いくつかの鞍点をもつ多次元未知関数の ミニ・マックス点探索法[†]

久保田 健 治*・北 森 俊 行*

A Min-Max Point Seeking Method for an Unknown Multi-Dimensional Function with Several Saddle Points

Kenji KUBOTA* and Toshiyuki KITAMORI*

Seeking the min-max point of an unknown function which has several saddle points is one of the most important problems to obtain the optimal mixed strategy in a general game. However, no useful method is available for the problem.

This paper presents a powerful method for obtaining multi-dimensional, multi-saddle payoff functions. The search procedure consists of six main steps: i) to fit local models according to the observed data, ii) to estimate the model's uncertainty due to the lack of data, iii) to estimate the upper limit function and the lower limit function of the unknown function, iv) to estimate a point which is thought to be min-max with a maximum possibility, v) to observe the unknown function at the estimated point, vi) to check if the observed point is the true min-max point.

Simulation studies on unintentionally selected four test functions of two scalar variables produced fairly good results. The correct min-max points are detected with less than 0.3% error after about 100 observations. The number of the observation is about one-thousandth of that which would be required in applying a uniform lattice search.

1. 序 論

システムの最適化を行なうさいに、ある評価関数を最大にすればよい場合と最適化を防げる競争相手が存在して評価関数(または利得関数)をミニマックス(またはマックスミニ)にしなければならない場合とがある。前者の場合の最適策を求めるための手法についてはすでに多くの研究が報告されている。後者の場合の

最適化問題はゲーム理論としてよく知られている。

後者の場合の最適策を求める手法は利得関数が非常に単純な場合、プレーヤーの取りうる混合戦略が有限でその利得値が即知である場合について述べられているだけである^{2),4)}。混合戦略の組合わせが無限にあり、かつ利得関数が複雑な場合、特に未知である場合の最適策を求める手法についてはほとんど研究されてない。この場合の最適策を求めるためには未知関数のミニマックス点を求める手法が必要とされる。

未知関数 $z=f(x, y)$, $x \in R^n$, $y \in R^m$, $z \in R^1$ のミニマックス $\min_x \max_y z$ を求める手法として (i) マックス・ミンをを求める問題、すなわち $\max_x \{-(\max_y z)\}$ に変換する方法と (ii) 直接ミニマックスを求める方法とが考えられる。前者の方法はまず $w(x) = \max_y f(x, y)$ を求め、つぎに $f^* = \max_x \{-w(x)\}$ を求めなければならないので、 y について最大曲面を求める必要があり、莫大な記憶容量を必要とするばかりでなく、本論文で展開する方法と比較してもわかるように有効な方法であるとはいえない。未知関数のミニマックスを探索する問題は最大値を探索する問題と比較してつぎの点で本質的な難かしさがある。

(i) 最大値探索問題では関数の形状を知らなくとも勾配法やランダム法などの手法を用いれば局所的な最大値は求められるが、Min Max 探索問題では局所的な Min Max 点を求める場合でもその部分の関数の形状に関する知識が不可欠である。

(ii) 全域的な最大値はすべての局所的な最大値を知ればそれらから求められるが、全域的な Min Max 値は局所的な Min Max 値から求めることはできない。したがって最大値探索問題は領域を分割して独立に探索できるのに反し、Min Max 探索問題はつねに全域的な探索が不可欠である。

本論文ではいくつかの鞍点をもつ多次元未知関数

[†] 第16回自動制御連合講演会で発表(昭48・10)

* 東京大学工学部 東京都文京区本郷 7-3-1

* Faculty of Engineering, Tokyo University, Bunkyo-ku, Tokyo

(Received May 27, 1974)

$z=f(x, y)$ の点 (x_i, y_i) の関数値を観測しながらミニマックスを求める手法について述べる。本論文の主な手順は未知関数 $z=f(x, y)$ に対してモデル $\hat{z}=f(x, y)$ とこのモデル当てはめの不確かさ $\lambda(x, y)$ を求める。モデル $\hat{z}$ と当てはめの不確かさ λ を用いて未知関数 f の上限関数 $U(x, y)$ および下限関数 $L(x, y)$ を作成する。 $U^*(x)=\max_y U(x, y)$ を満す軌跡 $y=\Psi(x)$ を求め、さらにこの軌跡上で $\min_x L(x, \Psi(x))$ を満す点 (x^*, y^*) を求める。この点および近傍の関数を観測することによって、ミニマックス点の存在する可能性が大きいと推定される部分領域の不確かさを減少させてゆきながら、真のミニマックス点を求める。

本手法を用いて無作為に作られた4個のテスト関数に対して数値実験を行なった結果、100回前後の観測回数で0.3%以内の誤差でミニマックス点が求められた。

2. 本探索法の原理と構成

2.1 探索法の原理

変数 x および $y(x \in R^n, y \in R^m)$ の未知関数 $z=f(x, y)$, $(z \in R^1)$ のミニマックス点を求める手法の原理に関する重要な性質を定理として述べ、そのあとで原理について述べる。定理の証明は次節で行なう。

《定理1》 関数 $f(x, y)$, $x \in R^n, y \in R^m, x \times y \in \Omega$ に対して (2.1) 式を満す上限関数 $U(x, y)$ および下限関数 $L(x, y)$ を考える。

$$U(x, y) \geq f(x, y) \geq L(x, y), x \times y \in \Omega \quad (2.1)$$

関数 U および L を用いて以下で述べる手順によって求めた点 $P(x^*, y^*)$ が (2.2) 式を満すならば点 P は関数 $f(x, y)$ のミニマックス点であり、 f^* はミニマックス値である。

$$U(x^*, y^*) = L(x^*, y^*) = f^* \quad (2.2)$$

手順1) $U(x, y)$ を y について $\max$ となる関数 $\Phi(x) = \max_y U(x, y)$ とその軌跡 $y = \Psi(x)$ を求める。

2) 軌跡 $y = \Psi(x)$ に沿って $L(x, y)$ を x について $\min$ にする点 $P(x^*, y^*)$ と P 点の f の関数値 f^* を求める。

《定理2》 定理1で述べた手順に従って求めた点 P が (2.2) 式の代わりに (2.3) 式を満すするならば点 P は関数 $f(x, y)$ の近似的なミニマックス点であり、誤差の距離は下に述べる距離 D よりも小さい。また値 f^* はミニマックス値の近似値を与え、その誤差は $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \cdot f^*$ よりで小さい。 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ は微小な正定数とする。

$$\left. \begin{aligned} f^* &\geq (1 - \varepsilon_1) \cdot U(x^*, y^*) \\ f^* &\leq (1 + \varepsilon_2) \cdot L(x^*, y^*) \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

関数 $f(x, y)$ を x について $\min$, y について $\max$ をとったときの関数をそれぞれ $\Gamma(y)$, $\Phi(x)$ とする。 $\Gamma(y) = (1 - \varepsilon) f^*$ を満す点 (x, y) の集合の最大ユークリッド距離を d_x , $\Phi(x) = (1 + \varepsilon_2) \cdot f^*$ を満す点 (x, y) の集合の最大距離を d_y とすれば距離 D は $D = \sqrt{d_x^2 + d_y^2}$ で与えられる。

以下ミニマックス探索手法の原理について述べる。

(1) $f(x, y)$ のモデル $\hat{f}(x, y)$ を作り、モデル当てはめの不確かさ $\lambda(x, y)$ を求める。

(2) $\hat{f}$ および λ を用いて (2.1) 式とつぎの条件を満すような上限関数 U と下限関数 L をつくる。任意の x, y に対して $\lambda(x, y) \rightarrow 0$ のとき $U(x, y) \rightarrow f(x, y)$ かつ $L(x, y) \rightarrow f(x, y)$ が成立する。

(3) 関数 U および L を用いて定理で述べた手順で点 P を求める。

(4) 点 P が (2.2) 式あるいは (2.3) 式の条件を満すかどうかを調べ、満さなければその近傍の $f(x, y)$ の値を調べ $\lambda(x, y)$ の値を減少させる。(1)~(3) の手順を繰返す。

2.2 定理の証明

(定理1の証明)

(2.1) 式から (a), (b) 式が成立する。

$$\begin{aligned} \max_y U(x, y) &= U(x, \Psi(x)) \geq \max_{y'} f(x, y') \\ &\geq \max_{y''} L(x, y'') \geq L(x, \Psi(x)) \end{aligned} \quad (a)$$

$$\begin{aligned} \min_{x'} U(x', \Psi(x')) &\geq \min_x \{ \max_{y'} f(x, y') \} \\ &\geq \min_{x''} \{ L(x'', \Psi(x'')) \} = L(x^*, y^*) \end{aligned} \quad (b)$$

しかるに $U(x^*, y^*) \geq \min_{x'} U(x', \Psi(x'))$ であるから

$$U(x^*, y^*) \geq \min_x \max_y f(x, y) \geq L(x^*, y^*) \quad (c)$$

したがって (2.2) 式を満すような点 P の関数値 f^* は関数 $f(x, y)$ のミニマックス値に等しい。ミニマックス値と同じ値をとる点はミニマックス点以外に沢山あるが、点 $P(x^*, y^*)$ を決める手順からミニマックス点に限定される。点 P がミニマックス点でないとすると矛盾が起こることを示す。ミニマックス点を $P'(x', y')$ とすると $x' \neq x^*$ か $y' \neq y^*$ のいずれか一方または両方が成立する。 $y' \neq y^*$ のとき $f(x^*, y) > f(x^*, y^*)$ を満す点 (x^*, y) が存在する。しかるに $f(x^*, y^*) = U(x^*, y^*)$ であるから $U(x^*, y) \geq f(x^*, y) > U(x^*, y^*)$ となり手順1)に反する。 $x' \neq x^*$ のとき $f(x, y^*) < f(x^*, y^*)$ を満す点 (x, y^*) が存在する。

また $f(x^*, y^*) = L(x^*, y^*)$ であるから $L(x, y^*) \leq f(x, y^*) < L(x^*, y^*)$ となり手順 2) に反する。QED (定理 2 の証明)

ミニマックス点を $P'(x', y')$ とすると (2.1) 式から (d) 式が成立する。しかるに (2.3) 式の上式から $(1+\varepsilon_1)f^* \geq U(x^*, y^*)$ であるから (e) 式が成立する。

$$f(x', y') \leq \min_x \max_y U(x, y) \leq U(x^*, y^*) \quad (d)$$

$$(1+\varepsilon_1)f^* \geq f(x', y') \quad (e)$$

同様にして (2.3) の下式を用いて (f) 式が導かれる。

$$(1-\varepsilon_2)f^* \leq f(x', y') \quad (f)$$

(e), (f) 式より $|f^* - f(x', y')| \leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)f^*$ が成立する。

x, y がスカラの場合点 P, P' の存在する領域は点 P を決定する手順から Fig. 1 に示されるように曲線 $y = \Phi(x)$ と等高線 $f(x, y) = (1+\varepsilon_2)f^*$ との交点 B, B' にはさまれ、かつ曲線 $x = \Gamma(y)$ と等高線 $f(x, y) = (1-\varepsilon_1)f^*$ との交点 A, A' にはさまれる領域すなわち図の斜線を施した部分であって、点を施した領域に存在しないことがわかる。ここで距離 D は斜線部 (短形) の対角線の長さを示す。 x, y が多次元の場合も同様で、点 P, P' の存在する領域は曲面 $y = \Phi(x)$ と等高面 $f(x, y) = (1+\varepsilon_2)f^*$ が交わる曲面にはさまれ、かつ $x = \Gamma(y)$ と等高面 $f(x, y) = (1-\varepsilon_1)f^*$ が交わる曲面によってはさまれる領域である。またこの領域の最大直径が D であることから定理が成立する。QED

2.3 本探索法の構成

2.1 節で述べた原理に従ってミニマックス点を求めるためには (2.1) 式を満たしかつ探索回数を増加してゆくことによって (2.3) 式を満たすような上限関数 U および下限関数 L をつくることである。ここでは $x \times y$ の全領域 Ω を r 個の部分領域に分割し、各部分領域で上限関数および下限関数を作る。分割領域 σ_i の未知関数 $f_i(x, y)$ に関数の当てはめを行ない。当てはめの不確かさを $\lambda_i(x, y)$ とし、当てはめ関数を $\hat{f}_i(x, y)$ とする。関数 λ_i と $\hat{f}_i$ を用いて (2.4) ~ (2.7) 式を満たすような関数 u_i および l_i を作り、これらをつなぎ合わせて上限関数 U および下限関数を作る。(関数 U, L は区分的連続関数となる。)

$$u_i(\lambda_i(x, y), \hat{f}_i(x, y)) \geq f_i(x, y) \quad (2.4)$$

$$\geq l_i(\lambda_i(x, y), \hat{f}_i(x, y)) \quad (2.4)$$

$$\partial u_i / \partial \lambda_i > 0, \partial l_i / \partial \lambda_i < 0 \quad (x, y \in \sigma_i) \quad (2.5)$$

$$\partial u_i / \partial \hat{f}_i > 0, \partial l_i / \partial \hat{f}_i > 0 \quad (x, y \in \sigma_i) \quad (2.6)$$

$$\|u_i - f_i\| \rightarrow 0, \|l_i - f_i\| \rightarrow 0 \quad \text{if } \lambda_i \rightarrow 0 \quad (2.7)$$

ただしノルム $\|f\|$ は $\int_{\sigma} |f| dx, (x \in \sigma)$ を表わす。

Fig. 1 Approximate min-max point area obtained by the present method

Fig. 2 Flow chart of the present method algorithm

関数 u_i, l_i の具体的な決定方法については4章で詳述する。関数 u_i, l_i が決定されたものとしてミニマックス点探索のアルゴリズムを以下に示し、フローチャートを Fig. 2 に示す。

- i) 変数の部分領域を小さな領域に分割する。
- ii) 分割された領域内の数点で観測を行ない、当てはめ関数 $\hat{f}(x, y)$ を決定する。
- iii) 当てはめ関数に対しその妥当性を検討して当てはめ関数 $\hat{f}$ の不確かさ λ を求める。
- iv) 当てはめ関数とその不確かさから上限関数 $u(x, y)$ および下限関数 $l(x, y)$ を決定する。
- v) 全域の上限関数 $U(x, y)$, 下限関数 $L(x, y)$ か

Fig. 3 Fitted curve and a true curve of $f(x)$

ら不確かさを考慮に入れたミニマックス点を求める。

vi) 上で求めた点の観測を行なう。

vii) 上の観測が停止条件を満たすか否かを検討し、満たせば実行を終了し、満たさない場合は i)~vi) の手順を繰返す。

3. 各部詳細の設計

2章で述べたアルゴリズムに必要な関数、パラメータおよび条件などの具体的な設計法について述べる。

3.1 当てはめ関数 $\hat{f}(x, y)$ の設計

当てはめ関数は未知関数の推定モデルであって、比較的簡単な関数でかつ広範囲な関数形に対してよい近似ができる関数であることが要求される。このような関数として x, y の3次多項式を分割領域に適用し、その領域内の観測データを用いて係数を決定し内挿する。3次多項式は領域を小さく分割すれば不連続な点を除けばいくらかでも正確な近似ができ、かつ代数方程式を解くことにより決定できる便利さがある。また不連続点がミニマックス点となる場合のほかはもとの関数を連続関数におき換えても差支えない。

3.2 不確かさ $\lambda(x, y)$ の設計

当てはめ関数の不確かさは部分領域に3次多項式を当てはめた推定曲面と実際の曲面の違いの程度を示すパラメータで、ここでは以下のように定義する。推定曲面 $\hat{f}(x)$ と実際の曲面 $f(x)$ の値がほぼ一致する確率を p_c とし、 $1-p_c \equiv \lambda$ を当てはめの不確かさと呼ぶことにする。以下簡単のため変数はスカラーとする。推定曲線(点線)と実関数 $f(x)$ (実線)が大幅に異なるのは Fig. 3 に示すように (A) パルス状の鋭峰がある場合と (B) 周期的関数の上にたまたますべての観測点がそのような状態にある場合である。

(A) の場合が起こる確率を観測間隔が等しい場合について求める。いま推定曲線(点線)の1周期を T ,

その内部の観測点の数を n , 観測区間の幅を σ , 鋭峰の有効幅を T/α (α は定数) とすると鋭峰を発見できる確率は (3.1) 式で与えられる。

$$p. f. = \frac{2}{\alpha+2} \cdot n = \frac{2}{\alpha+2} + \frac{2}{\alpha+2} \cdot \frac{T}{\sigma} \quad (3.1)$$

(3.1) 式から鋭峰が1個存在する場合発見確率はほぼ T/σ または n に比例する。(B) の場合が起こる確率は観測数のべき乗にほぼ比例して小さくなるため n が大きいところでは非常に小さくなり、無視することができる。以上の考察をもとにして当てはめ関数の不確かさを与える近似式を求める。

観測間隔が等しくない場合区間 σ における当てはめの確かさ p_c を決める主要因として変数 $q_s = T/\sigma$, $q_n = n$ を考える。 q_s と q_n は一般の場合独立であるから $p_c = p_1(q_s) \cdot p_2(q_n)$ とおく。ここで p_1 と p_2 は (3.2) 式を満たす必要がある。

$$\frac{\partial p_1}{\partial q_s} > 0, p_1(1) = 0, \frac{\partial p_2}{\partial q_n} > 0, p_2(1) = 0 \quad (3.2)$$

これらから p_c を一意的に決定するためには条件が少なすぎて決定できないが, (3.1) 式, (3.2) 式の性質を満たす近似式として (3.3) 式のようにおいてみる。

$$p_c = c_1 (\log q_s)^{c_2} (\log q_n)^{c_3} \quad (3.3)$$

c_1, c_2, c_3 は定数でつぎのようにして決定する。(2.8) 式で $\alpha=16$ すなわち鋭峰が短形状の幅 $T/16$ のパルスと仮定したとき, これを確実に発見できる観測点の数は約8個である。(3.3) 式で $q_s = q_n - 1$ の場合(観測が等間隔とした場合)と(3.1)式で $\alpha=16$ といった場合とほぼ一致する値の1例として $c_1=1.25$, $c_2+c_3=2.0$ が相当する。さらに q_s, q_n の p_c に及ぼす影響の大きさを考えて $c_2=0.9$, $c_3=1.1$ とする。 p_c を (3.4) 式で与えることにして, 40本の曲線を任意に書いて8, 16, 32等分して正解率を求め, 比較した結果(3.4)式による値は十分に小さく, 十分に余裕があることがわかった。したがって1変数の

$$p_c = 1.25 \cdot (\log q_s)^{0.9} \cdot (\log q_n)^{1.1} \quad (3.4)$$

場合の不確かさとして $\lambda=1-p_c$ を用いる。

x が ν 次元ベクトルの場合も同様な考察を行なうことによって不確からしさ λ を決定することができるが, 当てはめる領域を中心とした ν 次元空間における推定曲面の周期(空間的な周期)を V とし, その内部の観測点数を N とすれば, それらは1次元の場合の T, n が ν 次元では球状に拡張されたものと考えて, 球の体積を求める公式(3.5)を逆変換することによって1次元空間の関係に帰着できる。

$$W = \left(\frac{D}{2}\right)^\nu \cdot c_\nu, \quad c_\nu = \pi^{\nu/2} / \Gamma\left(\frac{\nu}{2} + 1\right) \quad (3.5)$$

上式で D は ν 次元の球の直径, W は体積を表わす.

x, y の次元数をそれぞれ n, m とし $\nu = n + m$ において, ν 次元空間の当てはめる領域の体積を V_0 , 観測データの数を N_0 , 推定曲面の周期を V , 観測データ数を N とすると1次元空間に逆変換した関係は (3.6) 式ようになる. これより (3.4) 式を用いて p_c を求める.

$$q_s = (V/V_0)^{1/\nu}, \quad q_n = (N/N_0)^{1/\nu} \quad (3.6)$$

3.3 上限関数 u_i および下限関数 l_i の設計

汎関数 $u_i(f_i(x, y), \lambda_i(x, y))$ および $l_i(f_i(x, y), \lambda_i(x, y))$ は (2.4) ~ (2.7) 式を満す必要があるが, 任意のすべての未知関数に対してこれらの条件を満す u_i, l_i は作れない. ここでは $f_i(x, y)$ が前節で述べたパルスの有効幅が $T/16$ よりも小さい鋭峰をもたない関数であると仮定する. 実際の関数では鋭峰も裾をひくので有効幅が $T/16$ よりも小さい鋭峰も発見でき, 一般の関数に対して上の仮定は十分余裕をもって成立する. このような関数族に対して (2.4) ~ (2.7) 式を満すような関数 u_i, l_i を作る. u_i, l_i は f_i および λ_i に対して極端な非線形は望ましくない. このような関数として最も簡単な関数形を選び (3.7) 式, (3.8) 式を採用する.

$$u_i(f_i, \lambda_i) = f_i + \lambda_i \cdot c' \quad (3.7)$$

$$l_i(f_i, \lambda_i) = f_i - \lambda_i \cdot c'' \quad (3.8)$$

c', c'' は十分大きな正定数とする.

3.4 観測領域と観測点の決定

次回に観測すべき領域を選定することは観測回数を減らす上で重要な問題である. 定理1の手順によって求められる点 $P(x^*, y^*)$ は P 点を含む領域の当てはめ関数の不確かさが大きいからあるいは P 点が真のミニマックス点に近いからのいずれかの理由によって選ばれた点である. 次回に観測すべき領域としてこの領域を選ぶ妥当性を以下に述べる.

未知関数 $f(x, y)$ の真のミニマックス点を知るための必要十分条件はその近傍の関数形を十分に詳しく知ることとその近傍以外には真のミニマックス点となる点が存在しないことを知ることである. 点 $P(x^*, y^*)$ は不確かさも考慮に入れたときミニマックス点となる可能性が最も大きな点である. いまミニマックス点の候補となる領域が有限個であり, 不確かさも考慮に入れてミニマックス点となる可能性の大きい順に領域をつぎつぎと調べていくときに r 番目の領域に真のミニマックス点が観測されたとすれば $(r+1)$ 番目以降の領域は真のミニマックス点を有しない領域であって検討は不要である. したがって観測回数をできるだけ減らすためには可能性の最も大きな領域から検討すべき

であることがわかる.

つぎに観測点の選び方であるが, これは領域の分割法にも依存するがつぎの事項を考慮に入れて決定すべきであろう.

i) すでに観測された情報と重複せず, 新しい観測点1個当りの情報量が大きい.

ii) 当てはめ関数のパラメータ決定に有効である.

iii) プログラムが複雑にならない.

以上のことを考慮して, x, y がともにスカラーの場合の1例を Fig. 4 に示す.

3.5 停止条件の設計

(2.2) 式を満すような点 P を見出すためには観測回数を無限に多くする必要があり実用的でない. したがって実用的な見地から (2.3) 式を用いる. すなわち (2.3) 式を満すような点 P が求められたときこの点を近似的なミニマックス点とみなしプログラムの実行を終了する.

4. 数値計算例

前章までに述べたアルゴリズムならびに設計法を用いて未知関数のミニマックス点探索を計算機 (東大大型センタ) でシミュレーションした結果を以下に示す. テスト関数として (4.1) ~ (4.4) 式に示される関数を用いた. 比較のため実際にはこれらのテスト関数を Table 1 の数値と (4.5) 式を用いて規準化したものを用いた.

$$t(x, y) = 25 \exp \{ (x-0.6)^2 - (y-0.4)^2 \} \quad (4.1)$$

$$t(x, y) = 10 - 50(y-0.2)(y-0.55)(y-0.9) + 0.1(x-y)^2 + 50x(x-0.05) \times (x-0.3)(x-0.6)(x-1.1) \quad (4.2)$$

$$t(x, y) = 27 \exp \{ -5(x-0.26)^2 - 6(y-0.24)^2 \} + 24 \exp \{ -7(x-0.74)^2 - 4(y-0.75)^2 \} - 25 \exp \{ -6(x-0.75)^2 - 5(y-0.74)^2 \} - 26 \exp \{ -20(x-0.75)^2 - 7(y-0.75)^2 \} \quad (4.3)$$

Fig. 4 Method to divide region and decide new observing points

Table 1 Parameters for normalization

model	(4.1)	(4.2)	(4.3)	(4.4)
$t_{\min}$	17.4419	6.6452	-19.1192	0.0701
$t_{\max}$	35.7903	11.6908	20.2076	19.3214

Fig. 5

Table 2 True min-max points and the min-max points obtained by the present method

model		(4.1)	(4.2)	(4.3)	(4.4)
true	x	0.600	0.927	0.538	0.001
	y	0.400	0.768	0.286	0.251
	z	8.2384	10.7413	11.0887	3.9515
the present method	x	0.6020	0.926	0.5380	0.000
	y	0.3980	0.7671	0.2868	0.2537
	z	8.2385	10.7412	11.0866	3.9046
error (%)	x	0.20	-0.10	0.00	-0.10
	y	-0.20	-0.09	0.08	0.27
	z	0.0003	-0.001	0.0003	-0.024

Table 3 Numbers of observations

model	(4.1)	(4.2)	(4.3)	(4.4)
the present method	125	91	113	114
indirect method	225	248	189	163

$$\begin{aligned}
 t(x, y) = & 18 \exp \{-15(x-0.5)^2 \\
 & -20(y-0.7)^2\} \\
 & + 19 \exp \{-22(x-0.27)^2 \\
 & -20(y-0.25)^2\} \\
 & + 17 \exp \{-20(x-0.75)^2 \\
 & -16(y-0.3)^2\} \quad (4.4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(x, y) = & 20 \{t(x, y) - t_{\min}\} \\
 & / \{t_{\max} - t_{\min}\} \quad (4.5)
 \end{aligned}$$

Fig. 5 (a)~Fig. 5 (b) は上に与えられたテスト関数の等高線図で数字の大きいほど関数値は大きい。図中のプラス印は鞍点を、丸印で囲んだものはミニマックス点を示す。Table 2 は本探索法で求めたミニマックス点の座標と関数値ならびに真のミニマックス点の座標と関数値を示す。Table 3 の上段は本探索法でミニマックス点を求めるまでに要した観測回数を表す。

本数値実験のためのプログラムを設計するにさいして許容誤差 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ はともに 0.01 とし、上限および下限関数の c', c'' はともに未知関数の最大値と最小値の偏差を用いた。この値はテスト結果を標準化する意味で用いたもので適当に大きな値を採用するかあるいは最初大きな値を仮定し、探索途中で適当な値に修正するなどの方法を用いればよい。この値は多少大きくても観測回数に著しい影響はない。

5. 考 察

本論文では局所的なミニマックス点すなわち鞍点を複数個もつような未知関数の大域的ミニマックス点探索法について述べた。探索過程に大域的探索過程と局所的探索過程を同時に必要とする探索法は関数の当てはめと当てはめた関数の不確かさを導入する方法により解決されることを示した。

序論でも述べたように未知関数 $z = f(x, y)$ のミニマックス点を探索する方法についての研究はまだ報告されていないようである。従ってここでは最大値探索問題に変換する方法(以後これを間接法と呼ぶ)と比較を行なう。間接法ではまず $w(x) = f(x, Y(x)) = \max_y f(x, y)$, $y = Y(x)$ を求め、つぎに $f^* = w(x^*) = \min_x w(x)$, $y^* = Y(x^*)$

Fig. 6 x - y curves when $\max f(x, y)$ is obtained and the curve when the min-max point is obtained by the present method for the test function (4.4)

を求める。Fig. 7 に示す点をチェック点として選び、 $\max f(x, y)$ を文献 1) で述べた方法を用いて求めた。Table 3 に間接法による観測回数を示す。Fig. 6 は間接法で求めた $y=Y(x)$ 、本論文のミニマックス点探索終了時の $y=\Psi(x)$ 、 $\max_x f(x, y)$ の正しい軌跡をテスト関数が (4.4) 式の場合について示す。本方法に比べて間接法は約 2 倍の観測回数を要している。これは Fig. 6 にみられるように間接法では軌跡 $y=Y(x)$ がほぼいたるところで正しい軌跡に一致しているのに反し、本方法による軌跡 $y=\Psi(x)$ はミニマックス点の近傍を除いたところで正しい軌跡からそれている。これは本方法が不必要と思われる個所の観測を省いていることに因るものである。さらに x 軸、 y 軸をそれぞれ等間隔のメッシュで切って各格子点を観測することによってミニマックス点を得ようとする和最

Fig. 7 Check points in each region

も条件の緩いテスト関数 (4.1) 式の場合で関数値が相対誤差 0.1% のミニマックス点を得るためには約 340 回必要であり、本実験結果と同精度のミニマックス点を得るためには約 110,000 回の観測が必要である。

上のことから本探索法は効率的であると判断できる。Table 2 から結果も相対誤差が 0.3% 以内で精度もよく十分実用的な方法であると思われる。

6. 結 言

未知関数のミニマックス点探索に関する研究はみあたらない。また直接この問題に適用できる有効な手法もみ当たらない。本研究はこの問題に対する解法を与えた。また本手法は有効で十分実用的であることを数値実験により実証した。

おわりに本研究を進める上でご協力頂いた研究室の院生諸氏に感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) 久保田・北森：多次元多峰性未知関数の最大値探索法，計測自動制御学会論文集投稿中
- 2) 戸田，中原：ゲーム理論と行動理論，共立 (1968)
- 3) 坂口：数理計画法，培風館 (1968)
- 4) 北川編：ゲーム理論，日科技連数学計画 シンポジウム (1963)