閾値論理学習機械のノンパラメータ形訓練法を用いた非線形システムの同定

雛 元 孝 夫*・前 川 禎 男*

Identification of Nonlinear Systems Using Nonparametric Training Method for Threshold Logic Learning Machine

Takao HINAMOTO* and Sadao MAEKAWA*

This paper describes a method for identification of nonlinear systems characterized by the cascade connection of a linear element and a zero-memory nonlinear element. The dynamics of the linear element is represented by the weighting coefficients derived from the impulse response and the characteristics of the zero-memory nonlinear element is approximated by the polynomial equation.

The identification method proposed in this paper is a kind of sequential approximation method and the procedure of the estimation takes the following two steps. As the first step, the approximate solutions of the parameters of linear element are obtained by the nonparametric training procedure of the threshold logic learning machines, and then the approximate solutions of the parameters of zero-memory nonlinear element are obtained by the gradient method. As the second step, the accuracy of the approximate solutions derived in the first step is improved by the modified gradient method.

In this paper, the authors explain the algorithm of this method and discuss the convergence problems of the estimated parameters and show some results of the digital simulation which support the described theory.

1. 緒 言

非線形システムの動特性を測定する方法として種々のものが研究されてきているが¹⁾、そのうち対象のシステムがゼロメモリ非線形要素と線形要素とに分離可能で、かつその接続関係が既知であるとする立場がある。このうち、ゼロメモリ非線形要素の後に線形要素が接続された構成のシステムに対するいくつかの同定

法が提案されている^{2)~7)}。一方線形要素の後にゼロメモリ非線形要素が接続された構成のシステムについては、ボルテラ核を推定する方法⁸⁾などの例があるが、各要素のパラメータを直接推定する報告はみかけない。このボルテラ核を推定する方法では通常の場合推定すべきパラメータ総数が膨大になるという難点があり、もし両要素のパラメータを直接推定できれば、少ないパラメータ数で能率的に入出力関係を規定できる。

本稿では線形要素の後にゼロメモリ非線形要素が接続された構成の非線形システムの同定問題を取上げており、各要素のパラメータを直接推定する方法をとっている。非線形としては1, 3象限に特性をもつ連続関数を対象としており、実際問題としてもこの種の非線形特性はみかけられる。このシステムの線形要素の表現にはインパルス応答から導かれた荷重系列を用い、またゼロメモリ非線形要素の表現には多項式を用いて定式化を行なっている。この方程式はパラメータに関する非線形関数で与えられるため、逐次近似法を用いたとき真のパラメータの近傍への解の収束は一般に保障されない。そのためパラメータの推定は二つの段階的手順によって行なわれる。すなわち、第1段階では閾値論理学習機械のノンパラメータ形訓練法⁹⁾を応用してパラメータの近似解を求め、第2段階では方程式を近似解のまわりでは線形関数とみなし、勾配法を変形したアルゴリズムを用いて逐次近似を行ない解の精度を向上させている。本方法では特定の試験用信号を加えることなく操業信号を用いて動特性の測定が可能であり、準定常システムの同定に対してもある程度の追従性が期待できよう。

2. 非線形システムの定式化

同定の対象とする非線形システムが Fig. 1 で示される。このシステムは安定でかつ定常であるとし、こうした構造については事前の情報から既知とする。

* 神戸大学工学部・神戸市灘区六甲台町1

* Faculty of Engineering, Kobe University, Kobe
(Received April 8, 1974)

Fig. 1 Systems discussed in this paper

Fig. 1 において x_j および y_j はシステムの入出力信号で第 j ステップでの標本値を表わすものとする。また、 u_j は両要素を結ぶ信号の標本値、 v_j は雑音の標本値をそれぞれ表し、これらは観測不可能な量とする。

いま、線形要素のインパルス応答より導かれた荷重系列ベクトルをつぎのように定義する。

$$\mathbf{H} \triangleq (h_1, h_2, \dots, h_n)^T \quad (1)$$

また、第 j ステップでの入力系列ベクトルを

$$\mathbf{X}_j \triangleq (x_{j-1}, x_{j-2}, \dots, x_{j-n})^T \quad (2)$$

と定義すれば、第 j ステップの線形要素の出力 u_j は

$$u_j = (\mathbf{H}, \mathbf{X}_j) \quad (3)$$

とかける。つぎにゼロメモリ非線形要素の特性が信号 u_j の変域内で連続とすれば、この特性 f は近似的に

$$f(u_j) \simeq \sum_{l=1}^m a_l u_j^l \quad (4)$$

と表わせる。ここで m は十分大きい正の整数とし、 f は $u_j f(u_j) \geq 0$ (等号は $u_j = 0$ のとき) なる特性をもつ非線形関数とする。このときシステムの出力 y_j は

$$\begin{aligned} y_j &= f(u_j) + v_j \\ &\simeq \sum_{l=1}^m a_l (\mathbf{H}, \mathbf{X}_j)^l + v_j \end{aligned} \quad (5)$$

となる。ところで、(5) 式においては x_j および y_j の観測のみからは各要素のパラメータ h_i ($i=1, 2, \dots, n$) および a_l ($l=1, 2, \dots, m$) を一意的に決定できない。そのため

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &\triangleq (a_1 h_1, a_1 h_2, \dots, a_1 h_n)^T \\ &= (g_1, g_2, \dots, g_n)^T \end{aligned} \quad (6)$$

Fig. 2 Outline of the identification procedure

Fig. 3 Threshold logic learning machine

$$p_l \triangleq a_l / a_1^l \quad (l=1, 2, \dots, m) \quad (7)$$

と定義すれば、(5) 式は

$$y_j \simeq (\mathbf{G}, \mathbf{X}_j) + p_2 (\mathbf{G}, \mathbf{X}_j)^2 + \dots + p_m (\mathbf{G}, \mathbf{X}_j)^m + v_j \quad (8)$$

と書き換えられる。こうした (6) 式および (7) 式のパラメータ変換操作によって、 $(n+m)$ 個の未知パラメータで表わされる入出力方程式 (5) は $(n+m-1)$ 個の未知パラメータを含む入出力方程式 (8) に書き改められる。これによって (8) 式に含まれる未知パラメータ g_i ($i=1, 2, \dots, n$) および p_l ($l=2, 3, \dots, m$) は入出力データ x_j および y_j の観測から決定が可能となり、これらが決まれば非線形システムの入出力関係は一意的に規定される。(8) 式の表現を特に「入出力方程式の標準形」と呼ぶことにし、同定の過程ではパラメータ g_i および p_l を求めることにする。

3. パラメータ逐次近似法

システムの方程式 (8) は非線形関数であるため、逐次近似法を用いたとき真のパラメータの近傍への解の収束は一般には保障されない。(8) 式の非線形関数を線形関数に変換する方法¹²⁾も考えられるがパラメータ数が膨大になるという難点がある。この場合入力として正規性白色雑音¹⁰⁾または二値信号¹¹⁾を加える方法もあるが入力に制約を与えるのは好ましくない。

これらの理由からここでは同定の過程を 2 段階に分けて、第 1 段階でパラメータの近似解を求め、第 2 段階で近似の精度を上げるという手順をとる。Fig. 2 では同定の過程の時間的推移が略記されており、 j_0, j_1 および j_2 はそれぞれの段階における推定パラメータから導かれた出力と対象システムの出力を一定時間にわたって観測した結果から決定する。

3.1 近似解の導出法

(4) 式の非線形関数 f が $u_j f(u_j) \geq 0$ (等号は $u_j = 0$ のとき) なる特性をもつ点に着目する。いま、入力系列ベクトル $\mathbf{X}_j$ に対し重

み係数ベクトル $\mathbf{C}$ を与えて線形方程式を構成する。そしてこの方程式の符号が任意の入力系列ベクトル $\mathbf{X}_j$ に対し、これに対応する対象システムの出力 y_j の符号に常に一致するように、閾値論理学習機械（重み、加算器、閾値要素から構成される学習機械のことで、閾値要素はその入力为正のとき +1、負のとき -1 の出力信号を出す装置である。Fig. 3 参照）のノンパラメータ形訓練法⁹⁾を適用して重み係数ベクトル $\mathbf{C}$ の値を学習することを考える。ここで(5)式の雑音 v_j を無視して考えれば、入力系列ベクトルの含まれている n 次元ベクトル空間（代表元を $\mathbf{X}$ で表わす）は $\mathbf{X}^T \mathbf{G} = 0$ となるような点 $\mathbf{X}$ の軌跡で表わされる超平面によって二分される。このとき、 $\mathbf{X}^T \mathbf{G} > 0$ ($\mathbf{X}^T \mathbf{G} < 0$) となる点 $\mathbf{X}$ の存在する部分空間を正の側（負の側）と呼ぶ。入力が任意の値をとると仮定したとき $\mathbf{X}_j^T \mathbf{C} \cdot f(u_j) \geq 0$ を常に満たすための解地域はこの超平面に直交するという条件と符号の条件から集合 $E = \{\lambda' \mathbf{G} | 0 \leq \lambda' < \infty\}$ 上である。

いま、つぎの n 次元ベクトルを定義する。

$$\mathbf{C}_j \triangleq (c_1^{(j)}, c_2^{(j)}, \dots, c_n^{(j)})^T \quad (9)$$

このとき、重み係数ベクトル $\mathbf{C}$ を決めるためノンパラメータ形訓練法を適用すれば第 j ステップでの修正は

$$\mathbf{C}_{j+1} = \mathbf{C}_j + \frac{1}{2} k_j (\text{sgn } y_j - \text{sgn } \mathbf{X}_j^T \mathbf{C}_j) \mathbf{X}_j \quad (10)$$

という逐次式によって行なわれる。ここで

$$\text{sgn } y_j \triangleq \begin{cases} 1, & y_j > 0 \text{ のとき} \\ -1, & y_j < 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (11)$$

(10) 式において、修正係数はつぎのいずれかに選ぶ。

$$k_j = \frac{1}{j} + \frac{|\mathbf{X}_j^T \mathbf{C}_j|}{\|\mathbf{X}_j\|^2} \quad (12)$$

$$k_j = \alpha \frac{|\mathbf{X}_j^T \mathbf{C}_j|}{\|\mathbf{X}_j\|^2} \quad (0 < \alpha < 2) \quad (13)$$

(12) 式は絶対訂正法の変形であり、(13) 式は倍数訂正法である⁹⁾。

ここで(10)式のアルゴリズムを用いたときの $\mathbf{C}_j$ の解地域、すなわち集合 $E = \{\lambda' \mathbf{G} | 0 \leq \lambda' < \infty\}$ 上への収束性について考察する。いま、集合 E 上の任意の点 $\lambda \mathbf{G}$ ($\forall \lambda \in [0, \infty)$) と点 $\mathbf{C}$ とのユークリッド距離の2乗は $l = \|\lambda \mathbf{G} - \mathbf{C}\|^2$ である。集合 $E = \{\lambda' \mathbf{G} | 0 \leq \lambda' < \infty\}$ と点 $\mathbf{C}$ との距離の2乗は l の最小値 $l_{\min}$ であるから、 $\partial l / \partial \lambda = 0$ を満たす λ の値

$$\lambda = \frac{(\mathbf{G}, \mathbf{C})}{\|\mathbf{G}\|^2} \quad (14)$$

を l に代入すれば集合 $E = \{\lambda' \mathbf{G} | 0 \leq \lambda' < \infty\}$ と点 $\mathbf{C}$ との距離の2乗が求まり、つぎのようになる。

$$L \triangleq l_{\min} = \frac{\|\mathbf{G}\|^2 \|\mathbf{C}\|^2 - (\mathbf{G}, \mathbf{C})^2}{\|\mathbf{G}\|^2} \quad (15)$$

(ただし $\lambda < 0$ であれば $L \triangleq l_{\min} = \|\mathbf{C}\|^2$ とおく)。

さて、(10) 式の両辺に左から $\mathbf{G}^T$ をかければ次式が導ける。

$$(\mathbf{G}, \mathbf{C}_{j+1}) = (\mathbf{G}, \mathbf{C}_j)$$

$$+ \frac{1}{2} k_j (\text{sgn } y_j - \text{sgn } \mathbf{X}_j^T \mathbf{C}_j) \mathbf{X}_j^T \mathbf{G} \quad (16)$$

いま y_j と $\mathbf{X}_j^T \mathbf{C}_j$ の符号が異なるとすれば (16) 式は

$$(\mathbf{G}, \mathbf{C}_{j+1}) = (\mathbf{G}, \mathbf{C}_j) + k_j |\mathbf{X}_j^T \mathbf{G}| \quad (17)$$

となる。 k_j は (12) または (13) 式で与えられるため $k_j |\mathbf{X}_j^T \mathbf{G}| \geq 0$ であり、一般に y_j と $\mathbf{X}_j^T \mathbf{C}_j$ の符号にかかわらず

$$(\mathbf{G}, \mathbf{C}_{j+1}) \geq (\mathbf{G}, \mathbf{C}_j) \quad (18)$$

となる。つぎに (10) 式のノルムの2乗をとれば

$$\|\mathbf{C}_{j+1}\|^2 = \|\mathbf{C}_j\|^2 - 2k_j |\mathbf{X}_j^T \mathbf{C}_j| + k_j^2 \|\mathbf{X}_j\|^2 \quad (19)$$

となる。 k_j として (12) 式を用いた場合 (19) 式は

$$\|\mathbf{C}_{j+1}\|^2 = \|\mathbf{C}_j\|^2 + \frac{\|\mathbf{X}_j\|^2}{j^2} - \frac{|\mathbf{X}_j^T \mathbf{C}_j|^2}{\|\mathbf{X}_j\|^2} \quad (20)$$

となり、 $|\mathbf{X}_j^T \mathbf{C}_j|^2 / \|\mathbf{X}_j\|^2 \geq 0$ であるから j が十分大きいとすれば $\|\mathbf{C}_{j+1}\|^2 \leq \|\mathbf{C}_j\|^2$ とおける。一方 (13) 式については

$$\|\mathbf{C}_{j+1}\|^2 = \left\{ 1 + \alpha(\alpha - 2) \frac{(\mathbf{X}_j, \mathbf{C}_j)^2}{\|\mathbf{X}_j\|^2 \|\mathbf{C}_j\|^2} \right\} \|\mathbf{C}_j\|^2 \quad (21)$$

となって $0 < \alpha < 2$ に対して $\|\mathbf{C}_{j+1}\|^2 \leq \|\mathbf{C}_j\|^2$ が導ける。よって、一般につぎのようにおける。

$$\|\mathbf{C}_{j+1}\|^2 \leq \|\mathbf{C}_j\|^2 \quad (22)$$

ここで、集合 $E = \{\lambda' \mathbf{G} | 0 \leq \lambda' < \infty\}$ と点 $\mathbf{C}_j$ との距離の2乗を L_j とおけば L_j は (15) 式の右辺で $\mathbf{C}$ を $\mathbf{C}_j$ と置き換えれば得られる。いま、(18) 式および (22) 式を用いれば L_j と L_{j+1} との関係はつぎのようになる。

$$L_j = \frac{\|\mathbf{G}\|^2 \|\mathbf{C}_j\|^2 - (\mathbf{G}, \mathbf{C}_j)^2}{\|\mathbf{G}\|^2} \quad (23)$$

$$\geq \frac{\|\mathbf{G}\|^2 \|\mathbf{C}_{j+1}\|^2 - (\mathbf{G}, \mathbf{C}_{j+1})^2}{\|\mathbf{G}\|^2} = L_{j+1} \quad (24)$$

よって、実数列 $\{L_j\}$ は単調減少数列となる。一方すべての j に対して $L_j \geq 0$ であり収束点は必ず存在する。そしてこの収束点は入力信号に依存して決まり y_j と $\mathbf{X}_j^T \mathbf{C}_j$ の符号が異なる回数が十分であるような入力信号に対して L_j は十分小さくなる。たとえば不規則性入力信号はこの条件を満たす。なお、雑音がある場合、(13) 式の係数 α を小さく選ぶことにより解の到達精度を改善できることがシミュレーションにより実証された。

つぎに (10) 式のアルゴリズムに基づいて学習した重み係数ベクトル $\mathbf{C}_j$ の値を基礎にしてゼロメモリ非線形要素のパラメータを求める。いま入力信号が不規

則であり、十分大きいステップ j_0 で学習過程が十分進んでいるとすれば、 $j \geq j_0$ のとき $\mathbf{C}_j \simeq \lambda_j \mathbf{G} = a_1 \lambda_j \mathbf{H}$ ($\lambda_j = (\mathbf{G}, \mathbf{C}_j) / \|\mathbf{G}\|^2$) なる関係を満す。ここで λ_j および a_1 は未知であるので、計算処理の都合上 $\mathbf{C}_j$ を線形要素のパラメータとみなす。

いま、 $\mathbf{C}_j$ から導かれた線形要素の出力を $\hat{u}_j$ とおくと (3) 式と同様にして、つぎのように書ける。

$$\hat{u}_j = (\mathbf{C}_j, \mathbf{X}_j) \quad (25)$$

さらに、 $\hat{u}_j$ から導かれたゼロメモリ非線形要素の出力を $\hat{f}(\hat{u}_j)$ とおけば、(4) 式と同様にして

$$\hat{f}(\hat{u}_j) = \sum_{l=1}^m \hat{b}_l^{(j)} \hat{u}_j^l \quad (26)$$

とかける。ここで $\hat{b}_l^{(j)}$ ($l=1, 2, \dots, m$) は $\hat{u}_j$ のベキの係数を表わしており、時変係数として扱うことにより一般性をもたせている。このパラメータ $\hat{b}_l^{(j)}$ を求めるため、つぎの汎関数 F を最小化することを考える。

$$F(\hat{u}_j, \hat{b}_1^{(j)}, \hat{b}_2^{(j)}, \dots, \hat{b}_m^{(j)}) = (y_j - \hat{f}(\hat{u}_j))^2 \quad (27)$$

いま、二つの m 次元ベクトル

$$\mathbf{Q}_j \triangleq (\hat{u}_j, \hat{u}_j^2, \dots, \hat{u}_j^m)^T \quad (28)$$

$$\mathbf{B}_j \triangleq (\hat{b}_1^{(j)}, \hat{b}_2^{(j)}, \dots, \hat{b}_m^{(j)})^T \quad (29)$$

を定義すれば、(27) 式を最小にする $\hat{b}_l^{(j)}$ ($l=1, 2, \dots, m$) の値を求めるための逐次近似は勾配法の変形により

$$\mathbf{B}_{j+1} = \mathbf{B}_j + \frac{\beta}{\|\mathbf{Q}_j\|^2} \mathbf{Q}_j (y_j - \hat{f}(\hat{u}_j)) \quad (19)$$

なる式で行なう。ここで、 $0 < \beta \leq 1$ と選ぶ。

(30) 式の逐次計算により、任意の $\hat{u}_j$ に対して (27) 式を最小にするような $\mathbf{B}_j$ が近似的に求まり、この値は (26) 式で表わされるゼロメモリ非線形要素のパラメータの近似解を与える。

つぎに、(10) 式および (30) 式のアルゴリズムにより導かれた各要素のパラメータの解を、(8) 式で与えられる“入出力方程式の標準形”のパラメータ g_i ($i=1, 2, \dots, n$) および p_l ($l=2, 3, \dots, m$) に対する解に変換する方法について述べる。

いま、 $\mathbf{C}_j = \lambda \mathbf{G}$ と仮定すれば、(25) 式より

$$\hat{u}_j = \lambda (\mathbf{G}, \mathbf{X}_j) = \frac{1}{\mu} (\mathbf{G}, \mathbf{X}_j) \quad (\lambda \mu \triangleq 1) \quad (31)$$

となる。(31) 式を (8) 式に代入すれば

$$y_j \simeq \mu \hat{u}_j + p_2 \mu^2 \hat{u}_j^2 + \dots + p_m \mu^m \hat{u}_j^m \quad (32)$$

となる。(26) 式と (32) 式の比較をすればわかるように (30) 式の到達目標値はつぎの m 次元ベクトルとなる。

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^* &\triangleq (b_1, b_2, \dots, b_m)^T \\ &= (\mu, p_2 \mu^2, \dots, p_m \mu^m)^T \end{aligned} \quad (33)$$

したがって、第 j ステップにおける (8) 式のパラメータ $\mathbf{G}$ および p_l ($l=2, 3, \dots, m$) に対する近似解を

$\hat{\mathbf{G}}_j$ および $\hat{p}_l^{(j)}$ とおけば、 $\mathbf{C}_j \simeq \lambda \mathbf{G} = \mathbf{G}/\mu$ という仮定と (33) 式から、解のパラメータ変換式はつぎのように導ける。

$$\hat{\mathbf{G}}_j = \hat{b}_1^{(j)} \mathbf{C}_j \quad (34)$$

$$\hat{p}_l^{(j)} = \hat{b}_l^{(j)} / (\hat{b}_1^{(j)})^l \quad (l=2, 3, \dots, m) \quad (35)$$

ここで

$$\hat{\mathbf{G}}_j \triangleq (\hat{g}_1^{(j)}, \hat{g}_2^{(j)}, \dots, \hat{g}_n^{(j)})^T \quad (36)$$

3.2 解の近似精度の向上法

3.1 節において、線形要素のパラメータに対する解を出力の符号情報のみから導いた。このため、(10) 式の逐次近似の到達の精度にある限界が存在する。そしてこの限界は非線形要素のパラメータに対する解に重大な影響を及ぼすことになる。そのため、ここでは 3.1 節において導かれた入出力方程式の標準形のパラメータに対する近似解を基礎にして、解の精度を向上させるアルゴリズムを考える。

いま、入出力方程式の標準形に含まれる個々のパラメータを集めた $(n+m-1)$ 次元パラメータベクトルを

$$\begin{aligned} \Phi &\triangleq (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n+m-1})^T \\ &= (g_1, g_2, \dots, g_n, p_2, p_3, \dots, p_m)^T \end{aligned} \quad (37)$$

と定義し、この Φ に対する第 j ステップの近似解を示すベクトルをつぎのように定義する。

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_j &\triangleq (\hat{\phi}_1^{(j)}, \hat{\phi}_2^{(j)}, \dots, \hat{\phi}_{n+m-1}^{(j)})^T \\ &= (\hat{\mathbf{G}}_j^T, \hat{\mathbf{P}}_j^T)^T \end{aligned} \quad (38)$$

ここで

$$\hat{\mathbf{P}}_j \triangleq (\hat{p}_2^{(j)}, \hat{p}_3^{(j)}, \dots, \hat{p}_m^{(j)})^T \quad (39)$$

このとき、(8) 式の形から $\hat{\Phi}_j$ より導かれた出力 $\hat{y}_j$ は、(36) 式および (39) 式を用いてつぎのようにかける。

$$\begin{aligned} \hat{y}_j &= (\hat{\mathbf{G}}_j, \mathbf{X}_j) + \hat{p}_2^{(j)} (\hat{\mathbf{G}}_j, \mathbf{X}_j)^2 + \dots \\ &\quad + \hat{p}_m^{(j)} (\hat{\mathbf{G}}_j, \mathbf{X}_j)^m \end{aligned} \quad (40)$$

いま、非線形システムの入出力方程式 (8) に含まれる未知パラメータ Φ を求めるため、つぎの汎関数 J を最小化することを考える。

$$J(\mathbf{X}_j, \hat{\Phi}_j) = (y_j - \hat{y}_j)^2 \quad (41)$$

そして、(41) 式を十分小さくした時点での $\hat{\Phi}_j$ から未知パラメータ Φ の値を認知する。(41) 式を最小化する $\hat{\Phi}_j$ を得るための逐次式は勾配法の変形により

$$\hat{\Phi}_{j+1} = \hat{\Phi}_j + \gamma_L (y_j - \hat{y}_j) \nabla \hat{\Phi}_j / \|\nabla \hat{\Phi}_j\|^2 \quad (42)$$

とする。ここで

$$\nabla \Phi y \triangleq (\partial y / \partial \phi_1, \partial y / \partial \phi_2, \dots, \partial y / \partial \phi_{n+m-1})^T \quad (43)$$

$$\nabla \hat{\Phi}_j \hat{y}_j = \begin{bmatrix} \nabla \hat{\mathbf{G}}_j \hat{y}_j \\ \nabla \hat{\mathbf{P}}_j \hat{y}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(1 + \sum_{l=2}^m l \hat{p}_l^{(j)} (\hat{\mathbf{G}}_j, \mathbf{X}_j)^{l-1}\right) \mathbf{X}_j \\ (\hat{\mathbf{G}}_j, \mathbf{X}_j)^2 \\ (\hat{\mathbf{G}}_j, \mathbf{X}_j)^3 \\ \vdots \\ (\hat{\mathbf{G}}_j, \mathbf{X}_j)^m \end{bmatrix} \quad (44)$$

である。また、修正係数 γ_L についてはつぎのように選ぶ。いま、第2段階の同定過程が (j_1+1) ステップから始めると仮定し、 N を適当な大きさの正の整数、 L を自然数とする。つぎに $j \geq j_1+1$ において (j_1, j_1+N) を第1区間、 (j_1+N, j_1+2N) を第2区間、 $\dots$ 、 $(j_1+(L-1)N, j_1+LN)$ を第 L 区間、 $\dots$ と名づける。そして j が第 L 区間に属するとき、すなわち $j \in (j_1+(L-1)N, j_1+LN)$ ならば、修正係数 γ_L は

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 1$$

$$\gamma_L = 1 \left/ \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{L-2} U(E_{k+1} - E_k) \right\} \right. \quad (L \geq 3) \quad (45)$$

と選ぶ。ここで

$$E_k = \sum_{j=j_1+(k-1)N+1}^{j_1+kN} |y_j - \hat{y}_j|$$

$$U(E_{k+1} - E_k) \triangleq \begin{cases} 1, & E_{k+1} \geq E_k \text{ のとき} \\ 0, & E_{k+1} < E_k \text{ のとき} \end{cases} \quad (46)$$

とする (ただし、システムが準定常であれば γ_L を $0 < \gamma_L \leq 1$ を満す適当な定数に固定する)。

3.3 収束性の考察

3.1 および 3.2 節で述べたアルゴリズムについての収束性の考察を行なう。すでに (10) 式の収束性については 3.1 節で述べたので、ここではまず (30) 式の収束性について考察し、その後 (42) 式の収束性を考察する。いま、(28) 式および (29) 式の定義を用いれば (26) 式は $\hat{f}(\hat{a}_j) = \mathbf{Q}_j^T \mathbf{B}_j$ と書き換えられる。また、 $j \geq j_0$ において $\mathbf{C}_j \approx \lambda_j \mathbf{G}$ ($\lambda_j > 0$) とすれば (23) 式は $L_j \approx 0$ となる。そのため $\mathbf{C}_j$ は十分収束していると考えて近似的に定数とみなし $\mathbf{C}_j \approx \mathbf{C}^*$ とおく。さらに λ_j についても $\lambda_j = (\mathbf{G}, \mathbf{C}_j) \|\mathbf{G}\|^2 \approx \lambda^*$ と固定できる。このとき、(31) 式と同様に取扱えば (28) 式および (33) 式の定義を用いて (32) 式は $y_j \approx \mathbf{Q}_j^T \mathbf{B}^* + v_j$ と書き換えられる ((32) 式では (8) 式の出力雑音を取除いて書かれていた)。以上を考慮すれば (30) 式は近似的に

$$\mathbf{B}_{j+1} = \mathbf{B}_j + \beta \frac{\mathbf{Q}_j \mathbf{Q}_j^T}{\|\mathbf{Q}_j\|^2} (\mathbf{B}^* - \mathbf{B}_j) + \beta v_j \frac{\mathbf{Q}_j}{\|\mathbf{Q}_j\|^2} \quad (47)$$

と書ける。さらに $\Delta \mathbf{B}_j \triangleq \mathbf{B}_j - \mathbf{B}^*$ と定義すれば (47) 式は

$$\Delta \mathbf{B}_{j+1} = \left(1 - \beta \frac{\mathbf{Q}_j \mathbf{Q}_j^T}{\|\mathbf{Q}_j\|^2} \right) \Delta \mathbf{B}_j + \beta v_j \frac{\mathbf{Q}_j}{\|\mathbf{Q}_j\|^2} \quad (48)$$

と変形できる。いま、(48) 式より $\|\Delta \mathbf{B}_{j+1}\|^2$ を求めれば

$$\|\Delta \mathbf{B}_{j+1}\|^2 = F_j \|\Delta \mathbf{B}_j\|^2 + \delta_j \quad (49)$$

となる。ここで

$$F_j \triangleq 1 + \beta(\beta-2) \frac{(\mathbf{Q}_j, \Delta \mathbf{B}_j)^2}{\|\mathbf{Q}_j\|^2 \|\Delta \mathbf{B}_j\|^2} \quad (50)$$

$$\delta_j \triangleq \frac{\beta v_j}{\|\mathbf{Q}_j\|^2} \{ \beta v_j + 2(1-\beta)(\mathbf{Q}_j, \Delta \mathbf{B}_j) \} \quad (51)$$

さらに、(49) 式を変形すれば

$$\|\Delta \mathbf{B}_{j+1}\|^2 = \prod_{k=j_0}^j F_k \|\Delta \mathbf{B}_{j_0}\|^2 + \sum_{k=j_0}^{j-1} \delta_k \prod_{l=k+1}^j F_l + \delta_j \quad (52)$$

となる。ここで $\|\Delta \mathbf{B}_{j_0}\|^2$ は初期推定誤差を表わす。 j を十分大きいとき $\|\Delta \mathbf{B}_j\|^2$ に関して $\|\Delta \mathbf{B}_{j_0}\|^2$ の影響が消えるための必要十分条件は

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \prod_{k=j_0}^j F_k = 0 \quad (53)$$

であり、この条件を β について求めれば $0 < \beta \leq 1$ となる (ここで、 $\beta(\beta-2)$ の値は $\beta=1$ を中心にして対称)。また、 $\|\Delta \mathbf{B}_{j_0}\|^2$ の影響がより早く消滅するための条件は $\partial F_k / \partial \beta = 0$ を β について解いて $\beta=1$ となる。

さて、ここで雑音の影響について考察しよう。いまベクトル $\mathbf{Q}_j$ と $\Delta \mathbf{B}_j$ とのなす角を θ_j とおき、入力と雑音は統計的に独立であるとして、以下に示すような諸条件を仮定する。すなわち

$$\left. \begin{aligned} \text{(i)} \quad & E \{ F_j | \Delta \mathbf{B}_j, \mathbf{C}_j, \dots, \Delta \mathbf{B}_{j_0}, \mathbf{C}_{j_0} \} \\ &= 1 - \beta(\beta-2) E \{ \cos^2 \theta_j | \Delta \mathbf{B}_j, \mathbf{C}_j, \dots, \Delta \mathbf{B}_{j_0}, \mathbf{C}_{j_0} \} \\ &\leq M < 1 \\ \text{(ii)} \quad & E \{ v_j | \Delta \mathbf{B}_j, \mathbf{C}_j, \dots, \Delta \mathbf{B}_{j_0}, \mathbf{C}_{j_0} \} = 0 \\ \text{(iii)} \quad & E \left\{ \frac{v_j^2}{\|\mathbf{Q}_j\|^2} \middle| \Delta \mathbf{B}_j, \mathbf{C}_j, \dots, \Delta \mathbf{B}_{j_0}, \mathbf{C}_{j_0} \right\} \\ &\leq c < \infty \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

ここで $E \{ \cdot | \Delta \mathbf{B}_j, \mathbf{C}_j, \dots, \Delta \mathbf{B}_{j_0}, \mathbf{C}_{j_0} \}$ は $\Delta \mathbf{B}_j, \mathbf{C}_j, \dots, \Delta \mathbf{B}_{j_0}, \mathbf{C}_{j_0}$ が与えられたときの条件付平均値を表わすものとする。上記の諸条件は実際的な場合においてもたいていの場合仮定できると思われる。さて、(54) 式の仮定のもとに (51) 式の δ_j について $\Delta \mathbf{B}_j, \mathbf{C}_j, \dots, \Delta \mathbf{B}_{j_0}, \mathbf{C}_{j_0}$ が与えられたときの条件付平均をとればつぎの関係が導ける。

$$E \{ \delta_j | \Delta \mathbf{B}_j, \mathbf{C}_j, \dots, \Delta \mathbf{B}_{j_0}, \mathbf{C}_{j_0} \} \leq \beta^2 c \quad (55)$$

いま、(49) 式について $\Delta \mathbf{B}_j, \mathbf{C}_j, \dots, \Delta \mathbf{B}_{j_0}, \mathbf{C}_{j_0}$ が与えられたときの条件付平均をとれば

$$E \{ \|\Delta \mathbf{B}_{j+1}\|^2 | \Delta \mathbf{B}_j, \mathbf{C}_j, \dots, \Delta \mathbf{B}_{j_0}, \mathbf{C}_{j_0} \} \leq M \|\Delta \mathbf{B}_j\|^2 + \beta^2 c \quad (56)$$

となる。さらに (56) 式の両辺について $\Delta \mathbf{B}_{j-1}, \mathbf{C}_{j-1}, \dots, \Delta \mathbf{B}_{j_0}, \mathbf{C}_{j_0}$ が与えられたときの条件付平均を (56) 式の両辺についてとれば

$$E \{ \|\Delta \mathbf{B}_{j+1}\|^2 | \Delta \mathbf{B}_j, \mathbf{C}_j, \dots, \Delta \mathbf{B}_{j_0}, \mathbf{C}_{j_0} \} \leq M E \{ \|\Delta \mathbf{B}_j\|^2 | \Delta \mathbf{B}_{j-1}, \mathbf{C}_{j-1}, \dots, \Delta \mathbf{B}_{j_0}, \mathbf{C}_{j_0} \} + \beta^2 c \quad (57)$$

となる。ここで (57) 式を変形すれば

$$E \{ \|\Delta \mathbf{B}_j\|^2 | \Delta \mathbf{B}_{j-1}, \mathbf{C}_{j-1}, \dots, \Delta \mathbf{B}_{j_0}, \mathbf{C}_{j_0} \} \leq M^{j-j_0} \|\Delta \mathbf{B}_{j_0}\|^2 + \beta^2 c \sum_{l=0}^{j-j_0-1} M^l$$

(a) linear dynamics (b) saturation characteristics

Fig. 4 Estimated results of (a) linear dynamics (b) saturation characteristics in the absence of the output noise

(a) asymmetric saturation (b) dead band

Fig. 5 Estimated results of zero-memory nonlinear characteristics

$$= M^{i-j_0} \|\Delta B_{j_0}\|^2 + \beta^2 c \frac{1 - M^{i-j_0}}{1 - M} \quad (58)$$

となつて $0 \leq M < 1$ である点を考慮すれば

$$\lim_{j \rightarrow \infty} E \{ \|\Delta B_j\|^2 | \Delta B_{j-1}, C_{j-1}, \dots, \Delta B_{j_0}, C_{j_0} \} \leq \frac{\beta^2 c}{1 - M} \quad (59)$$

という関係が導ける。したがって、推定値 B_j に関して雑音の影響を少なくするには β の値をより小さくすればよいことが (59) 式よりわかる。

つぎに (42) 式の収束性を考察する。いま、3.1 節で述べた方法により求めた解 ((34) および (35) 式から決定) が真値の十分近傍にあり、この解を初期値として (42) 式により逐次更新された値も真値の十分近傍にあると仮定すれば、(8) 式を $\hat{\phi}_j$ のまわりで Taylor 展開して、次式が導ける。

$$y_j \approx \hat{y}_j + (\Phi - \hat{\phi}_j)^T \nabla \hat{y}_j + v_j \quad (60)$$

ここで $g_j \triangleq \nabla \hat{y}_j$ と定義し、(60) 式を (42) 式に代入すれば近似的に次式が導ける。

$$\hat{\phi}_{j+1} = \hat{\phi}_j + \gamma_L \frac{g_j g_j^T}{\|g_j\|^2} (\Phi - \hat{\phi}_j) + \gamma_L v_j \frac{g_j}{\|g_j\|^2} \quad (61)$$

この (61) 式はさきの (47) 式とまったく同形である。したがって、(61) 式はさきの (48) 式から (59) 式と同様にして対応した変形が可能となる。(45) 式のように γ_L を選ぶ方法は初期値の設定誤差の影響を早く消滅

(a) linear dynamics (b) saturation characteristics

Fig. 6 Estimated results of (a) linear dynamics and (b) saturation characteristics in the presence of the output noise

させ、かつ到達精度を改善させる一つの方法である。

4. シミュレーションとその結果

以上述べてきた同定法に基づき、いくつかの例についてデジタル計算機によるシミュレーションを実行した。その代表的結果を以下に示す。このとき、線形要素の特性に $1.49/(5S+2)$ を使い、標化周期を 1 sec として線形要素および非線形要素のパラメータ数をそれぞれ $n=10$, $m=5$ と選んだ。また、入力 x_j には主として $|x_j| \leq 1$ で定義された一様乱数を用いた。近似パラメータの初期値の設定に、(10) 式では各要素の値を $1/\sqrt{10}$, (30) 式では各要素の値を零、最後に (42) 式では第 1 段階終了時の (10) 式から求める C_j および (30) 式から求める B_j を (34) と (35) 式によって変換操作を行なった値を用いた。

4.1 出力ノイズがない場合

まず非線形要素に u_j に関する 5 次多項式の関数形を与えて (10) 式の係数に (12) 式を用い、(30) 式で $\beta=1$, (42) 式で $\gamma_L=1$ とおいて実験した。この場合、第 1 段階終了時 ($j_1=3200$, ただし $j_0=2700$) の線形要素の推定誤差は 1% 以下、非線形要素の推定誤差は数%程度であったが、第 2 段階終了時 ($j_2=5000$) には完全に一致していた。つぎに非線形要素に折線で飽和特性を与えて (10) 式の係数に (12) 式を用い、(30) 式では多項式による定式化の誤差を一種の雑音と考えその影響を考慮して、係数 β の代わりに (45) と (46) 式による係数を用いた (ここで $N=20$ とし (46) 式で $\hat{y}_j$ の代わりに $f(\hat{u}_j)$ とおく)。また (42) 式では (46) 式で $N=50$ としたものを用いている。このときの第 2 段階終了時の推定結果が Fig. 4 に示される (ここで $j_0=3000$, $j_1=3500$, $j_2=6500$)。Fig. 4 から明らかにように良好な結果を得た (折線特性を 5 次多項式で近似した誤差は当然残る)。Fig. 4 の実験と同様にし、非線形要素に非対称飽和特性および不感帯特性を

与えた場合の第2段階終了時の非線形要素の推定結果が Fig. 5 で示され、この場合においても結果は良好と思われる。Fig. 5 に対応する線形要素の推定結果はグラフ上で一致していたので省略する。

4.2 出力ノイズを含む場合

出力に平均零、分散比 $E\{v_j^2\}/E\{f(u_j)^2\}=0.05$ の入力と独立な白色雑音が重畳した場合の実験例を示す。非線形要素には Fig. 4, 5 と同様に折線で対称、非対称飽和特性および不感帯特性を用いた。実験方法は Fig. 4, 5 の場合と同様であるが (10) 式の係数に (13) 式 ($\alpha=0.5$) を用いた点が異なる。Fig. 6 に対称飽和特性の場合についての第2段階終了時の推定結果を示す (ここで $j_0=1500$, $j_1=2000$, $j_2=5000$)。Fig. 6 から明らかなように雑音がある場合でもほぼ良好な結果を得た。ほかの2例についてもほぼ良好な結果を得た。ここで、Fig. 4 から Fig. 6 では推定の程度を比較する便宜上、(8) 式に対する解を (5) 式に対する解に換算して示した。なお、雑音のある場合 (13) 式で α を小さく選べば線形要素のパラメータ推定の到達精度が改善されることが実験の結果より明らかとなった。

5. 結 言

線形要素にゼロメモリ非線形要素が縦続接続された形の非線形システムの同定法について考察した。ゼロメモリ非線形要素には 1, 3 象限に特性をもつ場合を対象とした。この種のシステムとしては線形要素と飽和要素からなるシステム、線形要素 (たとえばむだ時間など) とヒステリシスを伴わないリレーからなるシステム、線形要素と摩擦要素からなるシステムなどが考えられ、たとえば、線形要素の後に機械要素がくる場合などに現われる。

ここでは各要素のパラメータを直接求める方法をとっているため、ボルテラ級数などを用いる方法と比較してパラメータ総数が極めて少なく、かつシステム定式化の精度もかなり高くすることができる。

おわりに、計算機のプログラミングに助力を頂いた本学学生宮田和明君に深く感謝する。

参 考 文 献

- 1) 鈴木: システム・アイデンティフィケーション-IV, 制御工学, **14**-11, 683/693 (1970)
- 2) K. S. Narendra and P. G. Gallman: An Iterative Method for the Identification of Nonlinear Systems Using a Hammerstein Model, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-11**-3, 546/549 (1966)
- 3) R. E. Butler and E. V. Bohn: An Automatic Identification Technique for a Class of Nonlinear Systems, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-11**-2, 292/296 (1966)
- 4) 古谷, 鈴木, 藤井: 多項式近似による非線形システムの動特性測定, 計測自動制御学会論文集, **6**-4, 356/365 (1970)
- 5) F. I. Chang and R. Luus: A Noniterative Method for Identification Using Hammerstein Model, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-16**-5, 464/468 (1971)
- 6) 前川, 雛元: ゼロメモリ非線形要素を含む系の一同定法 計測自動制御学会論文集, **9**-6, 688/695 (1973)
- 7) 雛元, 前川: 階段状近似による非線形システムの同定, 計測自動制御学会論文集, **11**-3, 275/280 (1975)
- 8) R. J. Roy and J. Sherman: A Learning Technique for Volterra Series Representation, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-12**-6, 761/764 (1967)
- 9) N. J. Nilson: Learning, Machines, 65/72 McGraw-Hill, New York (1965)
- 10) N. Wiener: Nonlinear Problem in Random Theory, MIT Press and John Wiley (1958)
- 11) 真鍋, 中尾, 藤井: 2 値信号を入力とする非線形系の動特性測定法, 計測自動制御学会論文集, **7**-4, 331/339 (1971)
- 12) 文献 9) と同じ, 27/31