ハイブリッドフィルタを用いた変化率の計測[†]

立花 康夫*・首藤 勝*

On an Instrumentation of Derivative Signal Using a Hybrid Filter

Yasuo TACHIBANA* and Masaru SUDO*

This paper deals with an observation method of derivative signal using a hybrid filter. The derivative signal is produced by integrating the product of an input and a sawtooth wave over a finite time interval T . The sawtooth wave has period T . Three such derivative signals are provided for sampling of period $T/3$. Their initial points of integration are at intervals of $T/3$.

The approximate frequency characteristic of this hybrid filter is derived. In order to check the properties of this filter in the time domain, a digital simulation was carried out. And some examples of this simulation are presented.

1. はじめに

観測信号からその変化率を抽出する必要性はいろいろな工業分野で発生する。しかも変化率を直接観測値として計測できない場合が多い。たとえば工業プラントの状態観測の中で温度、圧力、流量、回転数や電力負荷等はその絶対値を比較的容易に計測することができるが、それらの変化率はプラントの監視や記録、また制御等においてきわめて重要であるにもかかわらず直接その絶対値を観測することはできない。しかも $^{\circ}\text{C}/\text{Hour}$, $\text{kg}/\text{cm}^2\cdot\text{Hour}$ 等の単位で評価されるような非常にゆっくりした変化を雑音に埋もれた信号の中から抽出するには現在から相当遠い過去までの影響をひろいあげる必要がある。このためには狭い低域特性と微分特性をかねそなえたフィルタが必要となる。

この目的にはデジタルフィルタがよく用いられている。このようなデジタル変化率フィルタとしてはアナログフィルタを双1次変換等の手法でデジタル化した後に適当な加工を施して帰帰形 IIR (Infinite Impulse Response) フィルタを得る方法等が考えられている^{1), 2)}。また最近では理想的位相遅れ特性が得ら

れること、安定性に対する考慮が不用であるなどの理由で FIR (Finite Impulse Response) 形フィルタによる変化率フィルタがよく用いられるようになった^{3), 4)}。著者も信号の低域成分の変化率を抽出できるようなフィルタ⁷⁾を提案し同定⁸⁾、昇温制御等^{5), 6)}への適用を行ってきた。この論文では著者の提案手法に⁷⁾に基づく FIR 形デジタル変化率フィルタをアナログ化し、全体をハイブリッドフィルタとして実現する方法を提案し、その近似的な周波数特性につき議論した。またこの構成法を示すと共に、時間領域での特性を確かめるためのデジタルシミュレーションの結果を与えた。

2. 連続形 FIR 変化率フィルタ

著者がすでに提案したデジタル変化率^{5), 6), 7)} フィルタ

$$D(z) = \frac{3}{m(m+1)(2m+1)T_s} \sum_{k=1}^{2m+1} (m+1-k)z^{1-k} \quad (1)$$

は周波数特性

$$D(e^{i\omega T_s}) = i\omega D^*(\omega T_s) e^{-i\omega m T_s} \quad (2)$$

をもつ。ここで T_s はサンプル周期であり、 $D^*(x)$ は x の実関数であって

$$D^*(x) = \frac{3}{(2m+1)(1-\cos x)} \left\{ \frac{\sin mx}{mx} - \frac{\sin(m+1)x}{(m+1)x} \right\} \quad (3)$$

で表わされる。 $D^*(0)=1$ であり x が増大すると $D^*(x)$ は急激に 0 に近づく。いま $D(z)$ への入力列を $\{x_n\}$ 、出力列を $\{y_n\}$ とすると

$$y_n = \frac{3}{m(m+1)(2m+1)T_s} \sum_{k=1}^{2m+1} (m+1-k)x_{n+1-k} \quad (4)$$

である。(4)式において

$$(2m+1)T_s = T \quad (5)$$

として、 T を一定にしたまま m を増大させてみる。こ

[†] 第13回計測自動制御学会学術講演会で発表(昭49・8)

* 三菱電機(株)鎌倉製作所 鎌倉市上町屋 325

* Mitsubishi Electric Corp., Kamakura

(Received July 10, 1974)

のとき任意に固定した t に対して

$$t = n \cdot T, \quad (6)$$

を満すようにして n を増大させると連続化された FIR 形フィルタ

$$y(t) = \int_{t-T}^t w(t-\tau)x(\tau)d\tau \quad (7)$$

を得る。ここで (Fig. 1 参照) インパルス応答 $w(t)$ は

$$w(t) \triangleq \begin{cases} \frac{12}{T^3} \left(\frac{T}{2} - t \right), & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{Otherwise} \end{cases} \quad (8)$$

である。このフィルタにランプ状信号 $x(t) = \alpha \cdot t + \beta$ を加えると出力は $y(t) = \alpha$ となり入力信号の変化率を表わしていることがわかる。

つぎにこのフィルタの周波数特性を調べるために入力信号として $x(t) = e^{i\omega t}$ を選んだ場合を考える。この場合の出力信号は

$$y(t) = i\omega \cdot I \left(\frac{\omega T}{2} \right) \cdot e^{i\omega \left(t - \frac{T}{2} \right)} \quad (9)$$

と表わされる。ただしここで

$$I(\theta) \triangleq \frac{3(\sin \theta - \theta \cdot \cos \theta)}{\theta^3} \quad (10)$$

である。Fig. 2 に $|I(\theta)|^2$ および $|\theta \cdot I(\theta)|^2$ の変化を与えた。この図からみると $\theta \triangleq \omega T/2$ として、 $|\theta| \leq 2$ すなわち $|\omega| \leq 4/T$ の範囲ではほぼ微分特性を示していることがわかる。 $|\theta \cdot I(\theta)|^2$ の変化をみると第 2, 第 3 の山の高さも比較的高いが、これはこのフィルタ (7) 式を通す前に簡単な構造の低域アナログフィルタ、たとえば 1 次遅れ

$$F_{Tc} \left(\frac{\omega T}{2} \right) \triangleq \frac{1}{1 + i\omega T_c} \quad (11)$$

を通すことにより取り除くことが可能である。Fig. 2 の例は $\alpha \triangleq 2 \cdot T_c/T = 0.3$ とした場合の総合特性

$$\left| \frac{1}{1 + i\alpha \cdot \theta} \cdot \theta \cdot I(\theta) \right|^2$$

を描いたものであり、ほぼ $|\omega| \leq 3\pi/2T$ にわたる一つの山だけになる。もし (7) 式のようなフィルタが実現できるならば T の選び方で入力信号の中の必要とする低域成分の変化率を抽出することができる。

3. サンプリング

(7) 式のようなフィルタは実際には構成できない。しかしそのサンプル値を取ることは可能である。Fig. 2 より $F_{Tc}(\omega T/2)$ 通過後 (7) 式を通過した信号は

$$|\theta| \leq 4.4443 \triangleq \frac{3\pi}{2} \quad (12)$$

Fig. 1 Conceptual structure of the hybrid derivative filter

Fig. 2 Frequency characteristics of $I(\theta)$

の部分以外はほとんど減衰されてしまうので出力信号の周波数成分はほぼ

$$|\omega| \leq \frac{3\pi}{T} \quad (13)$$

に限定されているものと考えられる。そこでサンプル周期を T_s として折り曲げ周波数 π/T_s を

$$\frac{T_s}{\pi} \geq \frac{3\pi}{T} \quad (14)$$

を満足するように選べばサンプリングにより生ずる別名の誤差を十分に小さくすることが可能となる。そこで $T_s = T/3$ と選んだ場合について別名の誤差がどの程度におさえられるかについて詳論してみる。いま

$$y_k \triangleq \frac{12}{T^3} \int_{\frac{T}{3}(k-3)}^{\frac{T}{3}k} \left\{ \tau - \left(\frac{k}{3} - \frac{1}{2} \right) T \right\} x(\tau) d\tau \quad (15)$$

とする。ただし $\hat{x}(t)$ は信号 $x(t)$ をフィルタ $F_{Tc}(\omega T/2)$ に通して得られた信号とする。いまこのサンプル値を $T/3$ の間 0 次保持することにより得られた信号を $u(t)$ として、その Laplace 変換を $U(s)$ として

$$U(s) = \frac{1 - e^{-\frac{T}{3}s}}{s} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} y_k \cdot e^{-k \frac{T}{3}s} \quad (16)$$

と表わされる。ただしここで時間軸の負の部分で信号

の値は0とする. このフィルタの周波数特性を調べるために入力信号として $x(t)=e^{i\omega t}$ と選んでみる. このとき

$$y_k=i\omega \cdot \frac{1}{1+i\omega T_c} \cdot I\left(\frac{\omega T}{2}\right) \cdot e^{i\omega\left(\frac{1}{3}k-\frac{1}{2}\right) \cdot T} \quad (17)$$

と表わされるので

$$U(s)=i\omega \frac{1}{1+i\omega T_c} \cdot \frac{1-e^{-\frac{1}{3}T \cdot s}}{\frac{1}{3}T \cdot s} I\left(\frac{\omega T}{2}\right) \cdot e^{-\frac{i\omega T}{2}} \frac{1}{1-e^{(i\omega-s)\frac{T}{3}}} \quad (18)$$

となる. したがって出力 $u(t)$ は逆 Laplace 変換の公式より

$$u(t)=i\omega \cdot \frac{1}{1+i\omega T_c} \cdot I\left(\frac{\omega T}{2}\right) \cdot e^{-\frac{i\omega T}{2}} \frac{1}{2\pi i} \int_{r-i\infty}^{r+i\infty} F(s)ds \quad (19)$$

ここで

$$F(s) \triangleq \frac{1-e^{-\frac{1}{3}T \cdot s}}{\frac{1}{3}T \cdot s} \cdot \frac{e^{t \cdot s}}{1-e^{(i\omega-s)\frac{T}{3}}} \quad (20)$$

であり, r は正数とする. ところで解析関数 $F(s)$ の極は $s=0$, $s=i(\omega+6l\pi/T)$ ($l=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) に分布している. . またこれらの極はすべて一位の極であるから留数はそれぞれ

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s) = 0 \quad (21)$$

$$\lim_{s \rightarrow i\left(\omega + \frac{6l\pi}{T}\right)} \left\{ s - i\left(\omega + \frac{6l\pi}{T}\right) \right\} F(s) = \frac{e^{-\frac{1}{6}i\omega T} \sin \frac{\omega T}{6}}{\frac{1}{6}\left(\omega + \frac{6l\pi}{T}\right) T} e^{i\left(\omega + \frac{6l\pi}{T}\right)t} \quad (22)$$

Fig. 3
Frequency
characteristics
of $P_l(\theta)$

となり, 留数定理により

$$u(t)=i\omega \cdot \sum_{l=-\infty}^{\infty} P_l\left(\frac{\omega T}{2}\right) \cdot e^{i\left(\omega + \frac{6l\pi}{T}\right)t} \quad (23)$$

ここで

$$P_l(\theta) \triangleq \frac{I(\theta)}{1+ia\theta} \cdot \frac{e^{-i\frac{4}{3}\theta \sin \frac{\theta}{3}}}{\frac{\theta}{3} + l \cdot \pi} \quad (24)$$

を得る. (23)式の $l \neq 0$ の項はいわゆる別名効果として生じたものであり, $l \neq 0$ の項の総和が別名誤差となる. 各項の影響の度合を調べるために Fig. 3 には種類の l に対する $|\omega T/2 \cdot P_l(\omega T/2)|^2$ を $\theta \triangleq \omega T/2$ として図示した ($a=0.3$). これから (23)式において $|l| \geq 1$ の項は $|\omega| \leq \pi/T$ に対する影響は小さなものであることがわかり近似的に

$$u(t) \doteq i\omega \cdot P_0\left(\frac{\omega T}{2}\right) \cdot e^{i\omega t} \quad (25)$$

となる. そこでこのフィルタの周波数特性は近似的に

$$i\omega P_0\left(\frac{\omega T}{2}\right) i\omega \cdot V\left(\frac{\omega T}{2}\right) \cdot e^{-i\left(\frac{2}{3}\omega T + \tan^{-1} \omega T_c\right)} \quad (26)$$

と表をされる. ここで

$$V(\theta) \triangleq \frac{1}{1+a^2 \cdot \theta^2} \cdot \frac{\sin \frac{\theta}{3}}{\frac{\theta}{3}} \cdot I(\theta) \quad (27)$$

である. $V(\theta)$ は θ の実関数である. (7)式で与えられる連続 FIR フィルタの周波数特性(9)式と比較してみると, 前置した1次遅れフィルタおよび0次保持フィルタの効果により振幅特性では $1/(1+\omega^2 \cdot T_c^2) \cdot \sin(\omega T/6)/(\omega T/6)$ だけ影響を受けている. すなわち $V(\omega T/2)$ は $I(\omega T/2)$ に比較してさらに狭帯域の低域特性となる. また(9)式に比較して位相は $\tan^{-1} \omega T_c + \omega T/6$ だけ遅れている.

振幅特性に関してはより狭帯域信号の微分をとるという意味で望ましいが位相の遅れは好ましくない. T_c を大きくすると振幅特性は改良される. 特に $|\theta| \geq 3\pi/2$ の範囲の $|\theta \cdot P_l(\theta)|^2$ は T_c の増大に伴い0に近づくから別名誤差を軽減する意味で望ましい. しかし T_c の増大に伴い位相が遅れてくるから $a \triangleq 2 \cdot T_c/T$ を適当に選ぶ必要がある.

つぎに近似特性(26)式と別名誤差を比較するために各 l の値に対する信号のパワー $|i\omega \cdot P_l(\omega T/2)|^2$ を考慮して歪の度合を表わす

$$R(\theta) \triangleq \frac{\sum_{l \neq 0} \{\theta P_l(\theta)\}^2}{\{\theta \cdot P_0(\theta)\}^2} = \sum_{l \neq 0} \left(\frac{\theta}{\theta + 3l\pi} \right)^2 \quad (28)$$

を考えてみる。Fig. 4 は $R(\theta)$ を図示したもののだが、 $|\theta| \leq (3/2)\pi$ では $R(\theta) \leq 0.75$ であり、ほぼ微分特性を示す $|\theta| \leq \pi/2$ では (Fig. 3 $l=0$ に対するグラフ参照) $R(\theta) \leq 0.07$ となることがわかる。

4. ハイブリッドフィルタとしての構成

いままでに述べたフィルタはつぎのように構成できる。Fig. 5 のように周期 $T/3$ で発生するインパルス PL_0 から、周期 T で $T/3$ ずつ位相のずれたインパルスをつくり PL_1, PL_2, PL_3 とする。三つの積分器 IS_1, IS_2, IS_3 で $12/T^3$ という定数を積分し三つの鋸歯状波を得る。これらの積分は PL_1, PL_2, PL_3 のインパルスでリセットするものとする。積分 IS_1, IS_2, IS_3 の出力より $6/T^2$ だけ引き去った信号 ST_1, ST_2, ST_3 はそれぞれ周期 T で $T/3$ だけ位相の遅れた鋸歯状波である。信号 $x(t)$ に 1 次遅れ $FT_c(\omega T/2)$ を通した信号 $\tilde{x}(t)$ と各 ST との積を IV_1, IV_2, IV_3 で積分する。これらの積分はおおの PL_1, PL_2, PL_3 により 0 にリセットされる。リセットする寸前にサンプラにより信号 y_1, y_2, y_3 を $T/3$ ごとにサンプリングしその値を 0 次保持フィルタを通したあとに、その出力を $y(t)$ とする。実際にはインパルスの幅も考慮する必要がある。パルス幅を T_P とすると (15) 式の積分は

$$y_k = \frac{12}{(T - T_P)^3} \times \int_{\frac{T}{3}(k-3) + \frac{T_P}{2}}^{\frac{T}{3}k - \frac{T_P}{2}} \left\{ \tau - \left(\frac{k}{3} - \frac{1}{2} \right) T \right\} \tilde{x}(\tau) d\tau \quad (29)$$

のように変更しなければならない。しかし $T_P \ll T$ の場合には 3. で与えた理想的な場合の結果が十分良好な近似を与える。

5. 応答性評価のためのシミュレーション

Fig. 5 のように構成したフィルタの種々の信号に対する時間領域域での応答特性を評価するために、デジタルシミュレーションを実行してみた。 $T_P=0.1$, $T=3$ としてパルスを発生させ、積分としては $h=0.05$ で Runge-Kutta 法を用いた。また 1 次遅れの時定数は $T_c=1/3$ とした。フィルタへの試験入力として $1+N(0, 0.1)$ (Fig. 6 参照), $t+N(0, 0.5)$ (Fig. 7 参照), $t^2+N(0, 5)$ (Fig. 8 参照), および $\sin(3t)+N(0, 0.1)$ (Fig. 9 参照) を選んだ。ここで $N(0, \sigma)$ は標準偏差 σ ,

平均 0 の正規性擬似雑音である。ただしきざみ幅 h の計算に伴う 4 回のステップ (Runge-Kutta 法のため) の間入力信号は値を保持した。変化率フィルタの特性からしてステップ入力に対しては出力は 0 となるべきだが、入力信号の 0 から 1 への立ち上りの効果により $t=3$ のところから開始される計算値 (出力) は、はじめは大きい、やがて 0 となることを示している。

Fig. 7 では出力として 1, Fig. 8 では t が出力されるべきであるが、フィルタの出力はほぼその値を示している。Fig. 9 の例では、 $\omega=3$ したがって $\theta=4.5$ であり、Fig. 3 より出力としてはほぼ 0 がでてくるべきであるが、フィルタの出力はほぼその値を示している。

6. 結 論

ハイブリッド FIR フィルタとしてはサンプル周期ごとの平均値を生ずるようなものが積分形 A/D 変換器や、BM 計 (抄紙機等で用いられる Basis Weight 計) 等で広く使用されている。この論文では信号に鋸歯状波を掛け有限区間の積分を実行することにより信号の変化率を観測することができること、別名の誤差の発生することを極力防ぐために積分期間の $1/3$ の間隔でサンプリングしなければならないことを示した。

Fig. 4 Distortion function $R(\theta)$

Fig. 5 Structure of the hybrid derivative filter

Fig. 6 Response for step function

Fig. 8 Response for quadratic function

Fig. 7 Response for ramp function

Fig. 9 Response for simple harmonic function

このサンプリングした信号は $|\omega| < \pi/T$ の範囲で入力信号の微分を表わし、 $|\omega| > 3\pi/T$ の信号をほぼ除去することを周波数特性の近似式を与えて示した。このフィルタは具体的なハードウェアとして構成したものではないが、変化率信号計測に対する新しい手法を提供するものと考えられる。

この信号の変化率を抽出する方法は同定の効果的手法を見出す過程より得られたものであり、その動機付けをしていただいた大阪大学鈴木胖教授および関西電力総研の内田義久氏に、また研究の過程で種々ご討論を頂いた三菱電機の半場哲氏に、そしてシミュレーション・プログラムの作成を手伝って頂いた IN 企画通信社の紀本賢一氏に深い感謝の意を表する。

参 考 文 献

- 1) 船田, 池谷: デジタルフィルタによる非定常過程波数分布の特徴抽出について, 情報処理, **13**-1, 22/28(1972)

- 2) 船田, 池谷: デジタル微分フィルタについて, 信学論, **54-C-2**, 182/183 (1971)
- 3) L.R. Rabiner and W. Schaffr: On the Behaviour of Minimax Relative Error FIR Digital Differentiators, Bell Syst. Tech. J., **53**-1, 333/361 (1974-2)
- 4) J. McClellen: A Computer Program for Designing Optimum FIR Linear Phase Digital Filters, IEEE Trans., **AU-21**-6, 502/526 (1973)
- 5) 立花: 同定を含む超臨界圧ボイラ水冷壁出口流体温度の起動時昇温制御, 計測自動制御学会論文集, **8**-2, 147/154 (1972)
- 6) Y. Tachibana and T. Kamei: Temperature Raise Control of Super Critical Boiler using Derivative Digital Filter, 4th IFAC/IFIP Intr. Conf. on Digital Computer Application to Process Control, 382/393, Zürich, Switzerland (1974-3)
- 7) 立花: 信号の変化率を抽出するアルゴリズムについて, 電気学会情報処理研究会資料, IP-71-24 (1971)
- 8) 立花: デジタルフィルタを用いた同定, 計測自動制御学会論文集, **9**-4, 438/445 (1973)