リレーによる分散制御を行なった複合系の非振動条件

安 藤 和 昭*・近 藤 文 治*

Non-Oscillating Condition of a Relay Controlled Composite System

Kazuaki ANDO* and Bunji KONDO*

Sufficient conditions for non-oscillating responses of a relay-controlled composite system are studied. We find a typical example in the VQ control of an electric power system, where non-oscillating responses of the controlling switches are desired. The relays considered have dead regions, multi-inputs and the following properties: The space of the input variables to the relay is divided into a finite number of regions, while the output of the relay is constant for the inputs which belong to the same region. The non-oscillating trajectory is defined to be a trajectory which does not pass a pair of regions defined as opposite. Assume that every trajectory of isolated subsystems which starts from an initial point belonging to some area is non-oscillating. The trajectories of the composite system may be supposed also non-oscillating if the subsystems are weakly coupled. Evaluating the upper bound of interference that a subsystem receives from other subsystems, the conditions for non-oscillating responses are obtained. The results may also applicable as stability criteria for the systems of which Lyapounov functions are difficult to find.

1. ま え が き

電力系における電圧・無効電力潮流の制御 (VQ 制御) では、しばしば局所的な情報をでとに制御が行なわれるから、このような場合、系全体としては複合制御系を構成している。複合系の安定性に関しては、Bailey¹⁾, 荒木^{2), 3)}の報告があり、また得丸らは入出力安定性の概念を複合系に適用して、同様の結果を得ている。これらの研究はすべて、必要条件により近い十分条件を見出すことを目的としているが、VQ 制御などにあっては、安定条件より、より厳しい非振動条件がしばしば要求される。VQ 制御は変圧器タップの

上下、蓄電器の入り切りにより行なうことができるから、一種の多リレー系と考えることができるが、回路の開閉に必要なエネルギーや、系統に及ぼす動揺を考えると、大電力を流すスイッチ類 (しゃ断器類) の開閉を頻繁に行なうことは望ましくないからである。

非振動条件は、線形系では、たとえば実根のみをもつ条件として議論をすすめることができるが、リレーを多数含む場合についてはほとんど報告もれていない。このような場合の非振動条件について、筆者らは特別な場合についてすでに議論したが⁵⁾、本論文ではこれをさらに一般化した場合について報告する。

2. 問題の設定

ここでは、制御対象の動作速度に比べて、制御装置の動作速度の方がはるかに遅いような系を考える。たとえば VQ 制御系では、変圧器タップを変化させたとき、その電氣的な影響は瞬間的に全系統に及ぶが (注 1)、一方構造上の制約や運用上の観点から、タップの変化はある程度時間をおいて行なうことが望ましい。そのような系では、ダイナミックスは制御装置がうけもっており、リレーの動作時刻をサンプル時刻にとることにより、サンプル値系におきかえて議論をすすめることが可能になる。そこで、(1) 式を与えられるような n 個のサブシステムから成る複合サンプル値系を考える。

$$\mathbf{x}_i(\tau+1) - \mathbf{x}_i(\tau) = \sum_{j=1}^n \mathbf{A}_{ij} \mathbf{f}_j(\mathbf{x}_j), \quad (i=1, \dots, n) \quad (1)$$

$\mathbf{x}_i \in X_i$ は第 i サブシステム S_i に割当てられた状態量である。(1) 式において $\mathbf{A}_{ij}=0$ ($i \neq j$) とおいた

$$\mathbf{x}_i(\tau+1) - \mathbf{x}_i(\tau) = \mathbf{A}_{ii} \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i) \quad (2)$$

を孤立した S_i とよぶことにする。

$\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i)$ は S_i が含むリレー関数である。VQ 制御系では S_i での電圧や無効電力潮流を総合してスイッチ類の操作を決定するから、多次元のリレー関数となる。

(注 1) 発電機界磁電流制御などの問題はここでは除外している。

* 京都大学工学部 京都市左京区吉田本町

* Faculty of Engineering, Kyoto University, Kyoto
(Received September 5, 1974)

Fig. 1
Relay function
used in
VQ control
system

この場合の制御方策としては、たとえばVQの規準値からの偏差をもとにしたFig. 1のようなものが実用化されている⁶⁾。この場合、 $\mathbf{x}_i \equiv [\Delta V, 4Q]^T$ であり、図中の矢印はリレー動作の結果が孤立した S_i における $\mathbf{x}_i$ に及ぼす影響、つまり $\mathbf{A}_{ij}\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i)$ を表わしている。

実際にはVQ系の多数のリレーが同一の時刻に切換えることは考えられないから、そのような場合には(1)式の代わりに

$$\mathbf{x}_i(\tau+1) - \mathbf{x}_i(\tau) = \sum_{j=1}^n \mathbf{A}_{ij} \delta_j(\tau, \mathbf{x}_j) \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i) \quad (i=1, \dots, n) \quad (3)$$

のような式で表現される。ここで δ_j は1か0をとる関数であり、各サンプル時刻のうち、 S_j のリレー動作が実際に起こった時刻でのみ1、その他の時刻では0となる。しかし以下で述べる議論は、(3)式を用いても(1)式の場合と本質的に同じであるので、記述を簡単にするため(1)式をもとに考えることにする。

ここで表現を明確にするため、いくつかの概念を規定する。

【定義1】 X_i をいくつか(注2)の領域に分割し、その上で一定値(一般にはベクトル量)をとるような関数をリレー関数という。以下では原点を含む領域 Γ_i 上では、関数値は0とする。また分割された領域のうち、 Γ_i をのぞく任意の二つは互いに隣接領域か反対領域のどちらかであるとする。Fig. 1では D_{11} と D_{11}' 、 D_{12} と D_{12}' がそれぞれ互いに反対領域であり、ほかの組合せは隣接領域である。どの組合せが反対領域であるかは一般には対象の物理的条件よりきまる。

【定義2】 リレー関数の分割領域の集合において、その中に互いに反対領域であるような組を含まないものを領域の許容できる集合という。

(注2) ここでは有限個としておく。

リレーは一般には必ずしも対称であるとはかぎらない。いま X_i を分割した領域を、 $\Gamma_i, D_{i1}, D_{i2}, \dots$ と番号づけたとする。領域の許容できる集合のすべての集合を Ω_i とすると、 $\omega \in \Omega_i$ である ω は、整数の集合

$$L_{\omega}; \omega = \{D_{i,l} | l \in L_{\omega}\}$$

で表現できる。

リレー関数 $\mathbf{f}_i$ が定義1でのべたようなものであるとき、複合系(1)または(3)が漸近安定であれば、通常有限時間で直積集合 $\Gamma \triangleq \prod_i \Gamma_i$ におちつく。その場合の軌跡について、非振動性をつぎのように定義する。

【定義3】 領域の許容できる集合のみを通過するような軌跡を非振動的な軌跡という。

【定義4】 サブシステムにおいて、同一の領域をただか k 回して通過せず、また k 回通過する領域が少なくとも一つあるような軌跡を k 位の軌跡という。またある初期値から出発した軌跡が k 位であるとき、その初期値を k 位の初期値という。

【定義5】 孤立したサブシステムの軌跡上の各点(注3)の値を任意の方向に少しずつ動かしたとする。動かすことにより制御の状態が変われば、それめ組み込んで新しい軌跡を作る。各点に加えた変動量のノルムの和が ρ を越えないような変動の組を考える。そのような組のすべてが作る集合を半径 ρ の摂動という。また半径 ρ の摂動をうけるとは、半径 ρ の摂動に属する任意の要素の作用をうけることをいう。

ここで半径という言葉を用いたのは、半径 ρ の摂動に属する組の要素の和のノルムは ρ を越えないという事実によっている。

一般に、非線形系の軌跡の振動性は、その初期値にも依存するから、以上の準備のもとで、以下ではつぎのような問題を考える。

ある領域に属する初期値から出発した、孤立したサブシステムの軌跡がすべて非振動的であるとき、同じ領域に属する初期値から出発した複合系の軌跡も非振動的となるためには、どのような条件が成り立てばよいかという問題である。

3. 基本定理

前節でのべたように、軌跡の非振動条件は初期値に依存する。したがって、どのような初期値に対する非振動性を論じればよいかがまず問題となる。初期値の問題は、実際には平衡状態において Γ 上にある状態量が外部攪乱をうけて Γ の外にでることにより発生

(注3) サンプル値系だから軌跡はとびとびの値をとる。

すると考えられる。したがって外部攪乱が適当に小さければ、1位の初期値と考えてよいだろう。ところが孤立したサブシステムにおける初期値が1位であっても、その位置によっては、それに対応する複合系の軌跡は、サブシステム間の結合がどれほど小さくしても、2位となる場合が考えられる。他方孤立したサブシステムの軌跡が非振動的であるとき、サブシステム間の結合が適当に小さければ、複合系における軌跡も非振動的となると考えられる。その基準の一つとして、つぎの定理が得られる。

《定理1》 孤立した S_i における非振動的な1位の初期値の集合を I_i とする。 $\mathbf{x}_{i0} \in E_i$, $E_i \subset I_i$ である任意の $\mathbf{x}_{i0}$ から出発した、孤立した S_i における軌跡が、半径 $\rho_i = 2 \sum_{j \neq i} r_{ij}$ の摂動をうけても、

- a) たかだか2位の軌跡となる
- b) 非振動的である

という条件がすべての i に対して成り立つとき、直積集合 $E \triangleq \prod_i E_i$ の任意の1点から出発した複合系の軌跡は非振動的である。ここで、

$$r_{ij} \triangleq \max_{\omega \in \Omega_j} \sum_{l \in L_{\omega}} \| \mathbf{A}_{ij} \mathbf{f}_j(D_{jl}, l) \| \quad (4)$$

である。

(証明) 複合系における S_j ($j \neq i$) 上の軌跡がたかだか2位で非振動的であるとする。 S_j の軌跡の通過する領域の系列を $D_{j1}, D_{j2}, \dots$ それに対するリレー関数値を $\mathbf{f}_{j1}, \mathbf{f}_{j2}, \dots$ とすれば、整数列 $l_1, l_2, \dots$ は L_{ω} ($\omega \in \Omega_j$) からたかだか2回ずつとって作った数列となる。したがって S_i のうける変動量のノルムの総和 r_i は

$$\begin{aligned} r_i &= \sum_h \| \sum_{j \neq i} \mathbf{A}_{ij} \mathbf{f}_{jh} \| \leq \sum_{j \neq i} \sum_h \| \mathbf{A}_{ij} \mathbf{f}_{jh} \| \\ &\leq 2 \sum_{j \neq i} \sum_{l \in L_{\omega}} \| \mathbf{A}_{ij} \mathbf{f}_j(D_{jl}, l) \| \leq 2 \sum_{j \neq i} r_{ij} = \rho_i \quad (5) \end{aligned}$$

となり ρ_i を越えない。

いま複合系が振動的であるとする、各サブシステムのうちで、軌跡の通過する領域の系列が最初に3位になるか、あるいは反対領域にとびこむものがある。しかしそのサブシステムがその時刻以前に他のサブシステムからうける全摂動量 ρ_i はを越えないから、これは起こりえない。

リレーが対称であるとき、 X_i は互いに反対であるような s_i 個の組 (D_{i1}, D_{i1}') ($l=1, \dots, s_i$) と Γ_i とに分解され、その上のリレー関数値は

$$\mathbf{f}_i(D_{i1}) = -\mathbf{f}_i(D_{i1}') \quad (6)$$

となる。この場合には、各組より一つずつ領域をとって作った

$$r_{ij} = \sum_{l=1}^{s_i} \| \mathbf{A}_{ij} \mathbf{f}_j(D_{jl}, l) \| \quad (7)$$

を用いればよい。

対称な場合でしかも S_i における摂動の影響を $\mathbf{x}_i$ 要素ごとに分離して議論できるときには、つぎの定理を用いることができる。

《定理2》 $\mathbf{f}_i$, ($i=1, 2, \dots, n$), が対称なとき、定理1における ρ_i の半径の摂動の代わりに、 ρ_i の摂動を用いてよい。ただし

$$\rho_i = 2 \sum_{j \neq i} r_{ij} = 2 \sum_{j \neq i} \sum_{l=1}^{s_j} \| \mathbf{A}_{ij} \mathbf{f}_j(D_{jl}, l) \| \quad (8)$$

で、 $\| \cdot \|$ は要素ごとにとるとする。また ρ の摂動とは、定義5 (第2節) において、「ノルムの和」の代わりに「成分ごとの絶対値の和」とおきかえたものをいう。この定理の証明も定理1と同様にできるから省略する。

4. 定理の一般化

以上の定理では1位の軌跡が2位になる場合を考えたが、一般にはたかだか k 位の初期値がたかだか h 位 ($h \geq k$) になる場合を考えて同様の議論ができる。また各サブシステムの位数が同じであるという必要もない。したがって、つぎの定理を構成することができる。

《定理3》 適当な正の整数の組 $(h_1, \dots, h_n)$ が存在して、すべての i で $\mathbf{x}_{i0} \in E_i$ あるすべての $\mathbf{x}_{i0}$ について孤立した S_i における軌跡が半径 $\rho_i = \sum_{j \neq i} h_j r_{ij}$ の摂動をうけても、たかだか h_i 位の非振動的な軌跡となるのであれば、直積集合 $\prod_i E_i$ の1点を初期値とする複合系の軌跡は非振動的である。

孤立した S_i におけるたかだか k_i 位の初期値の集合を $I_i(k_i)$ とすると、 $E_i \subset I_i(k_i)$, $E_i \subset I_i(k_i-1)$ であれば、当然 $k_i \leq h_i$ である。定理2と同様の要素ごとの議論ができるとき、定理3はつぎのようになる。

《定理4》 $\mathbf{f}_i$, ($i=1, \dots, n$) が対称なとき、定理3における半径 ρ_i の摂動の代わりに

$$\rho_i = \sum_{j \neq i} h_i \sum_{l=1}^{s_i} \| \mathbf{A}_{ij} \mathbf{f}_j(D_{jl}, l) \| \quad (9)$$

の摂動を考えてもよい。

定理3および4の証明も定理1の証明とまったく同様にできる。

5. サブシステムにおける位数および非振動条件

前節までの議論の結果、複合系の非振動性を判定するのに、系全体を同時に考える代わりに、各サブシ

テムそれぞれについて、位数および非振動性を考えればよいことがわかった。しかし振動をうけたサブシステムにおける位数および非振動性の議論はリレー関数の形に依存するので、その方法を一般的に定式化することは困難である。ここでは一般的な方針について述べる。

位数条件 領域を固定して考え、軌跡がその領域を通過する回数が振動により増加する可能性を検討する。この増加は軌跡が振動をうけて領域の境界を越えて移動することによって生ずるから、多くの領域が近接して存在する部分、たとえば頂点(注4)、稜、境界面などの付近に最もきびしい条件が発生することが多い。

つぎに1例をあげて説明する。

S_i におけるある領域 D_1 を考える。考えている頂点(または稜)の付近で D_1 の境界は座標軸に垂直な超平面上にあり、 S_i の状態量を $(x_1, \dots, x_m)$ として

$$x_j \geq a_j \quad (j=1, \dots, r, r \leq m) \quad (10)$$
 が成り立つとする。この頂点付近にある領域を $D_1, \dots, D_r$ とし、それらの領域上でのリレー関数は

Fig. 2
 Symmetric
 relay function

Fig. 3
 Initial point
 region of
 the 1-st
 order for
 isolated
 subsystem

(注4) ここでは頂点、稜などという言葉で、いくつかの境界面の交わった部分を漠然と表わす。

$$A_{ii}f_i(D_i) = (p_{i1}, \dots, p_{im}p)' \quad (11)$$

を満すとする。この頂点付近で D_1 内にある状態量に $A_{ii}f_i(D_i)$ という変化が生じたとき D_1 の外にとび出す場合を考えると、(10) 式より、 $p_{i1}, \dots, p_{im}$ のうち負となるものが少なくとも一つの存在とする。 $D_1, \dots, D_r$ を軌跡が通過する回数が、振動により増加するかも知れない最大増加数を $\nu_1, \dots, \nu_r$ とする。 $p_{ij} < 0$ とすると、 D_1 上の制御は x_j 軸の負の方向に状態量を動かすのに対し、状態量を正の方向に動かすのは、 $p_{ij} < 0$ となる D_1 上の制御である。したがって $p_{ij} < 0$ であるすべての j について

$$\nu_1 p_{1j} < \sum \nu_i \max(p_{ij}, 0) + \rho_j \quad (12)$$

が成り立つ。ただし S_i のうける振動を $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_m)'$ とした。 S_i の位数を h_i とすれば、(12) 式右辺の ν_i は h_i を越えないから、この頂点付近に関する一つの十分条件が得られる。またこの頂点付近にあるすべての領域について (12) 式と同様の式を作り、それらを連立させると、より必要条件に近い十分条件を求めることもできる。以上の議論は局所的な判定によって行っているので、軌跡が隣の領域を跳び越えたり、いくつかの頂点をいったりきたりする可能性についても吟味する必要がある。同様の議論をすべての頂点、稜などについて行ない、それらのうちで最もきびしい条件をとれば、位数に関する十分条件が得られる。

非振動条件 振動が生ずる場合として、ある領域 D_1 を通過した状態量が、稜(あるいは境界面)などに沿って動き、その結果 D_1' の反対領域に入る場合を検討すればよいようである。稜を構成する境界面付近の領域上でのリレー関数値の、考えている方向成分の和(移動を考えている方向成分が正のもののみをとる)の h_i 倍が、その稜に沿った移動量の上限を与える。 D_1 を出る部分における移動量および振動による直接的な移動を考慮すれば、ある径路に沿った移動量の上限が求められる。可能な経路をすべて検討することにより、非振動の十分条件が得られる。

6. 例 題

[例題 1] VQ 制御系を想定して、Fig. 2 のような対称なリレー関数を考え、さらに $A_{ii} = I$ (I は単位行列) とする。また E_i としては、 $I_i(1)$ 、すなわち孤立した S_i での軌跡が1位であるようなものの全体を考える。このような領域は Fig. 3 のようになっている。孤立した S_i における軌跡が半径 ρ_i の振動をうけた場合、 h_i 位以内という条件または非振動条件が乱されそうな典型的な場合を考えると、Fig. 4 に示すように、a) 同一の領域を続けて動く場合、b) 一度他

Fig. 4
Two types
of perturba-
tion in
composite
system

Fig. 5
Example of
a simple
relay func-
tion

の領域に入ったのち、再びもとの領域に入るという二つの場合が考えられる。図中の小円は、摂動を象徴的に表わしている。摂動量の上限を $\rho_i = (\rho_{i1}, \rho_{i2})'$ とすると付録に示すように位条件については、

$$(h_i - 1)(p_{i1} + p_{i2}q_{i1}/q_{i2}) > \rho_{v1} + q_{i1} + \rho_{i2}q_{i2} \quad (13)$$

非振動条件については

$$q_{i2} + h_i p_{i2} + \rho_{i2} < 2d_i \quad (14)$$

の形の条件が得られる。(もちろん x_{i1}, x_{i2} 両成分について吟味する必要がある)

ここで最も単純な場合として、 f_i としては全サブシステムに対して共通に **Fig. 5** のようなものを考える。したがって $p_{i1} = q_{i2} = 1$, $p_{i2} = q_{i1} = p$ である。さらに n 個の同じサブシステムが、**Fig. 6** のように互いにすべてつながっているとし、

$$A_{ii} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad i=1, \dots, n$$

$$A_{ij} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad i \neq j, \quad i, j=1, \dots, n$$

としよう。この問題では摂動は要素ごとに考えることができるから

$$r_{ij} = a \begin{pmatrix} 1+p \\ 1+p \end{pmatrix} \quad (15)$$

Fig. 6
Fully conncted
composite
system

Fig. 7 Non-oscillating region of parameters for the system of example 1

となる。この例のように対称な場合は

$$h_1 = h_2 = \dots = h_n = h$$

とおけば

$$\rho_{i1} = \rho_{i2} = h(n-1)a(1+p) \quad (16)$$

となる。(15), (16) 式を (13), (14) 式に代入すれば

$$(h-1)(1+p^2) > h(n-1)a(1+p)^2 \quad (17)$$

$$1 + hp + h(n-1)a(1+p) < 2c \quad (18)$$

と満す正整数が存在すれば非振動になる。これより **Fig. 7** のような非振動領域が得られる。

【例題 2】 非対称な場合の例として、 $n=2$ で

$$A_{ii} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad i=1, 2$$

$$A_{12} = 2a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{21} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である系を考える。このような系は **Fig. 8** のように S_2 が S_1 より「大きい」場合であると考えることができる。

Fig. 8
Composite
system of two
unequal
subsystems

Fig. 9
Non-oscillating
region of
parameters
for the
system of
example 2

f として例1に示した **Fig. 5** と同じものを考えると複合系が非振動であるための十分条件は、つぎの関係を満す $h_1 h_2$ が存在すればよいことになる。

$$S_1: (h_1 - 1)(1 + p^2)2 < h_2 a(1 + p)^2$$

$$1 + h_1 p + 2h_2 a(1 + p) < 2c$$

$$S_2: (h_2 - 1)(1 + p^2) > h_1 a(1 + p)^2$$

$$1 + h_2 p + h_1 a(1 + p) < 2c$$

$p = 1/4$ のときを考えると

$$h_1 = h_2 = 2 \text{ では } a < 17/100, c > (5/2)a + 3/4$$

$$h_1 = h_2 = 3 \text{ では } a < 17/75, c > (15/4)a + 7/8$$

$$h_1 = 3, h_2 = 2 \text{ では } a < 17/75, c > (5/2)a + 7/8$$

となるから、結局非振動領域は **Fig. 9** のようになる。

6. あとがき

孤立したサブシステムが非振動である場合、各サブシステム間の結合が小さければ複合系においても非振動になるはずであるという立場から非振動条件を求めた。本論文では、主としてVQ制御系へ応用することを想定したが、ここで用いた議論は、ダイナミクスを制御装置がうけもっているような制御系に対しては一般的に適用できる。しかしそれらの結果は、実際にはかなり慎重な条件を与えている。その理由の一つには、各サブシステムに課した h_i 位条件が「 $\omega \in Q_i$ に属するすべての領域を h_i 回ずつ通過する」かも知れないと想定したことにより、実際には起こりそうもない組合わせも繰込んでいることによる。これについては、 h_i 位条件を更に細かく規定することによりかなり改善することができる。

第2の理由は、結合に関する評価をノルムまたは絶対値を用いて行なったため、符号に関する情報が失われたことに起因する。符号を組み込んだ議論は、1次元のリレーに対してはある程度可能であるが、2次元以上のリレーに対しては、 $n=2$ の場合をのぞき、一般には困難である。このあたりの議論が今後検討しなければならない点の一つである。

本論文の例題として用いたリレー系では、リアプノフ関数を構成するのはかなりむずかしく、安定性の吟味は容易ではない。ところで非振動的な初期値の集合 E が Γ を内部に含むときには、系は明らかに局所的には安定とするので、本論文の結果は安定判別に応用することもできる。

非振動性はある意味では安定性と非常に似かよった性格をもっているが、非振動性そのものの定義が、まだ一般には明確ではない。本論文で用いた非振動の定義は、一種の「オーバーシュートなし」の条件に対応するが、取扱う系の構造に非振動性の定義そのものが依存している。今後の議論をすすめてゆくためには、「非振動とは何か」という点についても、明確な議論としておく必要があろう。

参考文献

- 1) F.N. Bailey: The Application of Lyapunov's Second Method to Interconnected Systems, J. SIAM Control Ser. A, 3-3, 433/462 (1966)
- 2) M. Araki, K. Ando and B. Kondo: Stability of Sampled-Data Composite Systems with Many Nonlinearities, Trans. IEEE, AC-16-1, 22/27 (1971)
- 3) 荒木, 近藤: 複合構造をもつ大規模システムの安定条件, システムと制御, 16-9, 728/736 (1972)
- 4) 得丸, 足立, 雨宮: 複合系の入出力安定について, システムと制御, 17-2, 121/125 (1973)
- 5) 安藤, 近藤: 複合サンプル値リレー系の非振動条件の一考察, システムと制御, 18-7, 400/401 (1974)
- 6) 馬場他: 系統電圧・無効電力制御装置, 三菱電機技報, 41-5, 731/736 (1962)

《付 録》

(13), (14) 式の導出

以下では記述を簡単にするため、 S_1 に関することを示す添字 i は省略する。Fig. 2 で $q_1 < q_2$, $p_1 > p_2$ とする。 D_1' , D_2 , Γ の境界付近での動作を考える。孤立系の軌跡のうち、摂動による D_1' の通過回数の増加の可能性の最も大きいのは、軌跡の最終値が Γ の右上隅におちつくものである。摂動により、 D_1' , D_2 を軌跡が通過する回数の増加量増（加するかも知れない量）を ν_1, ν_2 とする。 x_1 方向の移動量を考えると第5節で述べた方法を適用すると、 ν_1 はつぎの条件を

満さねばならない.

$$\nu_1 p_1 < \nu_2 p_2 + \rho_1 \quad (19)$$

D_2 での x_2 方向の移動量を考えると

$$\nu_1 p_2 + \nu_2 q_2 < \rho_2 \quad (20)$$

でなければならないから (19), (20) 式から ν_2 を消去すると

$$\nu_1(p_1 + p_2 q_1 / q_2) < \rho_1 + q_1 \rho_2 / q_2 \quad (21)$$

したがって D_1' の通過回数は

$$(h-1)(p_1 + p_2 q_1 / q_2) > \rho_1 + q_1 \rho_2 / q_2 \quad (22)$$

を満す越えることがない. 境界の他の部分での条件を同様にして吟味すると, たとえば D_1' と Γ の境界

線付近での x_1 方向の摂動による移動量を考えれば

$$(h-1)p_1 < \rho_1 \quad (23)$$

が得られるが (23) 式の形の条件の方は (22) 式に含まれる.

つぎに非振動条件については D_1' Γ との境界に沿って移動する場合を考えれば, D_1' をたかだか h 回しか通過しないから, 軌跡上の状態量が D_2 を離れてからの x_2 方向の移動量は $h p_2 + q_2 + \rho_2$ を越えない. したがって $h p_2 + q_2 + \rho_2 < 2d$ であれば摂動をうけても非振動である.