多変数フィードバック系の伝達関数の評価

荒 木 光 彦*

Estimate of Transfer Functions in Multivariable Feedback Systems

Mituhiko ARAKI*

A multivariable feedback system $\mathbf{y}(s)=G(s)\mathbf{x}(s)$, $\mathbf{x}(s)=\mathbf{u}(s)-F(s)\mathbf{y}(s)$ is treated where $G(s)$ is the transfer function matrix of a plant and $F(s)=\text{diag}(f_1(s), \dots, f_n(s))$ is that of a controller. A new bound for the transfer function $h_k(s)$ that relates $y_k(s)$ to $u_k(s)$ when the k -th loop is open but the other loops are closed is given. The main result reads: $|h_k(s)-g_{kk}(s)| < a_k(s)$ if $|f_j(s)^{-1}+g_{jj}(s)| > a_j(s)$ ($j=1, \dots, n$; $j \neq k$). Here, $A=\text{diag}(a_1(s), \dots, a_n(s))$ is such a matrix that $A-B$ is a semi- M -matrix and $B=(b_{ji})$ is given by $b_{jj}=0$, $b_{ji}=|g_{ji}(s)|$ ($j \neq i$). A method to determine A when B is given is also presented. The result is useful for the design of multivariable systems.

1. ま え が き

Fig. 1 の多変数制御系を考える。制御対象の伝達関数行列の非対角要素が小さければ、各ループはほとんど独立であるとみなせよう。伊藤氏はこの観点からフィードバック要素の設計を試み定性的検討を加えた^{1), 2)}。Rosenbrock は同じ観点からループ間の相互干渉について定量的な解析を行ない、設計法を提案している^{3), 4)}。当論文は、同種の問題に関してより精密な理論を組立てることを目標とする。

2. 主な 結 果

初期値を 0 とすれば、Fig. 1 の系は

$$\mathbf{x}(s)=\mathbf{u}(s)-F(s)\mathbf{y}(s) \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(s)=G(s)\mathbf{x}(s) \quad (2)$$

で記述される。 $\mathbf{u}$ から $\mathbf{y}$ のへの伝達関数行列 $H(s)$ は、

$$H(s)=G(s)[I+F(s)G(s)]^{-1} \quad (3)$$

で与えられる ($\mathbf{y}(s)=H(s)\mathbf{u}(s)$)。

さて、第 k ループだけを開放し、ほかのすべてのループを要素 $f_j(s)$ ($j=1, \dots, n$; $j \neq k$) で閉じたとき

Fig. 1 Block diagram of a multivariable control system

の、 u_k から y_k への伝達関数を $h_k(s; F_k)$ で表わそう。ただし、

$$F_k = \text{diag}(f_1(s), \dots, f_{k-1}(s), 0, f_{k+1}(s), \dots, f_n(s)) \quad (4)$$

である。 $h_k(s; F_k)$ は (3) 式で $F(s)=F_k$ とおいて得られる $H(s)$ の要素 $h_{kk}(s)$ に等しく、一般に F_k と $G(s)$ とに依存する。ここで、もし $h_k(s; F_k)$ を F_k に依存しない量を使って評価できれば、第 k ループを他のループとは一応独立に設計することが可能となる⁴⁾。つぎの定理はこの種の評価を与える(注 1)。

《定理 1》 行列 $B=(b_{ji})$ を、 $b_{jj}=0$ ($j=1, \dots, n$) および

$$|g_{ji}(s)| \leq b_{ji} \quad j, l=1, \dots, n; j \neq l \quad (5)$$

(注 1) 要約すれば、定理 1 は「 $F_k \in \Phi_k$ であれば (7) 式が成り立つ」となる。 Φ_k は (6) 式で与えられる F_k の集合である。 k 番目以外の制御要素を Φ_k という制約の中で自由に選んでも、 $h_k(s; F_k)$ に対して一定の評価が可能であるという意味でループを分離することができる。しかし、 Φ_k と a_k とは互いに依存する点に注意されたい。 G の非対角要素が小さければ、 Φ_k を非常に広く a_k を非常に小さく選ぶことができ、実質的に各ループを独立とみなせる。そうでない場合には、ほかのループの制御要素 $f_j(s)$ にかんがりの制約をつけて一つのループに帰還を施すことになる。(5. 参照) ただし、後者の場合でも、ループを分離して設計する手順を繰返せば、系全体の安定性を保証しながら帰還ゲインをつぎつぎに高めていくことが可能と考えられる。この点については別に論じたい。

* 京都大学工学部 京都市左京区吉田本町

* Faculty of Engineering, Kyoto University, Kyoto
(Received September 9, 1974)

を満す n 次正方行列とする. n 次対角行列 $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ を $A - B$ が半 M 行列となるように選ぶ(注 2). F_k が

$$|f_i(s)^{-1} + g_{ji}(s)| > a_j \quad j=1, \dots, n; \quad j \neq k \quad (6)$$

を満足すれば, $h_k(s; F_k)$ は

$$|h_k(s; F_k) - g_{kk}(s)| \begin{cases} < a_k & (a_k > 0) \\ = 0 & (a_k = 0) \end{cases} \quad (7.a)$$

$$(7.b)$$

を満す. ただし, (6)式は $f_i(s) = 0$ のときにも満足されているものとみなす.

証明は次節で与える. B が与えられたとき, A をいかに定めるかは 4 節で論じる. 定理は s のおのおのの値について成立する. s の種々の値における最も鋭い評価を求める場合には, $b_{ji}(s) = |g_{ji}(s)| (j \neq l)$ においてそれに対する $a_j(s)$ を各 s について計算すればよい(注 3).

定理 1 は一つのループに対する $h_k(s; F_k)$ の評価を与える形で述べられているが, この定理はむしろすべてのループに対して同時に評価を行なう場合に便利である. すなわち, すべての $f_i(s)$ を (6) の不等式を満す範囲に選ぶものとすれば ($j=1, \dots, n$), (7.a), (7.b) 式はすべての $h_k(s; F_k)$ について成立する ($k=1, \dots, n$). このとき, 4 節にのべるように, $a_1, \dots, a_n$ は B から一時に計算される. もし, 第 k ループ以外の $f_i(s)$ に対する制限が先に与えられている (すなわち, $a_j; j \neq k$ が与えられている) 場合には, つぎの定理を使ってより直接に $h_k(s; F_k)$ を評価できる.

《定理 2》(注 4) 行列 $B = (b_{ji})$ を $b_{ji} = 0 (j=1, \dots, n)$ および (5) 式を満す n 次正方行列とし, n 次対角行列 $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ が $A_0 - B_0 \triangleq C_0$ が M 行列になるように与えられているものとする. このとき, F_k が

$$|f_i(s)^{-1} + g_{ji}(s)| \geq a_j \quad j=1, \dots, n; \quad j \neq k \quad (8)$$

を満足すれば, $h_k(s; F_k)$ は

(注 2) 正方行列 C の非対角要素がすべて非正で, 主座行列式がすべて非負 (または正) であるとき, C は半 M 行列 (または M 行列) であるという. 半 M 行列および M 行列については文献 5)~9) を参照されたい.

(注 3) 他方, Σ を複素数の集合として $b_{ji} \triangleq \sup_{s \in \Sigma} |g_{ji}(s)|$ ($j \neq l$) とおけば, (7.a), (7.b) はすべての $s \in \Sigma$ について成立する. これは, B から A を計算する手数を省きたい場合に有用である (たとえば $\Sigma = \{s | s = i\omega, \omega > 0\}$ のとき)

(注 4) 定理中, a_k は不要である. しかし, $a_k = c_1^T C_0^{-1} c_2$ とおけば, $A - B$ は半 M 行列となり, 定理 1 との対応関係が明らかとなる (証明参照). 定理 1 と 2 の違いは, $|f_i^{-1} + g_{ji}|$ の評価に等号を入れるか, $A_0 - B_0$ が M 行列である条件に等号を入れるかの違いと考えられる.

$$|h_k(s; F_k) - g_{kk}(s)| \leq c_1^T C_0^{-1} c_2 \quad (9)$$

を満す. ただし, A_0 および B_0 は, それぞれ A および B の第 k 行, 第 k 列をとり除いて得られる $(n-1)$ 次正方行列とし, c_1 および c_2 はつぎの $(n-1)$ 次ベクトルとする

$$c_1 = (b_{k1}, \dots, b_{kk-1}, b_{kk+1}, \dots, b_{kn})^T \quad (10.a)$$

$$c_2 = (b_{1k}, \dots, b_{k-1k}, b_{k+1k}, \dots, b_{nk})^T \quad (10.b)$$

3. 定理 1 および 2 の証明

3.1 $\hat{h}_n(s; F_n)$ を与える公式

$$R \triangleq (r_{ji}) = I + F_n G(s) \quad (11)$$

とし, R_{nj} を行列式 $\det R$ における要素 r_{nj} の余因子とする. このとき, $h_n(s; F_n)$ は次式で与えられる^{10), 11)}.

$$h_n(s; F_n) = \frac{1}{R_{nn}} \sum_{j=1}^n g_{nj}(s) R_{nj} \quad (12)$$

ここで, 行列 $P \triangleq (p_{ji})$ を次式で定義する.

$$p_{jj} = 1 + f_j(s) g_{jj}(s) \quad j=1, \dots, n-1 \quad (13.a)$$

$$p_{nn} = g_{nn}(s) \quad (13.b)$$

$$p_{ji} = f_j(s) g_{ji}(s) \quad j, l=1, \dots, n; \quad j \neq l; \quad j \neq n \quad (13.c)$$

$$p_{nl} = g_{nl}(s) \quad l=1, \dots, n-1 \quad (13.d)$$

行列 R と行列 P の第 1 行~第 $(n-1)$ 行の要素はまったく同じであるから, 行列式 $\det P$ における要素 p_{nj} の余因子 P_{nj} は R_{nj} に等しい. ゆえに, (12) 式より

$$h_n(s; F_n) = \frac{\det P}{P_{nn}} \quad (14)$$

を得る.

3.2 M 行列についての補題

[補題 1] n 次正方行列 $P \triangleq (p_{ji})$ および $Q \triangleq (q_{ji})$ が

$$|p_{jj}| \geq q_{jj} \quad j=1, \dots, n-1 \quad (15.a)$$

$$|p_{ji}| \leq -q_{ji} \leq 0 \quad j, l=1, \dots, n; \quad j \neq l \quad (15.b)$$

を満すものとする. P_0 および Q_0 をそれぞれ P および Q の左上隅の $(n-1)$ 次小行列とする. もし Q_0 が M 行列でありかつ Q が半 M 行列であれば, $\det P_0 \neq 0$ であって

$$\left| p_{nn} - \frac{\det P}{\det P_0} \right| \leq q_1^T Q_0^{-1} q_2 \leq q_{nn} \quad (16.a)$$

が成立する. さらに, もし Q が M 行列であれば

$$\left| p_{nn} - \frac{\det P}{\det P_0} \right| \leq q_1^T Q_0^{-1} q_2 < q_{nn} \quad (16.b)$$

である. ただし, q_1, q_2 はつぎの $(n-1)$ 次ベクトルとする.

$$q_1 = (q_{n1}, \dots, q_{nn-1})^T, \quad q_2 = (q_{1n}, \dots, q_{n-1n})^T \quad (17)$$

(証明) Q_0 が M 行列で (15. a), (15. b) が成立するから, 文献 5) の定理 III により, P_0 は正則であって, 逆行列 $V \triangleq (v_{jl}) \triangleq Q_0^{-1}$, $U \triangleq (u_{il}) \triangleq P_0^{-1}$ の間につきの不等式が成立する.

$$|u_{jl}| \leq v_{jl} \quad j, l=1, \dots, n-1 \quad (18)$$

一方, 分割された行列についての公式 (文献 12) 参照) により次式をうる.

$$\det P = (p_{nn} - \mathbf{p}_1^T P_0^{-1} \mathbf{p}_2) \det P_0 \quad (19)$$

ただし, $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ は $(n-1)$ 次ベクトルである.

$$\mathbf{p}_1 = (p_{n1}, \dots, p_{n,n-1}), \quad \mathbf{p}_2 = (p_{1n}, \dots, p_{n-1,n}) \quad (20)$$

ゆえに, Q_0^{-1} の要素がすべて非負であることを考慮して

$$\left| p_{nn} - \frac{\det P}{\det P_0} \right| = |\mathbf{p}_1^T P_0^{-1} \mathbf{p}_2| \leq \mathbf{q}_1^T Q_0^{-1} \mathbf{q}_2 \quad (21)$$

をうる. Q が半 M 行列 (または M 行列) だから,

$$\det Q = (q_{nn} - \mathbf{q}_1^T Q_0^{-1} \mathbf{q}_2) \det Q_0 \geq 0 \quad (\text{または} > 0) \quad (22)$$

である. $\det Q_0 > 0$ であるから, (16. a) (または (16. b)) の第 2 の不等式をうる.

[補題 2] $C \triangleq (c_{ji})$ を n 次の半 M 行列とする. $c_{nn} > 0$ であれば,

$$c_{jj'} = c_{jj} + \varepsilon \quad j=1, \dots, n-1 \quad (23. a)$$

$$c_{ji'} = c_{ji} \quad \text{上記以外} \quad (23. b)$$

で与えられる n 次正方行列 $C' \triangleq (c_{ji'})$ は M 行列である. ただし, ε は任意の正数とする.

(証明) C_0 および C_0' を, それぞれ C および C' の左上隅の $(n-1)$ 次小行列とする. 半 M 行列の定義より C_0 も半 M 行列である. ゆえに, 文献 6) 定理 5.1 により C_0' は M 行列である. したがって, $\det C' > 0$ を示せば証明は完了する (文献 6) 定理 4.3 条件 9°). γ_j を C の j 次主座行列式の中で c_{nn} を含むものの総和とすれば, $\det C'$ は

$$\det C' = \gamma_1 \varepsilon^{n-1} + \gamma_2 \varepsilon^{n-2} + \dots + \gamma_n \quad (24)$$

と展開できる. C が半 M 行列であるから $\gamma_j \geq 0$ ($j=1, \dots, n$) である. 特に, $\gamma_1 = c_{nn} > 0$ であるから $\det C' > 0$ を得る.

3.3 定理 1 の証明

入出力対の番号を任意につけかえても伝達関数の性質は変わらないから, 一般性を失うことなく $k=n$ と仮定できる.

$f_j(s)$ ($j=1, \dots, n-1$) を固定して考えよう.

$$\varepsilon = \min_{\substack{j=1, \dots, n-1 \\ f_j(s) \neq 0}} \{|f_j(s)^{-1} + g_{jj}(s)| - a_j\} \quad (25)$$

とおけば, 仮定 (6) より $\varepsilon > 0$ である. $C \triangleq (c_{ji}) \triangleq A - B$ とおき, n 次正方行列 $C' \triangleq (c_{ji'})$ を (23. a), (23. b) で定義する. 一般に C' は半 M 行列, C' の

左上隅の $(n-1)$ 次小行列 C_0' は M 行列であり (文献 6) 定理 5.1 および 5.11), 特に $c_{nn} \neq 0$ (すなわち $c_{nn} > 0$) であれば C' は M 行列である (補題 2 参照). n 次正方行列 $Q \triangleq (q_{ji})$ を

$$q_{jj} = \begin{cases} |f_j(s)| c_{jj'} = |f_j(s)| (a_j + \varepsilon) & f_j(s) \neq 0 \\ 1 & f_j(s) = 0 \end{cases} \quad j=1, \dots, n-1 \quad (26. a)$$

$$q_{nn} = c_{nn'} = a_n \quad (26. b)$$

$$q_{ji} = |f_j(s)| c_{ji} = -|f_j(s)| b_{ji} \quad j, l=1, \dots, n; \quad j \neq l; \quad j \neq n \quad (26. c)$$

$$q_{ni} = c_{ni'} = -b_{ni} \quad l=1, \dots, n-1 \quad (26. d)$$

で定義し, Q_0 を Q の左上隅の $(n-1)$ 次小行列とする. C' および Q の第 $j_1, \dots, j_m$ 列および第 $j_1, \dots, j_m$ 行の要素からなる m 次の主座行列をそれぞれ $\det C'(j_1, \dots, j_m)$ および $\det Q(j_1, \dots, j_m)$ で表わせば, 両者の間に

$$\det Q(j_1, \dots, j_m) = \gamma \det C'(j_1', \dots, j_m') \quad (27)$$

の関係が成立する. ただし, $j_m \neq n$ のとき, 集合 $\{j_1', \dots, j_m'\}$ は $f_j(s) \neq 0$ である $j \in \{j_1, \dots, j_m\}$ の集合であり

$$\gamma = \prod_{k=1}^{m'} |f_{j_k'}(s)| > 0 \quad (28)$$

である. $j_m = n$ のときには, 集合 $\{j_1', \dots, j_{m'-1}'\}$ は $f_j(s) \neq 0$ である $j \in \{j_1, \dots, j_{m-1}\}$ の集合であり

$$j_{m'}' = n, \quad \gamma = \prod_{k=1}^{m'-1} |f_{j_k'}(s)| > 0 \quad (29)$$

である. (27)~(29) 式により, Q (または Q_0) の主座行列式の符号は C' (または C_0') のある主座行列式の符号と一致することがわかる. したがって, 一般に Q は半 M 行列, Q_0 は M 行列であり, 特に $a_{nn} = c_{nn'} \neq 0$ であれば Q は M 行列である.

さて, $h_n(s; F_n)$ を与える公式 (14) 中の行列 P に注目しよう. (26. a)~(26. d) 式を (13. a)~(13. d) 式と比較し, 定理の仮定 (6) および ε の定義 (25) を考慮すれば, P と Q の要素間に (15. a), (15. b) の不等式が成立することがわかる. したがって, 公式 (14) と補題 1 より

$$|h_n(s; F_n) - g_{nn}(s)| = \left| \frac{\det P}{\det P_0} - g_{nn}(s) \right| \leq q_{nn} = a_n \quad (30)$$

を得る. 特に $a_{nn} \neq 0$ のときには Q が M 行列であるから, (7. a) 式が得られる.

上の議論は, (6) 式を満たす任意の $f_j(s)$ ($j=1, \dots, n-1$) に対して成立するから, 定理は証明された.

3.4 定理2の証明

C_0 が M 行列と仮定されているから、定理1の証明中の C' の役割を C でおきかえればよい。すなわち、 Q を

$$\begin{aligned} q_{ij} &= |f_j(s)| c_{ij} (f_j(s) \neq 0), \quad q_{ij} = 1 (f_j(s) = 0), \\ q_{ji} &= |f_j(s)| c_{ji} \\ j &= 1, \dots, n-1; \quad l = 1, \dots, n; \quad l \neq j \end{aligned} \quad (31.a)$$

$$q_{ni} = c_{ni} \quad l = 1, \dots, n \quad (31.b)$$

で定義すれば、 C と Q の間に(27)式と同様の関係が成立する。以下の論証は定理1の場合と同じである。ただし、補題1の(16.a)の最初の評価を用いること、および

$$q_1^T Q_0^{-1} q_2 = c_1^T C_0^{-1} c_2 \quad (32)$$

に注意されたい。

4. 対角行列 A の定め方

非負行列 B は、行と列に同じ置換を行なうこと（すなわち、入出力対の番号をつけかえること）により、分解可能性についてのつぎの標準形にすることができる（注5）。

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ B_{21} & B_2 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ B_{m1} & \dots & B_{mm-1} & B_m \end{pmatrix} \quad (33)$$

ただし、対角線上の $B_1, \dots, B_m$ は分解不能な正方非負行列である。さて、 B が標準形になるように入出力対の番号をつけかえたものとし、 B に対応して A を

$$A = \text{block diag} (A_1, \dots, A_m) \quad (34)$$

と表わそう（注6）。半 M 行列の定義より明らかに、 $A_\sigma - B_\sigma (\sigma = 1, \dots, m)$ がすべて半 M 行列であれば $A - B$ は半 M 行列である。また、分解不能な非負行列に対してつぎの補題が成立する。

【補題3】 B を分解不能な非負行列、 $W = \text{diag}(w_1, \dots, w_m)$ を $w_j > 0 (j = 1, \dots, n)$ なる対角行列、 λ を BW^{-1} の最大固有根とすれば、 $\lambda W - B$ は半 M 行列である。

（証明）半 M 行列の定義より明らかに、 $\lambda W - B$ が半 M 行列であることと、 $(\lambda W - B)W^{-1} = \lambda I - BW^{-1}$ が半 M 行列であることは等価である。一方、 λ が BW^{-1} の最大固有根であるから $\lambda I - BW^{-1}$ は半 M 行列である（注7）。（証明終）

（注5） 分解可能または分解不能な行列、その標準形、非負行列の最大固有根などについては、文献12)の8章または文献13)を参照されたい。

（注6） $\text{block diag} ()$ は、正方行列 $A_1, \dots, A_m$ を対角線上にもち、その他の要素が0である擬対角行列とする。

以上のことから、対角行列 A を求めるためには

(i) 入出力対の番号をつけかえて、 B を(33)式の標準形にする。（これには、文献13)にあるグラフ論的方法が有用である。）

(ii) 各対角ブロックについて、 $B_\sigma W_\sigma^{-1}$ の最大固有根 λ_σ を求める。ただし、 W_σ は対角要素が正の適当な対角行列とする。（ $\sigma = 1, \dots, m$ ）

(iii) $A_\sigma = \lambda_\sigma W_\sigma$, $A = \text{block diag} (A_1, \dots, A_m)$ とする。

の手續によればよいことがわかる。 W_σ は A_σ の対角要素の比を定める重み行列である。簡単のため B を分解不能と仮定して W の役割を考えよう。たとえば

$$w_j = |g_{jj}(s)| \quad j = 1, \dots, n \quad (35)$$

（ただし、 $g_{jj}(s) \neq 0$ とする）とおけば、(6), (7.a) 式は

$$\left| \frac{f_j(s)^{-1} + g_{jj}(s)}{g_{jj}(s)} \right| > \lambda \quad (36)$$

$$\left| \frac{h_k(s; F_k) - g_{kk}(s)}{g_{kk}(s)} \right| < \lambda \quad (37)$$

と書き換えられる。すなわち、各ループが一様な相対誤差で評価できることになる。 W を変えることにより、あるループに対する精度を特に高めることもできる。

5. 例題

$$n=3, \quad G(s) = \begin{pmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) & 0 \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) & 0 \\ g_{31}(s) & g_{32}(s) & g_{33}(s) \end{pmatrix} \quad (38)$$

として、 $h_k(s; F_k)$ のベクトル軌跡 ($s = j\omega$; $-\infty < \omega < \infty$ の軌跡を考える) の存在範囲を求めよう。

$$b_{jl}(i\omega) = |g_{jl}(i\omega)| \quad j, l = 1, 2, 3; \quad j \neq l \quad (39)$$

ととる。視察によって明らかに

$$a_1(i\omega)a_2(i\omega) = |g_{12}(i\omega) \cdot g_{21}(i\omega)| \quad (40.a)$$

$$a_3(i\omega) = 0 \quad (40.b)$$

と選べば $A - B$ は半 M 行列となる。 $a_1(i\omega)$, $a_2(i\omega)$ の選び方に任意性が残るが、4節の一般的方法に従い重み(35)式を使うものとすれば、つぎようになる。

$$\frac{a_1(i\omega)}{|g_{11}(i\omega)|} = \frac{a_2(i\omega)}{|g_{22}(i\omega)|} = \left| \frac{g_{12}(i\omega)g_{21}(i\omega)}{g_{11}(i\omega)g_{22}(i\omega)} \right|^{1/2} \quad (41)$$

$f_j(s) (j = 1, 2, 3)$ を

$$|f_j(i\omega)^{-1} + g_{jj}(i\omega)| > a_j(\omega) \quad j = 1, 2 \quad (42.a)$$

$$-f_3(i\omega)^{-1} \neq g_{33}(i\omega) \quad (42.b)$$

を満すように選ぶものとすれば、定理1により

$$|h_k(i\omega; F_k) - g_{kk}(i\omega)| < a_k(i\omega) \quad k = 1, 2 \quad (43.a)$$

（注7） 文献9) 定理6（または文献12) 2, 70/71 参照）により、 $\lambda' > \lambda$ に対して $\lambda' I - BW^{-1}$ は M 行列である。 $\lambda' \rightarrow \lambda$ の極限を考えれば上の結論をうる。

Fig. 2 Gershgorin bands (the $f_i(s)$'s are assumed to be constant)

$$h_3(i\omega; F_3) = g_{33}(i\omega) \quad (43. b)$$

が保証される。 $\Delta_k(i\omega)$ を中心 $g_{kk}(i\omega)$, 半径 $a_k(i\omega)$ の円板とし ($k=1, 2, 3$), ω が $-\infty$ から ∞ まで変わるときの $\Delta_k(i\omega)$ の軌跡を第 k ゲルシュゴリン帯とよぼう (注 8). 上の結果は, $-f_j(i\omega)$ のベクトル軌跡が第 j ゲルシュゴリン帯の外にあるようにとれば (注 9), $h_k(i\omega; F_k)$ のベクトル軌跡が第 k ゲルシュゴリン帯の中に包まれることを意味する. ゲルシュゴリン帯をベクトル軌跡の代わりに使えば, 古典的方法で各 $f_k(s)$ を独立に設計できる⁴⁾. このとき, 条件 (6) は (当例題の (42. a), (42. b)), 各ループの安定条件にほかならず, 特に新しい制約を加えるものではない (注 10).

Fig. 2 は以上の結果を示すものである.

6. 検 討

6.1 行和・列和による A の定め方

A を定めるのにつぎの補題によることもできる.

[補題 4] 分解不能な n 次非負行列 $B \triangleq (b_{ji})$ に対して, $A' = \text{diag}(a_1', \dots, a_n')$, $A'' = \text{diag}(a_1'', \dots, a_n'')$ を

$$a_j' = w_j \sum_{l=1}^n w_l^{-1} b_{jl}, \quad a_j'' = w_j \sum_{l=1}^n w_l^{-1} b_{lj} \quad (44)$$

で定めれば, $A' - B$, $A'' - B$ は共に半 M 行列である.

(証明) 補題 3 の場合と同様, $(A' - B)W^{-1} \triangleq C'$, $W^{-1}(A'' - B) \triangleq C''$ が半 M 行列であることを示せばよい ($W = \text{diag}(w_1, \dots, w_n)$). ところが, (44) 式は C' の行和 (または C'' の列和) が 0 であることを意味するから, 分解不能なミンコフスキー行列の性質 (文献

(注 8) ゲルシュゴリン帯は幅のあるベクトル軌跡と解釈できる. Rosenbrock の用語¹⁴⁾の拡張である.

(注 9) より詳しくは, 各周波数 ω について $-f_j(i\omega)^{-1}$ が $\Delta_j(i\omega)$ の外にあれば十分である.

(注 10) この条件は, 同時に, 多変数フィードバック系全体の安定性の十分条件でもある¹⁰⁾.

5), 文献 6) 定理 6.1) により, C' , C'' は半 M 行列である. (証明終)

文献 6) の定理 6.8, 6.9, 6.10 などを使えばより一般的な A の定め方を考えることもできる.

6.2 Rosenbrock の結果との比較

Rosenbrock の結果³⁾ は, B の分解可能性を無視して補題 4

で A を定める ($w_j=1$) ことに対応し, 定理 1 の特別の場合である. すなわち, こうしても $A - B$ は半 M 行列になるが (文献 6), 定理 5.11), A の値が非対角ブロック $B_{\sigma\tau}(\sigma \neq \tau)$ の要素の分だけ悪化する. 先の例題についてみれば, Rosenbrock³⁾ の (20) 式の評価を使って, $|f_j(i\omega)^{-1} + g_{jj}(i\omega)| > d_j'(i\omega)$ ($j=1, 2$), $-f_3(i\omega)^{-1} \neq g_{33}(i\omega)$ であれば $|h_k(i\omega; F_k) - g_{kk}(i\omega)| < d_k'(i\omega)$ ($k=1, 2$), $h_3(i\omega; F_3) = g_{33}(i\omega)$ であるという結果をうる. ただし,

$$d_1'(i\omega) = |g_{21}(i\omega)| + |g_{31}(i\omega)|, \\ d_2'(i\omega) = |g_{12}(i\omega)| + |g_{32}(i\omega)| \quad (45)$$

われわれの方法で列和を使って A を定めれば

$$a_1(i\omega) = |g_{21}(i\omega)|, \quad a_2(i\omega) = |g_{12}(i\omega)| \quad (46)$$

となり, $|g_{31}(i\omega)|$, $|g_{32}(i\omega)|$ の分だけ Rosenbrock の結果より鋭い. 行和を使えば, 第 1, 第 2 ループについて Rosenbrock の結果はわれわれのものと一致するが, 第 3 ループについては $|h_3(i\omega; F_3) - g_{33}(i\omega)| < |g_{31}(i\omega)| + |g_{32}(i\omega)|$ という結果しか得られない. なお, ϕ_j を使った結果はわれわれの定理 2 に対応するものである.

7. あとがき

当論文の主な応用は, ループ別に独立に (そのループだけを開放したときの) 伝達関数 $h_j(s; F_j)$ のベクトル軌跡の存在範囲 (すなわちゲルシュゴリン帯) を定めることにある (例題参照).

最大固有根を使って $h_j(s; F_j) - g_{jj}(s)$ の上界 a_j を定める 4 節の方法は, B_{σ} の次数が高くなると計算が面倒になるという欠点がある. しかし, 各ループの精度の比を自在に選ぶうる, また $G(s)$ の対角線より下にある要素 $g_{ji}(s)$; $j > l$ (または上にある要素 $g_{ji}(s)$; $j < l$) がすべて 0 に収束するとき $a_k(s)$ も 0 に収束するなどの利点がある (注 11). さらに, プラントの出力 (一般に次元の異なる物理量) を計る単位の変更に對して, 条件式 (6) および結論の式 (7. a), (7. b) が不変に

なるという特徴もある。(ただし, $w_j = \alpha_j |g_{jj}(s)|$; α_j は定数, と選ぶものとする)(注 11, 12).

B の標準形は, ブロック間の信号の流れが一方向的であることを意味するものである:

参考文献

- 1) 伊藤正雄: 相互干渉のある2チャンネル線形制御系の動向解析, 計測自動制御学会論文集, 4-2, 182/187(1968)
- 2) 伊藤正雄: 相互干渉を有する多チャンネル線形制御系の動向解析, 制御工学, 14-4, 205/209 (1970)
- 3) H. H. Rosenbrock: Bounds for Transfer Functions in Multivariable System IEEE Trans. Automat. Contr., **AC-18**, 54/56 (1973)
- 4) A. G. J. MacFarlane: A Survey of Some Recent Results in Linear Multivariable Feedback Theory, Automatica, 8, 455/492 (1972)
- 5) A. Ostrowski: Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale, Comment. Math. Helveticii, 10, 69/96 (1937)
- 6) M. Fiedler and V. Ptak: On Matrices with Nonpositive Offdiagonal Elements and Positive Principal Minors, Czech. Math. J., 12, 382/400 (1962)
- 7) M. Araki: M-Matrices, Publication 74/19, Department of Computing and Control, Imperial College, London (1974)
- 8) 荒木・近藤: 複合構造をもつ大規模システムの安定条件 I, システムと制御, 16, 728/736 (1972)
- 9) M. Araki & B. Kondo: Stability and Transient Behavior of Composite Nonlinear System, IEEE Trans. Automat. Contr., **AC-17**, 537/541 (1972)
- 10) H. H. Rosenbrock: The Stability of Multivariable Systems, IEEE Trans. Automat. Contr., **AC-17**, 105/107 (1972)
- 11) S. Barnett: Comments on "The Stability of Multivariable Systems", IEEE Trans. Automat. Contr., **AC-17**, 745 (1972)
- 12) F. R. Gantmacher: The Theory of Matrices I & II, (English Translation), Chelsea; New York (1959)
- 13) E. Seneta: Non-Negative Matrices, George Allen and Unwin; London (1973)
- 14) H. H. Rosenbrock: Multivariable Circle Theorems, Recent Math. Developments in Control (edited by D. J. Bell), 345/366, Academic Press: London (1973)

(注 11) Rosenbrock の方法を含めて一般に行和・列和を使って A を定めるとこのような性質をもたない (ただし, W は固定する). $g_{ji}(s)=0$; $j>l$ であれば明らかに $h_k(s; F_k)=g_{kk}(s)$; $k=1, \dots, n$ であるから, 二番目の性質は当然期待される.

(注 12) 単位系の変更に伴い $G(s) \rightarrow G(s) \cdot D$ (すなわち $B \rightarrow BD$, $W \rightarrow WD$), $H(s) \rightarrow H(s)D$, $F(s) \rightarrow D^{-1}F(s)$ と変わる. ただし, D は定数対角行列. ここで, $(BD) \cdot (WD)^{-1} = BW^{-1}$ であるから, 4節の手順中(ii)の λ は不変である. よって, (6), (7. a), (7. b) 式は ((36), (37) 式) のように書きかえられて) 不変であることがわかる.