確率近似法に基づく非線形フィルタの 漸近効率とその改善法[†]

魚 崎 勝 司*

Asymptotic Efficiency of a Nonlinear Filter Based upon the Stochastic Approximation Procedure and Its Improvement

Katsuji UOSAKI*

The performance of a state estimation algorithm of a nonlinear stochastic dynamical system based upon the stochastic approximation procedure is discussed from the viewpoint of asymptotic efficiency.

Using Fabian's theorem, we first derive the asymptotic distribution of the estimated error $(\hat{x}_n - x_n)$, and obtain the asymptotic efficiency of the state estimation algorithm based upon the stochastic approximation.

Then, we show that it is necessary to transform the deviation $(y_{n+1} - f_{n+1}(g_n(\hat{x}_n)))$ by the transformation function corresponding to the probability distribution function of the observation noise in order to improve the asymptotic efficiency.

Finally, the optimal transformation function and the improvement factor of the asymptotic efficiency are given for several distributions.

1. 緒 言

確率近似法に基礎をおく非線形フィルタによる非線形系の状態推定の可能性については、すでにいくつかの研究がなされている^{1)~3)}。このフィルタは一般にアルゴリズムが簡単であり、かつ理論的に収束が保証されうところに大きな特色がある。しかしフィルタのゲインの定め方に、一般的な方法がないことから、試行錯誤的なとり扱いを要求されるなどの難点もある。

本論文においては、フィルタの性能評価の一つとして漸近効率を取上げ、一変数系について確率近似フィルタの漸近効率を具体的に考察すると共に、漸近効率を向上させるために、推定値の外挿値と、対応する観

測値との差をそのまま用いるのではなく、ある変換を行なってアルゴリズムに導入すればよいことを示す。

この際、フィルタゲインの定め方にもふれる。

漸近効率を向上させる手段として、Albert と Gardner も変換された観測値を用いるアルゴリズムを静的システムに対して提案している⁴⁾が、ここで報告する方法とは、対象も異なるが、接近法にも差があり、適用範囲も限定されていると考えられる。

2. 確率近似フィルタと漸近効率

対象とする系は、一変数系で、システム動特性が

$$x_{n+1} = g_n(x_n) + v_n \quad (2.1)$$

観測機構が

$$y_n = f_n(x_n) + w_n \quad (2.2)$$

で与えられるとする。ここに x_n : 時刻 n における状態変数, y_n : 時刻 n における観測値, v_n : 未知の確定的外乱, w_n : 観測雑音, f_n : 非線形状態推移関数 (既知), g_n : 非線形観測関数 (既知) とする。なお、多くの制御問題では状態推移式を完全に既知として扱っているが、その場合には (2.1) 式で、 $v_n = 0$ とすればよい。未知の v_n の項を付加しただけ (2.1) 式の方が一般的である。状態 $\{x_n\}$ の推定過程 $\{\hat{x}_n\}$ をつぎのように構成する。

$$\hat{x}_{n+1} = g_n(\hat{x}_n) + a_n \{y_{n+1} - f_{n+1}(g_n(\hat{x}_n))\} \quad (2.3)$$

$$\hat{x}_1: \text{任意 (ただし } E(\hat{x}_1^2) < \infty)$$

この推定過程によって、真の状態を推定できる条件を与えたのが、《定理 1》¹⁾ である。

《定理 1》 以下の条件を仮定する。

C1 すべての x, y について、正数 K_1, K_2 が存在し

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq K_1 |x - y| + K_2 \quad (2.4)$$

$$(x - y)(f_n(x) - f_n(y)) > 0 \quad (2.5)$$

C2 すべての x, y について、正数 $\{\gamma_n\}$ が存在し

$$|g_n(x) - g_n(y)| \leq \gamma_n |x - y| \quad (2.6)$$

[†] 第 16 回自動制御連合講演会で発表 (昭 48・10)

第 5 回統計学的制御理論シンポジウムで発表 (昭 48・11)

* 大阪大学工学部 吹田市字山田上

* Faculty of Engineering, Osaka University, Suita

(Received December 18, 1973)

かつ

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n - 1)^+ < \infty \quad (2.7)$$

ただし $u^+ = (u + |u|)/2$ を意味する.

C3 観測雑音 $\{w_n\}$ について

$$E(w_n) = 0 \quad (2.8)$$

$$E(w_n w_m) = \sigma^2 \delta_{mn} < \infty \quad (2.9)$$

ただし δ_{mn} は Kronecker の δ で $\delta_{mn} = 0$ ($m \neq n$), $\delta_{mn} = 1$ ($m = n$) である.

C4 未知確定外乱 $\{v_n\}$ について

$$v_n = o(a_n) \quad (2.10)$$

C5 正数列 $\{a_n\}$ について

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \infty \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 &< \infty \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

このとき, $\{\hat{x}_n\}$ は $\{x_n\}$ につきの意味で収束する.

$$\Pr\{\lim_{n \rightarrow \infty} |\hat{x}_n - x_n| = 0\} = 1 \quad (2.12)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{x}_n - x_n)^2 = 0 \quad (2.13)$$

(2.3) 式で定められる推定過程にはたとえば $\{a_n\}$ の定め方によっても種々のものが考えられるが, 収束が保証される中では, 推定値 $\hat{x}_n$ のバラツキ (分散) の小さいことが望ましい. ところで推定値 $\hat{x}_n$ の分散の下限 (達成されるか否かは問わない) は適当な正則条件のもとで, つぎの Cramer-Rao の不等式によって与えられる⁵⁾. (ここで x_n の推移式は確定的なもので $x_1, \dots, x_{n-1}$ は x_n から確定的に定まるので推定される母数はただ一つ x_n だけとしてよい)

$$\text{Var}(\hat{x}_n) \geq \{1 + (db_n/dx_n)\}^2 / I_n^2(x_n) = \text{Var}_{\min}(\hat{x}_n) \quad (2.14)$$

ここに

$$b_n = x_n - E(\hat{x}_n) \quad (2.15)$$

$$I_n^2(x_n) = E\left(\frac{\partial \log L_n}{\partial x_n}\right)^2 \quad (2.16)$$

$$L_n = \prod_{i=1}^n p_i(y_i - f_i(x_i)) \quad (2.17)$$

であり, $p_i(w)$ は観測雑音 w の確率密度関数を表わしている. 以下の議論では, 簡単のため, w の確率密度関数は時間不変であるとして, $p(w)$ とし, さらに

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{db_n}{dx_n} = 0 \quad (2.18)$$

を仮定する. このとき, x_n の推定値の漸近効率を推定値 $\hat{x}_n$ の $n \rightarrow \infty$ での漸近分散と Cramer-Rao の不等式で与えられる分散の下限 $\text{Var}_{\min}(\hat{x}_n)$ との比で

$$\eta = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{Var}(\hat{x}_n) I_n^2(x_n)} \quad (2.19)$$

と定義する. 明らかに $\eta \leq 1$ であり, η が 1 に近いほど $\hat{x}_n$ の漸近分散は小さいから推定値として望ましいといえる. (2.3) 式で与えられる推定過程の漸近効率を求めるために, つぎの定理を準備する.

《定理 2》 条件 C1~C5 に加えて, 以下の条件を仮定する.

A0 $f_n(x), g_n(x)$ は C^1 クラスの関数である.

A1 正数 K_3 が存在して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{d}{dx} f_{n+1}(g_n(x)) \right]_{x=x_n} = K_3 \quad (2.20)$$

$$A2 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \{1 - g_n'(x_n)\} = K_4 \leq \frac{1}{2} \quad (2.21)$$

$$A3 \quad \text{正数 } \delta \text{ と } K_5 \text{ が存在して, } E(w_n^{2(1+\delta)}) \leq K_6 < \infty \quad (2.22)$$

$$A4 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^{3/2} v_n = 0 \quad (2.23)$$

$$A5 \quad a_n = A/n \quad (2.24)$$

$$A > \left(\frac{1}{2} - K_4 \right) / K_3 \quad (2.25)$$

このとき $\sqrt{n}(\hat{x}_n - x_n)$ の $n \rightarrow \infty$ での漸近分布は期待値 0, 分散 $A^2 \sigma^2 / \{2(AK_3 + K_4) - 1\}$ の正規分布である.

(注意) 条件 A1 は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{d}{dy} f_{n+1}(y) \right]_{y=g_n(\hat{x}_n)} \left[\frac{d}{dx} g_n(x) \right]_{x=x_n} = K_3$$

と書けるが A0, A2 から $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n'(x)| < \infty$ であれば成立し, これは, 条件 C1 を満す一般の準線形, 飽和形の観測系に対して成立する. また条件 A2 は x_n が時間の累関数 $x_n = p n^q$ や, $g_n(x) = \sin x$ などのように $|g_n(x) - g_n(y)| = |x - y| + O(|x - y|^3)$ となる関数について成立する. しかもこの関係は $n \rightarrow \infty$ の極限のみで成立すればよいから条件としてはさらにゆるいことになる. A3, A4 は観測雑音と未知確定外乱の性質にやや制限を加えたもので, A3, A4 が成立するとき, C3, C4 は自動的に満される.

(証明) (2.1), (2.2), (2.3) 式より

$$\begin{aligned} \hat{x}_{n+1} - x_{n+1} &= g_n(\hat{x}_n) - g_n(x_n) - v_n + a_n w_{n+1} \\ &\quad + a_n \{f_{n+1}(g_n(\hat{x}_n) + v_n) \\ &\quad - f_{n+1}(g_n(x_n))\} \end{aligned}$$

いま $\xi_n = \hat{x}_n - x_n$ において, 平均値定理を用いて

$$g_n(\hat{x}_n) = g_n(x_n) + g_n'(x_n + \theta_{1n} \xi_n) \xi_n$$

$$\begin{aligned} f_{n+1}(g_n(x_n) + v_n) &= f_{n+1}(g_n(x_n)) \\ &\quad + f_{n+1}'(g_n(x_n) + \theta_{2n} v_n) v_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{n+1}(g_n(\hat{x}_n)) &= f_{n+1}(g_n(x_n)) + f_{n+1}'((1 - \theta_{3n}) g_n(x_n) \\ &\quad + \theta_{3n} g_n(\hat{x}_n)) (g_n(\hat{x}_n) - g_n(x_n)) \end{aligned}$$

ただし, $\theta_{1n}, \theta_{2n}, \theta_{3n}$ は 0 と 1 の間の数, より

$$\begin{aligned}\xi_{n+1} = & (1 - a_n f_{n+1}'(\theta_{3n} g_n(\hat{x}_n)) \\ & + (1 - \theta_{3n}) g_n(x_n)) g_n'(x_n + \theta_{1n} \xi_n) \xi_n \\ & + a_n w_{n+1} - (1 - a_n f_{n+1}'(g_n(x_n) + \theta_{2n} v_n)) v_n\end{aligned}$$

ここで《定理 1》より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0 \quad \text{a. s.}$$

ゆえ、 $f_{n+1}'(x), g_n'(x)$ の連続性を用いて

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} |f_{n+1}'(\theta_{3n} g_n(\hat{x}_n) + (1 - \theta_{3n}) g_n(x_n)) \\ - f_{n+1}'(g_n(x_n))| = 0 \quad \text{a. s.}\end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |g_n'(x_n + \theta_{1n} \xi_n) - g_n'(x_n)| = 0 \quad \text{a. s.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_{n+1}'(g_n(x_n) + \theta_{2n} v_n) - f_{n+1}'(g_n(x_n))| = 0 \quad \text{a. s.}$$

が成立し、よって条件 A1, A2, A4, A5 より

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} n \{1 - (1 - a_n f_{n+1}'(\theta_{3n} g_n(\hat{x}_n) \\ + (1 - \theta_{3n}) g_n(x_n)) g_n'(x_n + \theta_{1n} \xi_n)\} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} n \{1 - g_n'(x_n) + a_n f_{n+1}'(g_n(x_n)) g_n'(x_n)\} \\ = AK_3 + K_4\end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{3/2} \{1 - a_n f_{n+1}'(g_n(x_n) + \theta_{2n} v_n)\} v_n = 0$$

一方、 r を任意の正数、 $\chi(x)$ を定義関数 (indicator) (x が真のとき $\chi(x)=1$, 偽のとき $\chi(x)=0$ となる関数⁷⁾) として、

$$\sigma_{j,r}^2 = E \{ \chi(w_j^2 \geq rj) w_j^2 \}$$

と定義すると、Hölder の不等式を用いて

$$\sigma_{j,r}^2 \leq \{ \Pr\{w_j^2 \geq rj\} \}^{\delta/(1+\delta)} \{ E(w_j^{2(1+\delta)}) \}^{1/(1+\delta)}$$

が成立する。ここに δ は条件 A3 に現われるものである。さらに Marcov の不等式を用いて

$$\begin{aligned}\Pr\{w_j^2 \geq rj\} &= \Pr\{|w_j| \geq (rj)^{1/2}\} \\ &\leq (rj)^{-(1+\delta)} E(w_j^{2(1+\delta)})\end{aligned}$$

ゆえに、条件 A3 を用いて

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{j=1}^n \sigma_{j,r}^2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} r^{-\delta} K_5 \sum_{j=1}^n j^{-\delta} = 0$$

したがって Fabian の定理 (付録 1) において、 $\alpha=1$, $\beta=1$, $\Phi=A$, $I'=AK_3+K_4$, $T=0$, $\Sigma=\sigma^2$ とした場合の条件がすべて満されることになり、 $n^{1/2}\xi_n$ すなわち $\sqrt{n}(\hat{x}_n - x_n)$ の漸近分布は、正規分布となり、期待値 0, 分散 $A^2\sigma^2/\{2(AK_3+K_4)-1\}$ で与えられる。(証明終)

この定理を用いると、推定過程 (2.3) の漸近効率はつぎのように求められる。

$$\begin{aligned}\eta &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{Var}(\hat{x}_n) I_n^2(x_n)} \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{(2(AK_3+K_4)-1) \times n}{A^2\sigma^2 I^2(p) \left(\sum_{i=1}^n \frac{df_i(x_i)}{dx_n} \right)^2} \\ &= \frac{2(AK_3+K_4)-1}{A^2\sigma^2 I^2(p) C}\end{aligned} \quad (2.26)$$

ただし

$$C = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n (df_i(x)/dx_n)^2 \right) \quad (2.27)$$

$$I^2(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{p'(w)}{p(w)} \right)^2 p(w) dw \quad (2.28)$$

ここで、観測雑音 w_n が同一確率密度関数 $p(w)$ に従うことから

$$\begin{aligned}I_n^2(x_n) &= E \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \sum_{i=1}^n \log p_i(y_i - f_i(x_i)) \right)^2 \\ &= E \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{df_i(x_i)}{dx_n} \right) \left(-\frac{d}{dw} \log p_i(w) \right) \right)^2 \\ &= E \left(-\frac{d}{dw} \log p(w) \right)^2 \left(\sum_{i=1}^n \frac{df_i(x_i)}{dx_n} \right)^2 \\ &= I^2(p) \sum_{i=1}^n E(df_i(x_i)/dx_n)^2\end{aligned} \quad (2.29)$$

の関係を用いた。ここで $x_i (i=1, \dots, n-1)$ は (2.1) 式を逆に用いて x_n と確定的に関係づけられるから $\frac{df(x_i)}{dx_n}$ は必ずしも 0 でない。

漸近効率を最大にするゲインは

$$A_{\max} = (1 - 2K_4)/K_3 \quad (2.30)$$

としたものであり、このとき、漸近効率は

$$\eta_{\max} = \frac{K_3^2}{(1 - 2K_4)\sigma^2 I^2(p) C} \quad (2.31)$$

となる。一般に

$$\sigma^2 \geq \frac{1}{I^2(p)} \quad (2.32)$$

である⁵⁾ (等号は w の分布が正規分布のときのみ) から

$$\eta_{\max} \leq \frac{K_3^2}{(1 - 2K_4)C} \equiv \eta_{\text{opt}}^* \quad (2.33)$$

である。次節では、この上限を達成するための手法について考察してみよう。

3. 観測値の変換による漸近効率向上

漸近効率を向上させるために、本節では、推定値の外挿値と、対応する観測値との差 $(y_{n+1} - f_{n+1}(g_n(\hat{x}_n)))$ をそのまま用いるのではなく、ある変換をほどこしてアルゴリズムに導入することを考える。すなわち推定過程として (2.3) 式の代わりにつぎの形のものを用いる。

$$\hat{x}_{n+1} = g_n(\hat{x}_n) + a_n h(y_{n+1} - f_{n+1}(g_n(\hat{x}_n))) \quad (3.1)$$

$$\hat{x}_1: (\text{ただし } E(\hat{x}_1^2) < \infty)$$

ここに $h(x)$ は適当な変換関数である。

いま

$$\begin{aligned}h_n^*(x, y) &= E(h(f_n(x) - f_n(y) + w_n)) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(f_n(x) - f_n(y) + w) p(w) dw\end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned}
 w_n^*(x, y) &= h(f_n(x) - f_n(y) + w_n) \\
 &\quad - E(h(f_n(x) - f_n(y) + w_n)) \\
 &= h(f_n(x) - f_n(y) + w_n) - h_n^*(x, y)
 \end{aligned} \quad (3.3)$$

とおく. このとき, 以下の条件を仮定する.

C1* すべての x, y について, 正数 K_1^*, K_2^* が存在して

$$|h_n^*(x, y)| \leq K_1^* |x - y| + K_2^* \quad (3.4)$$

$$(x - y)h_n^*(x, y) > 0 \quad (3.5)$$

C3* $\{w_n^*(x, y)\}$ について

$$E(w_n^*(x, y)w_m^*(x, y)) = \sigma_n^{*2}(x, y)\delta_{mn} < \infty \quad (3.6)$$

(この条件は変換後の確率成分の独立性と分散の有限性を仮定するものであるが, 通常, 変換前の確率成分 w_n, w_n に対する同様の仮定 C3 のもとで成立する.)

また

$$\lim_{x \rightarrow y} \sigma_n^{*2}(x, y) = \sigma^{*2} < \infty \quad (3.7)$$

さらに変換関数に対して以下の正則条件を仮定する.

(次節の例の関数については成立する)

$$\begin{aligned}
 A1^* \quad & \left[\frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} h(w)p(w+x)dw \right]_{x=0} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} h(w)p'(w)dw < 0
 \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} h(w)p'(w+x)dw \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} h(w)p'(w)dw
 \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} h(w)p(w+x)dw \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} h(w)p(w)dw \\
 &= E(h(w)) = 0
 \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$A3^* \quad E(w_n^{*2(1+\delta^*)}(x, y)) \leq K_5^* \quad (3.11)$$

なる正数 δ^* と K_5^* が存在する.

$$A5^* \quad a_n = A/n$$

$$A > \left(K_4 - \frac{1}{2} \right) / \left\{ K_3 \int_{-\infty}^{\infty} h(w)p'(w)dw \right\} \quad (3.12)$$

このとき, 《定理 1》に対応して, 推定過程 (3.1) によっても, 確率 1 および 2 乗平均の意味で, 真の状態の推定が可能である. すなわち (2.12), (2.13) 式が成立する. さらにつぎの定理が示される.

《定理 3》 条件 C1*, C2, C3*, C4, C5, A0, A1, A1*, A2, A3*, A4, A5* のもとで, (3.1) 式に基づく推定値系列について, $\sqrt{n}(\hat{x}_n - x_n)$ は, 期待値 0,

$$\text{分散 } A^2 \sigma^{*2} / \left\{ -2AK_3 \int_{-\infty}^{\infty} h(w)p'(w)dw + 2K_4 - 1 \right\}$$

の正規分布に漸近的に従う.

(証明) (2.1), (2.2), (3.1), (3.2), (3.3) 式より

$$\begin{aligned}
 \xi_{n+1} &= g_n(x_n + \xi_n) - g_n(x_n) + a_n h_{n+1}^*(g_n(x_n) \\
 &\quad + v_n, g_n(x_n + \xi_n)) - v_n + a_n w_{n+1}^*(g_n(x_n) \\
 &\quad + v_n, g_n(x_n + \xi_n))
 \end{aligned}$$

さて平均値定理を用いると, θ_n を 0, 1 の間のある値として,

$$\begin{aligned}
 & h_{n+1}^*(g_n(x_n) + v_n, g_n(x_n + \xi_n)) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} h(w)p(w - f_{n+1}(g_n(x_n) + v_n) \\
 &\quad + f_{n+1}(g_n(x_n + \xi_n)))dw = \int_{-\infty}^{\infty} h(w)p'(w)dw \\
 &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} h(w)p'(w + \theta_n(f_{n+1}(g_n(x_n + \xi_n)) \\
 &\quad - f_{n+1}(g_n(x_n) + v_n)))(f_{n+1}(g_n(x_n + \xi_n)) \\
 &\quad - f_{n+1}(g_n(x_n) + v_n))dw
 \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
 \xi_{n+1} &= (1 + a_n f_{n+1}'(\theta_{3n} g_n(x_n + \xi_n) + (1 - \theta_{3n}) g_n(x_n))) \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} h(w)p'(w + \theta_n(f_{n+1}(g_n(x_n + \xi_n)) \\
 &\quad - f_{n+1}(g_n(x_n) + v_n)))dw)g_n'(x_n + \theta_{1n}\xi_n)\xi_n \\
 &\quad + a_n w_{n+1}^*(g_n(x_n) + v_n, g_n(x_n + \xi_n)) \\
 &\quad - (1 - a_n f_{n+1}'(g_n(x_n) + \theta_{2n}v_n)) \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} h(w)p'(w + \theta_n(f_{n+1}(g_n(x_n + \xi_n)) \\
 &\quad - f_{n+1}(g_n(x_n) + v_n)))dw)v_n
 \end{aligned}$$

ただし $\theta_{1n}, \theta_{2n}, \theta_{3n}$ は《定理 2》証明と同様, ここで

A0, A1*, A1, A2, A4, A5 から

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ 1 - (1 + a_n f_{n+1}'(\theta_{3n} g_n(x_n + \xi_n) \right. \\
 &\quad + (1 - \theta_{3n}) g_n(x_n))) \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} h(w)p'(w + \theta_n(f_{n+1}(g_n(x_n + \xi_n)) \\
 &\quad - f_{n+1}(g_n(x_n) + v_n)))dw)g_n'(x_n + \theta_{1n}\xi_n) \Big\} \\
 &= -AK_3 \int_{-\infty}^{\infty} h(w)p'(w)dw + K_4 \quad \text{a. s.} \\
 & \lim_{n \rightarrow \infty} n^{3/2} \left\{ 1 - a_n f_{n+1}'(g_n(x_n) + \theta_{2n}v_n) \right. \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} h(w)p'(w + \theta_n(f_{n+1}(g_n(x_n + \xi_n)) \\
 &\quad - f_{n+1}(g_n(x_n) + v_n)))dw \Big\} v_n = 0 \quad \text{a. s.}
 \end{aligned}$$

また

$$\sigma_{j,r}^{*2} = E\{\chi(w_j^{*2} \geq 2r_j)w_j^{*2}\}$$

として,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{j=1}^n \sigma_{j,r}^{*2} = 0$$

が《定理 2》証明を同様に成立するから、Fabian の定理を応用して、結果を得る。(証明終)

この結果、推定過程 (3.1) の漸近効率は

$$\eta^* = \frac{-2AK_3 \int_{-\infty}^{\infty} h(w)p'(w)dw + 2K_4 - 1}{A^2\sigma^{*2}I^2(p)C} \quad (3.13)$$

で与えられる。ここで、 $I^2(p)$, C は (2.27), (2.28) 式で与えられるものである。(3.13) 式を最大にするゲインは

$$A_{\max} = (1 - 2K_4) / \left\{ -K_3 \int_{-\infty}^{\infty} h(w)p'(w)dw \right\} \quad (3.14)$$

としたものであり、このとき

$$\eta_{\max}^* = \frac{K_3^2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(w)p'(w)dw \right)^2}{(1 - 2K_4)\sigma^{*2}I^2(p)C} \quad (3.15)$$

となる。さて

$$\begin{aligned} \sigma^{*2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n^{*2}(x, y) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} E((w_{n+1}^*(g_n(x_n) + v_n, g_n(x_n + \xi_n)))^2) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \{h(w + f_{n+1}(g_n(x_n) + v_n) - f_{n+1}(g_n(x_n + \xi_n)))\}^2 p(w)dw \right. \\ &\quad \left. - \{h_{n+1}^*(g_n(x_n) + v_n, g_n(x_n + \xi_n))\}^2 \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h^2(w)p(w)dw \end{aligned} \quad (3.16)$$

ここで

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} h_{n+1}^*(g_n(x_n) + v_n, g_n(x_n + \xi_n)) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(w)p(w)dw = 0 \end{aligned}$$

を用いた。また Schwartz の不等式によって

$$\begin{aligned} &\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h(w)p'(w)dw \right\}^2 \\ &\leq \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h^2(w)p(w)dw \right\} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{p'(w)}{p(w)} \right)^2 p(w)dw \right\} \\ &= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h^2(w)p(w)dw \right\} I^2(p) \end{aligned} \quad (3.17)$$

ここで等号は、 D をある定数として

$$h_{\text{opt}}(w) = Dp'(w)/p(w) \quad (3.18)$$

のとき、成立する。したがって、(3.15) 式の $\eta_{\max}^*$ は

$$\eta_{\max}^* \leq K_3^2 / \{(1 - 2K_4)C\} \equiv \eta_{\text{opt}}^* \quad (3.19)$$

であり、 $\eta_{\max}^* = \eta_{\text{opt}}^*$ は h として (3.18) 式を満たすものをとったとき達成される。(3.18) 式が満たされるとき、(3.14) 式は

$$A_{\text{opt}} = -(1 - 2K_4) / \{K_3 D I^2(p)\} \quad (3.20)$$

となる。 $A_{\text{opt}} > 0$ であるために $D < 0$ でなければな

らない。しかし (3.18), (3.20) 式を具体的に (3.1) 式に代入して得られる推定過程が

$$\hat{x}_{n+1} = g(\hat{x}_n) - \frac{1 - 2K_4}{nK_3 I^2(p)} \times \frac{p'(y_{n+1} - f_{n+1}(g_n(\hat{x}_n)))}{p(y_{n+1} - f_{n+1}(g_n(\hat{x}_n)))} \quad (3.21)$$

となることから、 D の値は一意に定める必要はない。

なお (3.18) 式の h を用いるとき、条件 A1* の

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(w)p(w)dw = 0$$

$$\begin{aligned} \text{なぜなら} \quad \int_{-\infty}^{\infty} h(w)p(w)dw &= D \int_{-\infty}^{\infty} p'(w)dw \\ &= D \left[p(w) \right]_{-\infty}^{\infty} \end{aligned}$$

ところが、 $p(w)$ は確率密度関数であるから

$$\lim_{w \rightarrow +\infty} p(w) = \lim_{w \rightarrow -\infty} p(w) = 0$$

でなければならず、よって上式の右辺は 0 となる。

以上の結果をまとめて、つぎの定理を得る。

《定理 4》

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{p'(w)}{p(w)} \right)^2 p(w)dw < \infty \quad (3.22)$$

なる連続分布 $p(w)$ に観測雑音 w が従っているとき、

《定理 3》と同じ条件のもとで、推定過程を (3.21) 式のように構成すれば、漸近効率は η_{opt}^* ((3.19) 式右辺) まで高めることができる。この η_{opt}^* は、明らかにもとの推定過程 (2.3) 式による漸近効率 $\eta_{\max}$ より大きい。

4. 例

4.1 変換例

本節においては、いくつかの分布について、最適変換

$$A_{\text{opt}} h_{\text{opt}}(w) = -\frac{1 - 2K_4}{nK_3 I^2(p)} \times \frac{p'(w)}{p(w)}$$

と、漸近効率の改善率を変換前の漸近効率と変換後の漸近効率の比として、

$$r = \eta_{\text{opt}}^* / \eta_{\max} = \text{Var}(w) I^2(p)$$

の値を具体的に求めた。その結果を Table 1 に示す。

ただし、最適変換のうち、共通因子 $(1 - 2K_4)/(nK_3)$ については省略してある。正規分布に対しては、最適な変換は、常に、差をそのまま用いればよいというものであり、両側指数分布については、差の符号のみが意味をもつという結果になっている。Cauchy 分布、自由度 $n \leq 2$ の場合の t 分布では改善率が ∞ となっているが、これはこれらの分布では変換を施さなければ条件 C3 が満たされない (分散が存在しない) ために推定が不可能であったのが変換を行なうことによ

Table 1 Optimal transformation and improvement factor of the asymptotic efficiency

distribution	probability density function $p(w)$	optimal transformation	improvement factor r
normal	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{w^2}{2}\right)$	x	1
Cauchy	$\frac{q}{\pi(w^2+q^2)}$	$\frac{4q^2x}{(x^2+q^2)}$	∞
double-exponential	$\frac{q}{2} \exp(-q w)$	$\frac{1}{q} \text{Sgn}(x)$	2
logistic	$\frac{q \exp(-qw)}{(1+\exp(-qw))^2}$	$\frac{3}{q} \tanh\left(\frac{q}{2}\right)$	$\frac{\pi^2}{9}$
t -distribution	$\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{n\pi}\Gamma(n/2)} \left(1+\frac{w^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}$	$\frac{(n+3)x}{n+x^2}$	∞ ($n \leq 2$) $\frac{n(n+1)}{(n+3)(n-2)}$ ($n > 2$)

$$s_n^2 = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} \left\{ (x - \hat{x}_n)_i \right. \\ \left. - \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} (x - \hat{x}_n)_i \right\}^2 \\ (s_n^T)^2 \\ = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} \left\{ x - \hat{x}_n^T \right\}_i \\ \left. - \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} (x - \hat{x}_n^T)_i \right\}^2$$

で計算された、推定誤差の標準偏差の推定値である。

変換を施さない推定値系列 $\{\hat{x}_n\}$ は収束は比較的速いがバラツキが非常に大きく変換を行なった系列 $\{x_n^T\}$ は、き

て可能となることを示している。

また Cauchy 分布、自由度の小さい t 分布の場合差が大きくなれば、差の情報を割引して用いた方がよいのはこのことに関連して、分布のすその情報が、分散の存在を妨害して推定を不可能としているのを防ぐ意味と考えられる。

4.2 数値実験

(実験 1)

システム動特性を

$$x_{n+1} = g_n(x_n) = \pi \sin(x_n / \pi) \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$x_1 = 1.0$$

観測機構を

$$y_n = f_n(x_n) + w_n = \begin{cases} 9.0 & x \geq 3 \\ 3x & -3 < x < 3 \\ -9.0 & x \leq -3 \end{cases} + w_n$$

とし、 w_n は分散 8 の両側指数分布 (密度関数 $p(w) = \frac{1}{4} \exp\left(-\frac{1}{2}|w|\right)$) に従うとした。このとき、推定過程 $\{\hat{x}_n\}$ と $\{x_n^T\}$ をつぎのように構成する。

$$\hat{x}_{n+1} = g_n(\hat{x}_n) + \frac{1}{6}(y_{n+1} - f_n(g_n(\hat{x}_n))) \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$\hat{x}_{n+1}^T = g_n(\hat{x}_n^T) + \frac{1}{6}h(y_{n+1} - f_n(g_n(\hat{x}_n^T)))$$

$$\hat{x} = \hat{x}_1^T = 0.0$$

ただし

$$h(x) = \frac{1}{2} \text{Sgn}(x).$$

20 回のデジタルシミュレーションを行ない、偏差の平均値 $(x_n - \hat{x}_n)$, $(x_n - \hat{x}_n^T)$ および、信頼区間をつけた値 $(x_n - \hat{x}_n) + s_n$, $(x_n - \hat{x}_n^T) + s_n^T$ を Fig. 1 に示した(注 1)。ここに s_n , s_n^T はそれぞれ

わめて安定した収束性を示していることが知られる。

(実験 2)

システムは

$$x_n = \sqrt[3]{n} \quad (n=1, 2, \dots)$$

で変化するが、推定する側には

$$x_{n+1} = g_n(x_n) + v_n = \left(1 + \frac{1}{3n}\right)x_n + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

の $g_n(x)$ のみ既知とする。観測系は

$$y_n = f_n(x_n) + w_n$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{3}(x - \log(x+1.0)) + w_n & x \geq 0 \\ \frac{1}{3}(-x - \log(-x+1.0)) + w_n & x < 0 \end{cases}$$

で、観測雑音 w_n は Cauchy 分布 (密度関数 $p(w) = \frac{1}{\pi} \frac{2}{4+w^2}$) に従うとする。推定系列は

$$\hat{x}_{n+1} = g_n(\hat{x}_n) + \frac{1}{6}(x_{n+1} - f_n(g_n(\hat{x}_n))) \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$\hat{x}_{n+1}^T = g(\hat{x}_n^T) + \frac{1}{6}h(y_{n+1} - f_n(g_n(\hat{x}_n^T)))$$

$$\hat{x}_1 = \hat{x}_1^T = 0.0$$

ただし $h(x) = 16x/(x^2+4)$

20 回のデジタルシミュレーションの結果を Fig. 2 に示す。記号は (実験 1) と同様である。変換を施さない場合、バラツキも大きく、 $n=1000$ でも収束するかどうかの判断が下せないのに反し、変換を施した場合には、きわめて安定した収束性を示しているのがわかる。

その他の変換関数についても、実験を行なった結果同様の傾向がみられた。以上の数値実験の結果から、付加した仮定の妥当なこと、および変換を行なうことの意義が明らかになった。

(注 1) 図中、●は負の値、○は正の値を示している。

Fig. 1 Result of experiment 1

5. 結 言

本論文では、簡単なアルゴリズムで、広い範囲の非線形系に対して適用可能であり、理論的にも収束が保証される確率近似法に基礎をおく非線形フィルタに対し、漸近効果の概念を導入して、性能評価を行なうことを考え、漸近効率を高めるには、観測雑音の密度関数に依存したある変換を行なえばよいことを示した。このとき、確率近似フィルタにおいて常に問題となるゲインもあわせて決定し、いくつかの分布に対し、具体的に最適変換を求め、数値実験によって有効性を調べた。

今後、前もって観測雑音の分布がわからない場合に対する最適変換の構成法について考察を行なう予定である。

参 考 文 献

- 1) 魚崎, 杉山: 確率近似法を用いた非線形系の状態推定に関する一考察, システムと制御, **15-5**, 428/437 (1971)
- 2) S. Fujita and T. Fukao: Convergence conditions of dynamic stochastic approximation method for nonlinear stochastic discrete-time dynamic system, IEEE Trans. **AC-17**, 715/717 (1972)
- 3) 吉岡, 阿部, 竹田: 確率近似法を応用した非線形推定アルゴリズム, 計測自動制御学会論文集, **9-2**, 178/185 (1973)
- 4) A.E. Albert and L.A. Gardner: Stochastic approximation and nonlinear regression, MIT Press (1967)

Fig. 2 Result of experiment 2

- 5) H.J. Larson: Introduction to the theory of statistics, John Wiley & Sons (1973)
- 6) V. Fabian: On asymptotic normality in stochastic approximation, Ann. Math. Statist., **39**, 1327/1332 (1968)
- 7) W. Feller: An introduction to the probability theory and its applications, **2**, John-Wiley & Sons (1966)

《 付 録 》

1 (Fabian の定理)⁶⁾

U_n, V_n, T_n を確率系列, Γ_n, Φ_n を確定系列とする。 $T, \Sigma, \Gamma, \Phi, C, \alpha, \beta$ を定数として、つぎの条件が満たされている。

$$\Gamma_n \rightarrow \Gamma > 0, \Phi_n \rightarrow \Phi, T_n \rightarrow T \text{ a.s. } (n \rightarrow \infty) \text{ または}$$

$$E|T_n - T| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$E(V_n) = 0, C > |E(V_n^2) - \Sigma| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

いま $\sigma_{j,r}^2 = E\{\chi(V_j \geq r^j \alpha) \cdot V_j^2\}$ として

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sigma_{j,r}^2 = 0 \text{ または } \alpha = 1 \text{ で}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{j=1}^n \sigma_{j,r}^2 = 0$$

が成立する。

$\alpha = 1$ のとき $\beta_+ = \beta, \alpha \neq 1$ のとき $\beta_+ = 0$ として $0 < \alpha \leq 1, 0 \leq \beta, \beta < 2\Gamma$ であり

$$U_{n+1} = (1 - n^{-\alpha} \Gamma_n) U_n + n^{-(\alpha+\beta)/2} \Phi_n V_n \\ + n^{-\alpha-(\beta/2)} T_n$$

であるなら $n^{\beta/2} U_n$ の漸近分布は、正規分布で、期待値 $(\Gamma - (\beta+2)/2)T$ 、分散 $\Phi^2 \Sigma(2\Gamma - \beta+1)^{-1}$ である。

2 4.1 の例における関数について 3. の条件 C3* の成立することを示そう。

$w_n^*(x, y)$ の定義 (3.3) 式から $w_n^*(x, y)$ が x, y と w_n の関数であることがわかる。すなわち

$$w_n^*(x, y) = F_n(x, y, w_n)$$

であり、かつ

$$E(w_n^*(x, y)) = \int_{-\infty}^{\infty} F_n(x, y, w_n) p(w_n) dw_n = 0$$

である。 $w_n^*(x, y)$ についても同様の関係が成立するから

$$E(w_n^*(x, y) w_m^*(x, y)) \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_n(x, y, w_n) F_m(x, y, w_m) p(w_n w_m) \\ \times dw_n dw_m$$

であり、 w_n と w_m の独立性を用いると $p(w_n, w_m) = p(w_n) p(w_m)$ ($m \neq n$) で

$$E(w_n^*(x, y) w_m^*(x, y)) \\ = \int_{-\infty}^{\infty} F_n(x, y, w_n) p(w_n) dw_n \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} F_m(x, y, w_m) p(w_m) dw_m = 0$$

が成立する。つぎに分散の有限性を示す。

正規分布については

$$w_n^*(x, y) = w_n$$

となつて、分散の有限性は自明である。

両側指数分布の場合、 $t = f_n(x) - f_n(y)$ として

$$h_n^*(x, y) = E(h(f_n(x) - f_n(y) + w_n)) \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{q} \text{Sgn}(t+w) \\ \times \frac{q}{2} \exp(-q|w|) dw \\ = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \text{Sgn}(t+w) \exp(-qw) dw$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \text{Sgn}(t+w) \exp(qw) dw$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{q} \{\exp(qt) - 1\} & t < 0 \\ \frac{1}{q} \{1 - \exp(-qt)\} & t \geq 0 \end{cases} \\ = \frac{1}{q} \{1 - \exp(-q|t|)\} \text{Sgn}(t)$$

ゆえに

$$w_n^*(x, y) = \frac{1}{q} \{\text{Sgn}(f_n(x) - f_n(y) + w_n) \\ - (1 - \exp(-q|f_n(x) - f_n(y)|)) \\ \times \text{Sgn}(f_n(x) - f_n(y))\}$$

明らかに

$$E(w_n^*(x, y))^2 = E\{(h(f_n(x) - f_n(y) + w_n))^2 \\ - \{E(h(f_n(x) - f_n(y) + w_n))\}^2\} \\ = E\{(h(f_n(x) - f_n(y) + w_n))^2 \\ - (h_n^*(x, y))^2\}$$

さて

$$E\{(h(f_n(x) - f_n(y) + w_n))^2\} \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{q} \text{Sgn}(f_n(x) - f_n(y) + w) \right)^2 \\ \times \frac{q}{2} \exp(-q|w|) dw \\ = \frac{1}{q^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q}{2} \exp(-q|w|) dw = \frac{1}{q^2}$$

したがって

$$E(w_n^*(x, y))^2 \\ = \frac{1}{q^2} - \frac{1}{q^2} (1 - \exp(-q|f_n(x) - f_n(y)|))^2$$

となり、これは $-\infty < f_n(x) - f_n(y) < \infty$ について有限である。また

$$\lim_{x \rightarrow y} \sigma_n^{*2}(x, y) = \lim_{x \rightarrow y} E(w_n^*(x, y))^2 = \frac{1}{q^2} < \infty$$

も示せる。ほかの Cauchy 分布、logistic 分布、 t 分布についても、計算はきわめて複雑であるが、同様の方針で C3* の成立することが示せる。