ から除いた距離関数 $\mathcal{D}'(x, A^k)$ を作り、

$$\mathcal{D}'(x^{k+1}, A^k) = \max_{x \in A^k} \mathcal{D}'(x, A^k) \quad (5.9)$$

によって新しい解 x^{k+1} を求める。

〔ステップ 5〕 k を $k+1$ に置換えてステップ 4 に戻り、イテレーションを続ける。

基本アルゴリズム 5-1 は数値計算上の効率を考慮していろいろに変形できる。

《定理 5.2》 アルゴリズム 5-1 によってえられる解 $\hat{x}$ は問題 (5.1) の Pareto 最適解である。

(証明) $\hat{x}$ が Pareto 最適でない仮定する。すなわち $f(\tilde{x}) \leq f(\hat{x})$ かつ $f(\tilde{x}) \neq f(\hat{x})$ なる $\tilde{x} \in X$ が存在するとする。いま、

$$A = \{x | g(x) \leq 0, f(x) \leq f(\hat{x})\}$$

とおくと、 $\tilde{x} \in A$ である。また、ある i について $f_i(\tilde{x}) < f_i(\hat{x})$ であるから、 $\mathcal{D}'(\tilde{x}, A) > 0$ となり、ステップ 4 以後の手続 (距離関数 $\mathcal{D}'(x, A)$ の最大化) によ

てアルゴリズム 5-1 の解は $\hat{x}$ 以外の点に移る。よって $\hat{x}$ がアルゴリズム 5-1 の解であることに矛盾する。」

中心法のアプローチは $\mathcal{D}(x, A^k)$ を厳密に最適化しなくても最適解に収束することが証明されている⁵⁾。また上方からすべての目的関数値を減少させつつ最適解に近づき、その過程は非常に簡明でかつ領域 X の境界の特異性に影響されない (edge, 特異点, その他)。

アルゴリズム 5-1 により得られる解は初期点に依存する。それゆえ、最初どのような状態にあったかにより到達する多目的システムの最適解は異なるが、これは妥当な結果である。

アルゴリズム 5-1 および次節のアプローチは Pareto 最適解を求める数値計算法として価値がある (Pareto 最適解を求める数値計算法は現在ほとんど開発されていない)。これらは 2, 3 節で述べたような主観的合理性を与える唯一解に比べれば、積極的意味は薄い。しかし、すべての f_i が現在の状態より悪くならないでかつ初期点に近い Pareto 最適解が求まるという意味で、現状をふまえての目的関数の trade-off に基づく対話形のアプローチ (または全体の手続の一部) として、一つの解 (少なくとも Pareto 最適性の保証された) を求めるときに意義がある。

数値例 例 (3.5) を考える (Fig. 4 参照)。距離関数は (5.3) 式を利用する。そして、初期点を $x^1 = (0.40, 1.20)$ に選ぶ。このとき、 $f_1(x^1) = 3.60$, $f_2(x^1) = 6.80$ 。つぎに、距離関数 $\mathcal{D}(x, A^1)$ を最大化することにより、 A^1 の中心 $x^2 = (0.70, 1.50)$ をうる。このとき、 $f_1(x^2) = 2.34$, $f_2(x^2) = 5.54$ である。以下、同様にして A^2 の中心 $x^3 = (0.85, 1.66)$, A^3 の中心 $x^4 = (0.91, 1.73)$, A^4 の中心 $x^5 = (0.95, 1.75)$ のように求まる。 $\mathcal{D}(x^5, A^4) = 0$ であるから、 x^5 が解である。

Fig. 4 Multiobjective programming

6. 実行可能方向法による多目的計画法の アルゴリズム

Zoutendijk の実行可能方向法¹³⁾を多目的計画法に拡張する。ベクトル最小化問題 P を

$$\begin{aligned} P; \min_x (f_1(x), \dots, f_r(x)) \\ \text{subj. to } x \in X = \{x | g_i(x) \leq 0, i=1, \dots, r\} \end{aligned} \quad (6.1)$$

とする。ここで L, I, I^1, I^2 をそれぞれ目的関数, 制約式, 非線形制約式, 線形制約式の添字集合とする。そして, $f_i(x), i \in L$ と $g_i(x), i \in I$ は微分可能な凸関数でつぎの条件を満たすものとする。

- (a) $g_i(x) < 0, i \in I^1$ なる $x \in X$ が存在する。
- (b) $X_m = \{x \in X | f_i(x) = m_i, i \in L\}$ は有界。

方法の概要はつぎのようである。初期実行可能解から(i)微小動変が制約を侵害せずかつ(ii)その方向に進むことによりベクトル目的関数が改良される(すべての $i \in L$ について $f_i(x)$ が改良される)方向をみつめて, その方向に適当なステップ幅だけ進む。そして(i)(ii)を満たす方向がなくなるまで繰返す。(i)を満たす方向を実行可能方向, さらに(ii)を満たす方向を使用実行可能方向と呼ぶ。現在の点 x^k における使用実行可能方向 s^* はつぎのように定義される。

$$\begin{aligned} \nabla g_i(x^k)s^* < 0, i \in I^1 \quad \nabla g_i(x^k)s^* \leq 0, i \in I^2 \\ \nabla f_i(x^k)s^* < 0, i \in L \end{aligned}$$

ここで下つき添字 a は x^k における活性な制約式を意味する。

使用実行可能方向 s を発見するための補助最適化問題として, 方向発見問題 Q をつぎのように定義する。

$$Q: \min_{s, \xi} \xi \quad (6.2a)$$

$$\text{subj. to } \nabla f_i(x^k)s \leq \xi, i \in L \quad (6.2b)$$

$$\nabla g_i(x^k)s \leq \theta_i \xi, i \in I_a \quad (6.2c)$$

$$s^T s = 1 \quad (6.2d)$$

ただし, $\theta_i > 0$ for all $i \in I^1$

$$\theta_i = 0 \text{ for all } i \in I^2$$

問題 Q の解を (s^*, ξ^*) とする。いま, $\xi^* < 0$ であれば s^* は使用実行可能方向である。

《定理 6.1》 問題 P の実行可能解 x^k に関する方向発見問題 Q の解を (s^*, ξ) とするとき, $\xi^* < 0$ ならば s^* は使用実行可能方向である。

(証明) 使用実行可能方向の定義より明らか。

もし $\xi^* \geq 0$ であれば, つぎの定理 6.2 より x^k が弱意 Pareto 最適解であるのでイテレーションは終了する。

《定理 6.2》 問題 P の実行可能解 x^k に対する方

向発見問題 Q の解を (s^*, ξ^*) とするとき, $\xi^* \geq 0$ ならば x^k は問題 P の弱意 Pareto 最適解である。

(証明) $\xi^* \geq 0$ が問題 Q の最適解であるから, $\xi < 0$ のとき(6.2b), (6.2c)式は解をもたない。それゆえ

$$\nabla f_i(x^k)s < 0, i \in L$$

$$\nabla g_i(x^k)s < 0, i \in I_a^1$$

を満たす s は存在しない(注 1)。ここで Gorden の定理(注 2)により

$$\sum_{i \in I_a^1} \lambda_i \nabla g_i(x^k) + \sum_{i \in L} \mu_i \nabla f_i(x^k) = 0 \quad (6.3)$$

ただし, $\lambda_i \geq 0, i \in I_a^1, \mu_i \geq 0, i \in L$ であつた少なくとも一つの $\lambda_i > 0$ または $\mu_i > 0$ が存在する。

(i) もし $\mu \geq 0$ かつ $\mu \neq 0$ ならば(6.3)式と弱意 Pareto 最適解に関する基本定理^{7), 3), 6a)}より x^k は X における弱意 Pareto 最適解である。

(ii) もし $\mu = 0$ ならば, 少なくとも一つの $\lambda_i > 0, i \in I_a^1$ であり,

$$\sum_{i \in I_a^1} \lambda_i \nabla g_i(x^k) = 0 \quad (6.4)$$

であるから, 脚注の定理(注 3)よりこれは条件(i)に矛盾する。」

$\xi^* < 0$ のとき, s^* の方向に進むステップ幅はつぎのステップ幅決定問題 P_a で決定する。

$$P_a; \min_{\alpha} \sum_{i \in L} f_i(x^k + \alpha s^*) \quad (6.5a)$$

$$\begin{aligned} \text{subj. to } f_i(x^k + \alpha s^*) \leq f_i(x^k), i \in L \\ (6.5b) \end{aligned}$$

$$g_i(x^k + \alpha s^*) \leq 0, i \in I \quad (6.5c)$$

ここで与えた実行可能方向法の特徴は方向発見問題 Q にある。すなわち(6.2b)式によってすべての目的関数 f_i の改良が保証されるが, これは多目的的な考え方により実行可能解が探索されていることを意味する。それゆえ, 多目的計画法の各種のアルゴリズムの一部としても利用価値がある。

数 値 例

$$\min \{f_1(x) = -x_1, f_2(x) = -x_2\}$$

$$\text{subj. to } x_2^2 - 2x_2 + 2x_1 - 1 \leq 0, x_1^2 + x_2^2 - 2 \leq 0$$

上の問題で初期点 $x^0 = (0.50, 0.25)$ から Pareto 最適解 $\hat{x} = (1.00, 1.00)$ をうる過程を Fig. 5 に示す。安全係数 $\theta = 0.90$ としたとき点 $x^1 \rightarrow x^4$ は最初の制約式上に求まり, 5 回目のイテレーションで図中太線

(注 1) $\nabla g_i(x^k)s \leq 0, i \in I_a^2$ という s が存在しないことは x^k が問題 P の実行可能解であることに反する。

(注 2) Gorden の定理; $Ax < 0$ が解をもたない。 $\Leftrightarrow u \geq 0$ かつ少なくとも一つの i に対して $u_i > 0$ なるある u に対して $A^T u = 0$ 。

(注 3) 定理 (Zoutendijk¹³⁾) 条件(i)を満たす凸関数 $g_i(x), i \in I$ について $x \in X$ かつ $\sum_{i \in I_a^1} \lambda_i \nabla g_i(x^k) = 0$ ならば, すべての $i \in I_a^1$ について $\lambda_i = 0$ である。

Fig. 5
Multiobjective
programming

で示した Pareto 最適解に収束した。

7. おわりに

この論文では複数の目的関数を有する多目的システムの最適化のアルゴリズムを研究した。すなわち満足概念の導入や非線形計画法の拡張等により、ベクトル最小化問題の何らかの意味で最適な唯一解を求める方法を開発した。

前にも述べたように Pareto 最適性はあまりにも消極的な合理性を与えるにすぎないがベクトル最小化問題の基本には違いなからう。したがって多目的計画法の各種のアルゴリズムは最小限、Pareto 最適性を満たすことが必要であろうし、また多目的計画法のアルゴリズムの一部として Pareto 最適解を見つける具体的な数値計算法がたびたび必要とならう。この論文で提案したいいくつかのアプローチはこの要求に答えるように考慮されている。

参考文献

- 1) Benayoun, R., et al.: "Linear Programming with Multiple Objective Functions; Step Method (ST-EM)," *Mathematical Programming*, 1-3, 336/375 (1971)
- 2) Chu, K.C.: "On the Noninferior Set for the Systems with Vector-Valued Objective Function," *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC-15-5, 591/593 (1970)
- 3) Da Cunha, N.C., Polak, E.: "Constrained Minimization under Vector-Valued Criteria in Finite-Dimensional Spaces," *J. of Math. Anal. and Appl.* 19-1, 103/124 (1967)
- 4) Geoffrion, A.M.: "Solving Bicriterion Mathematical Programs," *Operations Research*, 15-1, 39/54 (1967)
- 5) Huard, P.: "Resolution of Mathematical Programming with Nonlinear Constraints by the Method of Centers," in *Nonlinear Programming* (Abadie ed.) 208/219 North-Holland (1967)
- 6a) Kojima, N.: "Vector Maximum Problems," *Keio Engineering Reports*, 24-4, 47/64 (1971)
- 6b) Kojima, N.: "Vector Maximum Problems with Convexity," to appear
- 7) Kuhn, H.W., Tucker, A.W.: "Nonlinear Programming," *Proc. Second Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob.*, Berkeley (1951)
- 8) Nishino, M.: "A Research on Optimization of Systems with Vector-Valued Objective Function," Master Thesis, University of Keio, Yokohama (1974)
- 9) Philip, J.: "Algorithms for the Vector Maximization Problem," *Mathematical Programming*, 2-2, 207/229 (1972)
- 10) Schmitendorf, W.E.: "Cooperative Games and Vector-Valued Criteria Problems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC-18-2, 139/144 (1973)
- 11) Vincent, T.L., Leitmann, G.: "Control Spaces Properties of Cooperative Games," *J. of Optimization Theory and Applications*, 6-2, 91/113 (1970)
- 12) Zadeh, L.A.: "Optimality and Non-Scalar-Valued Performance Criteria," *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC-8-1, 59/60 (1963)
- 13) Zoutendijk, G.: "Method of Feasible Directions," *American Elsevier Publishing Co.*, (1960)