むだ時間を含む線形システムの安定化[†]

前 田 浩 一*・山 田 一**

On the Stabilizability of Linear Systems with Delays

Hirokazu MAYEDA* and Hajime YAMADA**

This paper investigates the problem of designing a feedback compensator to stabilize a linear system with delays.

The compensator is constructed by delay elements, and a sufficient condition for the linear system with delays to be stabilized by this compensator is obtained in the terms of the system parameters. The rate with which the state of the system decreases to zero using this compensator is also discussed.

The sufficient condition and the compensator design method are both suitable for practical use.

These results are obtained by a kind of generalization of a canonical form for ordinary differential systems.

1. ま え が き

制御工学において、与えられた制御対象にフィードバックをほどこして全体のシステムを安定化し、さらにその減衰特性を任意に変えうるかという問題は理論的に非常に興味ある問題であり、制御系を設計するうえにおいて実用的な手段が要求される問題でもある。通常の常微分方程式系で表わされる系に対してはこの問題はすでに解かれており、状態フィードバックにより減衰特性を任意に指定できるための必要十分条件は制御対象が可制御であるという興味ある結果が得られている^{1), 2)}。

むだ時間を含む系については、差分微分方程式系を関数微分方程式とみなすことにより常微分方程式系の場合に帰着できることが示されている³⁾。しかし、この方法を適用するためには超越方程式を解くことが要

求されるため実用的でない。また制御対象のパラメータで表現された条件も求められてはいるが、安定化条件としては十分なものではない^{4), 5)}。

本稿ではむだ時間を含む線形システムについて、むだ時間要素で構成される補償器を考えることにより、制御対象を表わす差分微分方程式系の係数行列で表わされた安定化可能であるための十分条件および補償器の構成方法を与える。この条件および構成方法は超越方程式を解く必要がないため、扱いやすく実用的である。さらに、本稿で用いたむだ時間要素で構成されるフィードバック補償器は差分微分方程式に対する拡張された座標変換とみなすことができる。すなわち、この方法はこれまで常微分方程式系に対して考えられていたある種の正準形の差分微分方程式系への拡張であると考えられる。

2. 安定化問題

本稿において安定化を考察するむだ時間を含む線形システムは、つぎのような線形差分微分方程式系で記述されるものとする。

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-h) + cu(t) \quad (1)$$

ここで、 $x(t)$ は n 次元内部変数、 $u(t)$ はスカラー入力、 A, B, C はそれぞれ $n \times n$, $n \times n$, $n \times 1$ 実行列、 h はむだ時間を表わす正の定数である。このシステムを安定化するために、任意の時刻 t において $x(t)$ が観測できるものとして、つぎのようなむだ時間要素で構成されるフィードバック補償器を加える。

$$y(t+h) = Dy(t) + Ex(t)$$

$$v(t) = \sum_{k=0}^n f_k \{Fy(t-kh) + Gx(t-kh)\} \quad (2)$$

ここで、 $y(t)$ は m 次元内部変数、 $v(t)$ はスカラー出力、 D, E, F, G, f_k はそれぞれ $m \times m$, $m \times n$, $n \times m$, $n \times n$, $1 \times n$ 実行列である。以下においては、(1)式で表わされるシステムを制御対象、(2)式で表わされるシステムを補償器、 $u(t) = v(t)$ としたとき(1)、(2)式からなる連立方程式で表わされるシステムを閉

[†] 電子通信学会回路とシステム理論研究会で発表 (昭 48・12)

* 大阪大学基礎工学部 豊中市待兼山町 1-1

** 川崎重工業(株) 明石市川崎町 1-1

* Faculty of Engineering Science, Osaka University, Toyonaka

** Kawasaki Heavy Industries, Ltd., Akashi

(Received May 30, 1974)

ループシステムとよぶことにする。

閉ループシステムに対して初期値および初期関数をつぎのように定める。

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ x(t) &= \varphi_1(t) & -nh \leq t \leq 0 \\ y(t) &= \varphi_2(t) & -nh \leq t \leq h \end{aligned} \quad (3)$$

ただし、 $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ はそれぞれ各閉区間 $[-kh, -(k-1)h]$ ($k=1, 2, \dots, n$), ($k=0, 1, \dots, n$) で連続微分可能な関数であり、 $\varphi_1(0)=x_0$ とする(注1)。このように初期値、初期関数を定めれば、閉ループシステムの解が一意に存在することは容易に証明できる。

つぎに制御対象について安定化可能の定義をする。

【定義】 制御対象が安定化可能であるとは、ある正の実数 λ が存在し、任意の初期値、初期関数に対して閉ループシステムの解が、適当な正の実数 M について $t \geq 0$ において

$$\|x(t)\| \leq M e^{-\lambda t}, \quad \|y(t)\| \leq M e^{-\lambda t} \quad (4)$$

を満すような補償器の係数行列 D, E, F, G, f_k が存在することである。ここで $\|\cdot\|$ はユークリッドノルムとする。

また、以下においてシステムが安定であるというときには指数安定を意味するものとする。

本稿では、(1)式は与えられた制御対象が上の意味で安定化可能であるための条件および実際に補償器を構成する方法をしめすとともに、減衰特性を表わす実数 λ をどの程度大きくできるかという問題を考察する。

3. 補償器の構成

本節では制御対象の係数行列が $\text{rank}[c : Ac : \dots : Ac^{n-1}] = n$ を満足していると仮定して、補償器の構成方法を与える。このようにして構成された補償器により制御対象が安定化されるための条件は第5節で示される。

まず制御対象を表わす(1)式についての特性関数 $\det[sI - A - Be^{-sh}]$ を形式的に s と e^{sh} の2変数関数とみなし、 $z = e^{sh}$ とおいて

$$P(s, z) = \det[sI - A - Bz^{-1}] \quad (5)$$

と表わす。この s と z の2変数関数を用いて、補償器を構成する手順を与える。(5)式の右辺を展開して

$$P(s, z) = s^n + q_1(z^{-1})s^{n-1} + \dots + q_n(z^{-1}) \quad (6)$$

を得る。ここで、 $q_i(z^{-1})$ ($i=1, 2, \dots, n$) は z^{-1} についてたかだか i 次の多項式であり、

$$q_i(z^{-1}) = r_{n-i} z^{-i} + r_{n-i-1} z^{-(i-1)} + \dots + r_{n-i} z^0$$

(注1) 以後、初期関数はすべてこの条件を満足しているものとする。

$$(i=1, 2, \dots, n) \quad (7)$$

とする。つぎに(7)式で表わされる多項式を用いて、 z の有理関数を要素とする $n \times n$ 行列 $T(z)$ を

$$T(z) = \begin{bmatrix} q_{n-1}(z^{-1}) & \dots & q_1(z^{-1}) & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ q_1(z^{-1}) & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} c \\ (A+Bz^{-1})c \\ \vdots \\ (A+Bz^{-1})^{n-1}c \end{bmatrix} \quad (8)$$

となる。ただし、係数行列 A, c に対するはじめの仮定より $[c : (A+Bz^{-1})c : \dots : (A+Bz^{-1})^{n-1}c]$ の逆行列の存在は容易にわかる。さらに、ある正の実数 a を定め、

$$(s+a)^n = s^n + c_{n-1}s^{n-1} + \dots + c_0 \quad (9)$$

となるように c_k ($k=0, 1, \dots, n-1$) を決める。この a は閉ループシステムの減衰特性に影響を与えるパラメータであり、減衰特性との関係は第5節定理2で明らかにする。

このようにして決めた実数 r_i, c_k および z の有理関数を要素とする $n \times n$ 行列 $T(z)$ を用いて、補償器の係数行列をつぎの式を満すように決める。

$$f_0 = (r_0^0 - c_0, \dots, r_{n-1}^0 - c_{n-1}),$$

$$f_k = (r_0^k, \dots, r_{n-k}^k, 0, \dots, 0) \quad (k=1, \dots, n) \quad (10)$$

$$F(Iz - D)^{-1}E + G = T(z) \quad (11)$$

(11)式を満す D, E, F, G を求める問題は、与えられた伝達関数行列と等価な状態方程式を求める実現問題と同じであり、 $T(z)$ の各要素の分子の次数が分母の次数以下であれば、線形システム理論でよく知られた手順で、(10)式を満足しその内部変数の m 次元が最小であるような係数行列 D, E, F, G を決定することができる⁶⁾。したがって本稿ではこの手順をそのまま適用することにする。また $T(z)$ の各要素の分子の次数が分母の次数以下であることは

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} T(z) = \begin{bmatrix} * & \dots & * & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & \dots & 0 \\ 1 & & & \end{bmatrix} \times [c : Ac : \dots : A^{n-1}c]^{-1} \quad (12)$$

(*は適当な実数)

より明らかである(注2)。

制御対象の係数行列を用いて安定化するための補償器の係数行列を与えたが、この構成方法はつぎのように解釈できる。

制御対象を表わす(1)式を Laplace 変換し、 $z = e^{sh}$

(注2) この命題の証明の簡単化について査読委員のご指摘に感謝する。

とおくことにより形式的に独立変数とみなすとつぎのようになる。

$$sX(s) = (A + Bz^{-1})X(s) + cU(s) + X_0(s) \quad (13)$$

ただし、 $X(s), U(s)$ はそれぞれ $x(t), u(t)$ の Laplace 変換であり

$$X_0(s) = x_0 + B \int_0^h e^{-st} \varphi_1(t-h) dt \quad (14)$$

である。ここで $X(s)$ を形式的に $T(z)$ で変換すると $(A + Bz^{-1})$, c はそれぞれつぎのように変換される。

$$T(z)(A + Bz^{-1})T^{-1}(z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -q_n(z^{-1}), \cdots, -q_1(z^{-1}) \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$T(z)c = [0, \cdots, 0, 1]^t$$

ただし t は転置を示すものとする。 $\hat{X}(s) = T(z)X(s)$ とすると $\hat{X}(s)$ についてつぎの式が成立する。

$$s\hat{X}(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -q_n(z^{-1}), \cdots, -q_1(z^{-1}) \end{bmatrix} \hat{X}(s) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} U(s) + \hat{X}_0(s) \quad (16)$$

ただし、 $\hat{X}_0(s) = T(z)X_0(s)$ である。(16)式において

入力の Laplace 変換を $U(s) = \sum_{k=0}^n f_k z^{-k} \hat{X}(s)$ と定め、

$\hat{X}(s)$ について解くとつぎのようになる。

$$\hat{X}(s) = \left\{ sI - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -c_0, \cdots, \cdots, -c_{n-1} \end{bmatrix} \right\}^{-1} \hat{X}_0(s) \quad (17)$$

(17)式は $c_k (k=0, 1, \cdots, n-1)$ の定義によりすでに安定化されており、このときの入力をもとの制御対象に

ついで表現にもどすと $U(s) = \sum_{k=0}^n f_k z^{-k} T(z)X(s)$ と

なる。(2)式で表わされた補償方式はこのフィードバ

ック入力を実現したものであり、座標変換 $T(z)$ のもとの差分微分方程式系をある種の正準形にしたうえで、変換後のシステムを安定化するフィードバック係数行列を決めたものと考えられる。このように、本稿で考察している補償方式は常微分方程式系で記述されるシステムの解析に有効であった座標変換の差分微分方程式系への拡張である。

しかし、安定性については座標変換 $T(z)$ 自身が不安定な場合があるため、形式的に座標変換して得られるシステムの安定性と閉ループシステムの安定性とは必ずしも一致しないという問題点がある。

4. 閉ループシステムの安定性

本節では安定化可能であるための条件を求める準備として閉ループシステムの安定性について考察する。

(1)式で表わされるシステムについては、その特性方程式 $\det[sI - A - Be^{-sh} - \sum_{k=0}^n cf_k Ge^{-ksh}] = 0$ の根の実部が負であれば安定であることが知られている⁷⁾。この結果は一般の差分微分方程式系については必ずしも成立しない。特に本稿で考察するような閉ループシステムについては、その特性方程式

$$P_c(s) = \det \left[\begin{array}{c|c} sI - A - Be^{-sh} - \sum_{k=0}^n cf_k Ge^{-ksh} & \\ \hline -E & \end{array} \right] = 0 \quad (18)$$

の根の複素平面における分布が(1)式の場合と異なるため、その安定性と特性方程式の根との関係を別に考える必要がある。

《定理1》 閉ループシステムにおいて、適当な実数 c および正の実数 ε が存在し、その特性方程式 $P_c(s) = 0$ の任意の根 s について

$$Re s \leq c - \varepsilon \quad (19)$$

補償器の係数行列 D の任意の固有値 ν について

$$|\nu| \leq e^{(c-\varepsilon)h} \quad (20)$$

が成立しているならば、ある正の実数 M が存在して、 $t \geq 0$ において

$$\|x(t)\| \leq Me^{ct}, \quad \|y(t)\| \leq Me^{ct} \quad (21)$$

となる。特に $c \leq 0$ のときは閉ループシステムは安定である。ここで $Re s$ は s の実部を表わすものとする。

5. 安定化定理

第3節において補償器の構成方法を与え、前節では

閉ループシステムが安定であるための条件を求めた。本節ではこれらの結果に基づいて、制御対象が安定化可能であるための条件を求め、そのときの減衰特性について考察する。

《定理 2》 制御対象がつぎの条件を満たすならば、第 3 節で構成した補償器により安定化可能である。

$$(i) \quad \text{rank} [c : Ac : \dots : A^{n-1}c] = n \quad (22)$$

$$(ii) \quad \det [c : (Az+B)c : \dots : (Az+B)^{n-1}c] = 0 \quad (23)$$

の根の絶対値が 1 より小さい。

さらに、(23)式の根の中でその絶対値が最大のものを μ とすると、 $\mu \neq 0$ のときは $0 < \lambda < -1/h \log |\mu|$ なる任意の λ について、 $\mu = 0$ のときは任意の λ について、(9)式における a を $a > \lambda$ と選ぶことにより

$$\|x(t)\| \leq Me^{-\lambda t}, \quad \|y(t)\| \leq Me^{-\lambda t} \quad (24)$$

とできる。

(証明) (i)の条件より第 3 節で述べた方法で補償器が構成できるから、この補償器による閉ループシステムが(ii)の条件により定理 1 において $c \leq 0$ としたときの仮定を満足することを示せばよい。

まず D の固有値については、 $T(z)$ の最小実現であることにより、 D の固有値は $T(z)$ の各要素の z についての極と一致し、(8)式で与えられる $T(z)$ は $T_1(z)$, $T_2(z)$ を

$$\begin{aligned} T_1(z) &= \begin{bmatrix} q_{n-1}(z^{-1})z^{n-1} & \dots & q_1(z^{-1})z^{n-1} & z^{n-1} & -1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_1(z^{-1})z^{n-1} & & & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} z^{n-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z^{n-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & z^{n-1} \end{bmatrix} \\ T_2(z) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & z^{n-1} \end{bmatrix} \\ &\times [c : (Az+B)c : \dots : (Az+B)^{n-1}c]^{-1} \end{aligned} \quad (25)$$

とおくと、 $T(z) = T_1(z)T_2(z)$ となるから、 $T(z)$ の極は(23)式の根かあるいは $z=0$ の点である。よって(23)式の根の中でその絶対値が最大のものを μ とすると、 D の任意の固有値 ν に対して

$$|\nu| \leq |\mu| = e^{(1/h \log |\mu|)h} \quad (27)$$

が成立する。つぎに閉ループシステムの特性格方程式

$P_c(s) = 0$ の根については、行列についてのよく知られた定理³⁾より

$$\begin{aligned} p_c(s) &= \det [Ie^{sh} - D] \cdot \det \left[sI - A - Be^{-sh} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=0}^n cf_k \{G + F(Ie^{sh} - D)^{-1}E\} e^{-ksh} \right] = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

となるから、つぎの二つの方程式

$$\det [Ie^{sh} - D] = 0 \quad (29)$$

$$\det \left[sI - B - Be^{-sh} \right. \\ \left. - \sum_{k=0}^n cf_k \{G + F(Ie^{sh} - D)^{-1}E\} e^{-ksh} \right] = 0 \quad (30)$$

の根を調べれば十分である。(29)式の任意の根 s については、 D の固有値のうちで絶対値が最大のものを $\nu_{\max}$ とおくと、 $Re s \leq 1/h \log |\nu_{\max}|$ なり(27)式より

$$Re s \leq \frac{1}{h} \log |\mu| \quad (31)$$

となる。また(30)式について(15)式を代入すると

$$\begin{aligned} \det \left[T^{-1}(e^{sh}) \left\{ sI - \begin{bmatrix} 0 & 1 & p & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ -c_0 & \dots & \dots & -c_{n-1} \end{bmatrix} \right\} T(s^{sh}) \right] \\ = (s+a)^n = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

となるから(30)式の根は

$$s = -a < 0 \quad (33)$$

となる。そこで、(27), (31), (33)式より、(ii)の条件のもとで閉ループシステムは定理 1 の安定のための条件を満足しており、定理 1 において $c = -\lambda$ と考えれば定理 2 の後半も明らかである。(証明終)

定理 2 において条件(i), (ii)はいずれも制御対象の係数行列で表わされており、超越方程式を解くことなく判別できるのは実用的である。さらに条件(i)が成立しているときの条件(ii)の判別は、(23)式の z の代数方程式のすべての根の絶対値が 1 より小さいことが、複素平面において左半平面を単位円にうつす写像 $z = (s+1)/(s-1)$ を(23)式に代入し両辺に $(s-1)^{n(n-1)/2}$ をかけてえられる s の代数方程式

$$\begin{aligned} \det [c : \{(A+B)s + (A-B)\}c : \dots : \\ \times \{(A+B)s + (A-B)\}^{n-1}c] = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

のすべての根の実部が負であることと同じであるから(注 3)(34)式に Routh-Hurwitz の安定判別法を用い

(注 3) 条件(i)より(34)式が $s=1$ を根としてもつことはないから(23)式に $z = (s+1)/(s-1)$ を代入した式の解と(34)式の根は一致する。

ることにより(23)式の代数方程式を解くことなしに判別できる。また、閉ループシステムの減衰特性を特に指定する必要のないときは(23)式の根の値は補償器の構成には必要ないので、上の方法で条件(ii)が成立することを確かめておくだけでよい。

また、条件(ii)は補償器が単独で安定であることをしめしている。

制御対象の係数行列 A, c について条件(i)が成立しているとき、適当に座標変換を行なうとつぎのようにできる。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ * & \cdots & * & \cdots & * \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (35)$$

(*は適当な実数)

このとき制御対象の係数行列が特別な形をしておればつぎの結果が成立する。

【系】 制御対象の係数行列 A, c を(35)式のように座標変換したとき

$$B = \begin{bmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * & \cdots & * \end{bmatrix} \quad (36)$$

(*は適当な実数)

であれば、任意の実数 λ について

$$\|x(t)\| \leq Me^{-\lambda t}, \quad \|y(t)\| \leq Me^{-\lambda t} \quad (37)$$

となるように補償器を構成できる。

(証明) 定理2を用いる。条件(i)については明らかであるから条件(ii)について考える。(23)式を計算すると

$$\det[c : (Az+B)c : \cdots : (Az+B)^{n-1}c] = (-z)^{1/2n(n-1)} = 0 \quad (38)$$

で与えられる。これより $\mu=0$ であるから、任意に与えた λ に対して(9)式で $a>\lambda$ とすればよい。(証明終)

つぎに、与えられた制御対象が定理2により安定化可能でない場合について、制御対象に簡単な変換をほどこすことにより定理2を満すようにできないかという問題について考察する。ここではそのような変換として実行列による座標変換およびフィードバック $u(t) = g_1x(t) + g_2x(t-h)$ を考える。ただし g_1, g_2 は $1 \times n$ 実行列とする。

《定理3》 定理2の条件(i), (ii)は実行列による座標変換およびフィードバック $u(t) = g_1x(t) + g_2x(t-h)$ による変換に対して不変である。

(証明) A を $A+cg_1$, B を $B+cg_2$ に変えたときに(23)式が不変であることをしめせば十分である。

さらに、 $c=[0, \dots, 0, 1]^t$ としてで一般性を失わない。 $A=(a_{ij}), B=(b_{ij}), P=[c : (Az+B)c : \cdots : (Az+B)^{n-1}c] = (p_{ij})$ とすると

$$p_{ij} = \begin{cases} \delta_{i,n} & j=1 \\ \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} p_{k,j-1} & j \geq 2 \end{cases} \quad (39)$$

である。ただし、 $\delta_{i,n}$ は Kronecker のデルタであり、 $\alpha_{ij} = a_{ij}z + b_{ij}$ とする。 $j \geq 3$ の場合には

$$p_{ij} = \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^n \cdots \sum_{k_{j-2}=1}^n \alpha_{i,k_1} \alpha_{k_1,k_2} \cdots \alpha_{k_{j-2},n} \quad (40)$$

で与えられる。つぎに z の多項式を要素とする $n \times n$ 行列 $\tilde{P} = (\tilde{p}_{ij})$ を

$$\tilde{p}_{ij} = \begin{cases} p_{ij} & j=1, 2 \\ \sum_{k_1=1}^{n-1} \sum_{k_2=1}^{n-1} \cdots \sum_{k_{j-2}=1}^{n-1} \alpha_{i,k_1} \alpha_{k_1,k_2} \cdots \alpha_{k_{j-2},n} & j \geq 3 \end{cases} \quad (41)$$

と定義すると、 $\det \tilde{P}$ はその構成より明らかなように $A \rightarrow A+cg_1, B \rightarrow B+cg_2$ なる変換に対して不変である。ところが行列 P の j 列について

$$\begin{bmatrix} p_{1j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{p}_{1j} \\ \vdots \\ \tilde{p}_{nj} \end{bmatrix} + p_{n,2} \begin{bmatrix} \tilde{p}_{1,j-1} \\ \vdots \\ \tilde{p}_{n,j-1} \end{bmatrix} + \cdots + p_{n,j-2} \begin{bmatrix} \tilde{p}_{1,2} \\ \vdots \\ \tilde{p}_{n,2} \end{bmatrix} \quad j \geq 3 \quad (42)$$

が成立する。よって $\det p = \det \tilde{p}$ が成立する。このことにより $\det P$ は不変であることがわかる。

(証明終)

定理3により、座標変換およびフィードバックという簡単な変換によって制御対象を定理2の条件(i), (ii)を満すように変換することが不可能であることがわかる。

これまでスカラー入力の場合についてのみ安定化定理を考察してきたが、多入力の場合には $\text{rank}[C : AC : \cdots : A^{n-1}C] = n$ であれば適当な行列 H を用いて $Hx(t)$ をフィードバックすることにより c の任意の縦ベクトル c' を用いて $\text{rank}[c' : (A+CH)c' : \cdots : (A+CH)^{n-1}c'] = n$ できる⁹⁾。このことにより、スカラー入力の場合についての定理2を適用することができる。

最後に例題を与えておく。いま制御対象を

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} e^h & 0 & 0 \\ 0 & e^h & 0 \\ 0 & 0 & e^h \end{bmatrix} x(t-h) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (43)$$

とすると、このシステムは特性方程式が $s=1$ を根と

してもつので不安定であり、定理2の条件(i), (ii)を満足している。とくに(ii)については $\mu=0$ となっている。そこで $P(s, z)$ を計算すると

$$P(s, z) = s^3 - 3e^h z^{-1} s^2 + 3e^{2h} z^{-2} s - e^{3h} z^{-3} \quad (44)$$

となり、これより

$$T(z) = \begin{bmatrix} 3e^{2h} z^{-2} & -3e^h z^{-1} & 1 \\ -3e^h z^{-1} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \\ \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2e^h z^{-1} \\ 1 & e^h z^{-1} & e^{2h} z^{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ e^h z^{-1} & 1 & 0 \\ e^{2h} z^{-2} & 2e^h z^{-1} & 1 \end{bmatrix} \quad (45)$$

となる。ここで $(s+\lambda)^3 = s^3 + 3\lambda s^2 + 3\lambda^2 s + \lambda^3$ より

$$f_0 = (-\lambda^3, -3\lambda^2, -3\lambda) \quad f_1 = (0, 0, -3e^h)$$

$$f_2 = (0, 3e^{2h}, 0) \quad f_3 = (-e^{3h}, 0, 0)$$

(46)

と定め、 $T(z)$ の最小実現である D, E, F, G を

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ e^h & 0 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} e^h & 0 & 0 \\ 0 & 2e^h & 0 \end{bmatrix} \\ F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (47)$$

と定める。このとき(46), (47)式による補償器によって、閉ループシステムの解 $x(t), y(t)$ は $\|x(t)\| \leq Me^{-\lambda t}$, $\|y\| \leq Me^{-\lambda t}$ となる。

6. む す び

むだ時間を含む線形システムについて、その係数行列で安定化可能の条件および補償器の構成方法を与えた。この条件および構成方法はかなり実用的であるが定理2の条件をより扱いやすくなることおよび安定化可能であるための必要十分条件をみつける問題が残されており検討中である。

本稿を用いた差分微分方程式系を Laplace 変換したとき s と e^{sh} を独立変数とみなし、座標変換 $T(z)$ を導入するという考え方は、既約問題に関しては柏原¹⁰⁾によりすでに検討されているが、差分微分方程式系に関する他のいろいろな問題に有効な方法を提供するのではないかと考えられる。

本研究に関して終始御鞭達下さった藤沢俊男教授に感謝する。また有益な助言を頂いた保田豊助教授ならびに柏原敏伸氏に感謝する。

参 考 文 献

- 1) W.M. Wonham: On Pole Assignment in Multi-Input Controllable Linear Systems, IEEE Trans. AC-12-6, 660/665 (1967)

- 2) J.D. Simon and S.K. Mitter: A Theory of Modal Control, Infor. Contr., 13-4, 316/353 (1968)
- 3) Yu, S. Osipov: Stabilization of Controlled Systems with Delays, Diff. Ec., 1-5, 463/475 (1965)
- 4) D.W. Ross: Controller Design for Time Lag Systems via Quadratic Criterion, IEEE Trans. AC-16-6, 664/672 (1971)
- 5) G.J. Nazarov and G.A. Hewer: Stabilization of Linear, Autonomus Differential Delay Systems, IEEE Trans. AC-18-6, 673/674 (1973)
- 6) C.T. Chen: Introduction to Linear System Theory p. 235, Holt, Pinehart and Winston, Inc. (1970)
- 7) R. Bellman and K.L. Cooke: Differential-Difference Equations, p. 189, Academic Press (1963)
- 8) F.R. Gantmacher: The Theory of Matrices, p. 46 Chelsea Pub. Co. (1960)
- 9) 文献 6) p. 278
- 10) 柏原敏伸: むだ時間を含む線形定常システムの簡約について, 電子通信学会回路とシステム理論研究会資料

《付 録》

定理1の完全な証明は非常に長いので、ここではその概略だけをしめておく。

【定理1の略証】 まず本文(1), (2)式で表わされる閉ループシステムをつぎのように表現しておこう。

$$\dot{x}(t) = \sum_{k=0}^n \{A_k x(t-kh) + B_k y(t-kh)\} \quad (A.1)$$

$$y(t+h) = D y(t) + E x(t)$$

つぎに $(n+m) \times (n+m)$ 行列 $H(s)$ を

$$H(s) = \begin{bmatrix} sI - \sum_{k=0}^n A_k e^{-ks} & - \sum_{k=0}^n B_k e^{-ks} \\ -E & Ie^s - D \end{bmatrix} \quad (A.2)$$

と定義すると、閉ループシステムの解 $x(t), y(t)$ の Laplace 変換 $X(s), Y(s)$ は

$$\begin{bmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{bmatrix} = H^{-1}(s) \\ \times \begin{bmatrix} x_0 + \sum_{k=0}^n \int_0^{kh} e^{-st} \{A_k \varphi_1(t-kh) + B_k \varphi_2(t+kh)\} dt \\ \int_{-h}^0 e^{-st} \varphi_2(t+h) dt \end{bmatrix} \quad (A.3)$$

となり、閉ループシステムの特性方程式 $P_c(s)=0$ は

$$P_c(s) = \det H(s) \\ = e^{-n^2 sh} \{p_n(e^{sh})s^n + \dots + p_0(e^{sh})\} = 0 \quad (A.4)$$

となる。ここで $p_i(e^{sh})$ ($i=0, \dots, n$)は e^{sh} についてたかだか (n^2+m) 次の多項式であり、

$$p_n(e^{sh}) = e^{n^2 sh} \det [Ie^s - D] \quad (A.5)$$

である。そこで余因子を用いて $H^{-1}(s)$ の (i, j) 要素 $F_{ij}(s)$ を求めてみるとつぎのようなかたちになる。

(i) $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n+m$ の場合

$$F_{ij}(s) = \frac{e^{-n(n-1)sh} \{q_{n-1}(e^{sh})s^{n-1} + \dots + q_0(e^{sh})\}}{e^{-n^2sh} \{p_n(e^{sh})s^n + \dots + p_0(e^{sh})\}} \quad (\text{A.6})$$

ただし $q_i(e^{sh}) (i=0, 1, \dots, n-1)$ は e^{sh} についてたかだか $(n(n-1)+m)$ 次の多項式である。

(ii) $n+1 \leq i \leq n+m, 1 \leq j \leq n$ の場合

$$F_{ij}(s) = \frac{e^{-n^2sh} \{\tilde{q}_{n-1}(e^{sh})s^{n-1} + \dots + \tilde{q}_0(e^{sh})\}}{e^{-n^2sh} \{p_n(e^{sh})s^n + \dots + p_0(e^{sh})\}} \quad (\text{A.7})$$

ただし $\tilde{q}_i(e^{sh}) (i=0, 1, \dots, n-1)$ は e^{sh} についてたかだか (n^2+m-1) つきの多項式である。

(iii) $n+1 \leq i \leq n+m, n+1 \leq j \leq n+m$ の場合

$$F_{ij}(s) = \frac{e^{-n^2sh} \{r_n(e^{sh})s^n + \dots + r_0(e^{sh})\}}{e^{-n^2sh} \{p_n(e^{sh})s^n + \dots + p_0(e^{sh})\}} \quad (\text{A.8})$$

ただし $r_i(e^{sh}) (i=0, 1, \dots, n)$ は e^{sh} についてたかだか (n^2+m-1) 次の多項式である。

これらの $F_{ij}(s)$ の Laplace 逆変換が存在して、その絶対値が Me^{ct} でおさえられることを証明すればよいのであるが、(i), (ii) の場合は同様の方法で証明できるので (ii) の場合についてのみ方針を述べる。まず

$$F_{ij}(s) = h(s) + \frac{\tilde{q}_{n-1}(e^{sh})}{p_n(e^{sh})(s-c')} \quad (\text{A.9})$$

(c' は $c' < c - \varepsilon$ となるように選ぶ)

となるように $h(s)$ を定義すると、定理の仮定より、適当な正の実数 M が存在して、 $\operatorname{Re} s \geq c$ で

$$|h(s)| < M/|s|^2 \quad (\text{A.10})$$

となることが証明でき、これにより $h(s)$ の Laplace 逆変換 $h(t)$ が存在し、適当な正の実数 M' について $t \geq 0$ で

$$|\dot{h}(t)| < M'e^{ct} \quad (\text{A.11})$$

となることが証明できる。

$\tilde{q}_{n-1}(e^{sh})/p_n(e^{sh})(s-c')$ の Laplace 逆変換 $z(t)$ は $\tilde{q}_{n-1}(e^{sh})/p_n(e^{sh})$ を伝達関数としてめつ差分システムに入力 $e^{c't}$ を与えた場合の出力になると考えられ、定理の仮定より適当な正の実数 M'' が存在して $t \geq 0$ で

$$|z(t)| < M''e^{ct} \quad (\text{A.12})$$

となることが証明できる。(iii) の場合については

$$F_{ij}(s) = \frac{r_n(e^{sh})}{p_n(e^{sh})} + \bar{h}(s) \quad (\text{A.13})$$

となるように $\bar{h}(s)$ を定義すると、 $\bar{h}(s)$ については (ii) の場合に帰着できる。 $r_n(e^{sh})/p_n(e^{sh})$ はこのままでは Laplace 逆変換が存在しないが、初期関数の Laplace 変換との積を考えることによって (A.9) 式の第 2 項目と同様にして証明できる。 (証明終)