量子化操作量を利用した準最適レギュレータ問題[†]

佐 野 昭*

Sub-Optimal Regulator Problem by Use of Quantized Controls

Akira SANO

In actual industrial control processes, quantized control signals are frequently used due to the simplicity of manipulating mechanism. In this paper an analytical method for obtaining a suboptimal feedback control law is presented for linear systems actuated by the quantized discrete control signals.

The technique consists of transforming the state space by an orthonormal matrix, approximating the minimum cost performance with one quadratic hypersurface in the transformed state space, and then deriving the switching hyperplanes separating the state regions each of which is assigned a suboptimal quantize control. The suboptimal control law is given in the form of the switching hyperplanes obtained by the solution of a nonlinear matrix difference equation for time-discrete systems or of a matrix differential equation for time-continuous systems. Advantages of the technique are that the computation of inverse matrices is not required and that only a simple analytical computation is utilized, even in the case when the dimension of the control system increases.

Furthermore, it is proved that the suboptimal control law approaches to the known non-quantized linear optimal control law as the number of quantization becomes large and the quantized level becomes small.

1. ま え が き

操作量が量子化されて離散的な値しかとらない操作量による制御方式は、操作量を連続的に変化させる制御と比較して、あらかじめとりうる操作量の振幅をいくつかに固定できるので、実際の駆動装置の微妙な振幅調整が不要となり機構的な簡略化が可能となる。本

論文は、このような量子化操作量の制御則を準最適な切換超平面の形で閉回路に実現するための解析的手法を提案し、準最適制御則の諸性質を考察する。

量子化操作量を用いて制御系を最適化する手法としてダイナミックプログラミング (DP) が考えられる。

この手法を利用して、Lewis ら¹⁾、Arora ら²⁾、は離散時間系について、Havira ら³⁾は連続時間系について最適制御を計算している。しかし、DP による方法は多変数系に対しては多大なメモリと計算時間を要するので限界がある。また、Kim ら⁴⁾は量子化操作量を整数に正規化し整数計画法を適用しているが、最適解が開回路でしか求められないなどの欠点をもっている。津川⁵⁾ は本論文と同様に最適解ではなく近似的な手法を用いて、状態が格子状に量子化されている場合の準最適制御則を求めているが、この方法でも多変数の場合はきわめて高次元の逆行列の計算を必要としている。

本論文の手法は、各時刻において最適評価関数を適当な座標変換で得られる新しい座標系で逐次一つの2次超曲面によって最小2乗近似を行ない、準最適な切換平面を計算することによって量子化操作量の準最適制御則を構成している。切換平面はある非線形の行列差分方程式 (離散時間系の場合) または行列微分方程式 (連続時間系の場合) の解によって解析的に決定され、たとえ多変数系であってもきわめて容易に制御則が与えられる。さらにこの準最適制御則は量子化の数を増大しきざみ幅を細かくするにつれて、よく知られた線形最適制御則に近づくことが保障されていることを証明する。したがって、本手法は準最適解を与えるだけでなく、微妙な振幅調整を要する線形最適制御の代用を与える意義をも、もつと思われる。

2. 問題の設定

離散時間形の状態方程式

$$x(k+1) = Ax(k) + bu(k), \quad x \in \mathcal{R}, \quad u \in \mathcal{U} \quad (1)$$

[†] 制御理論シンポジウムで発表 (昭 49・6)

第17回自動制御連合講演会で発表 (昭 49・11)

* 慶応義塾大学工学部 横浜市港北区日吉町 832

* Faculty of Engineering, Keio University, Yokohama

(Received December 13, 1974)

で記述される線形制御系を仮定する。\$\mathcal{R}\$ は \$N\$ 次元 Euclid 空間、\$x(k)\$ は \$N\$ 次元の状態ベクトル、\$u(k)\$ はスカラの操作量で、あらかじめ定められた \$(2M+1)\$ 個の離散値からなる許容操作量の集合

$$\mathcal{U} = \{0, \pm\delta_1, \pm\delta_2, \dots, \pm\delta_M\}$$

の中から選択されるものとする。\$A\$ と \$b\$ はそれぞれ、\$N \times N\$ 行列と \$N\$ 次元ベクトルを表わす。操作量の列 \$\{u(k)\}\$ を \$\mathcal{U}\$ の中から選び、評価関数

$$J = \sum_{k=0}^{K-1} \{x'(k)Qx(k) + ru^2(k)\} \quad (2)$$

を最小にすることが問題となる。ここで、\$Q\$ は正定値行列、\$r\$ は正数と仮定する。この仮定は後述の連続時間系の場合も同様である。

3. 準最適制御則の導出

3.1 準最適制御則

いま、\$x(k)\$ を初期値としてそれ以後の \$(K-k)\$ 個の操作量を最適に選んだときの評価値を \$f_{K-k}(x(k))\$ と定義すれば、最適性の原理⁶⁾から、

$$f_{K-k}(x(k)) = \min_{u(k) \in \mathcal{U}} [x'(k)Qx(k) + ru^2(k) + f_{K-k+1}(x(k+1))] \quad (3)$$

が成立する。この境界条件は、\$f_0(x(K))=0\$ である。もし操作量が連続値をとれるならば、\$f_{K-i}(x(i))\$ は正値 2 次形式、すなわち超放物面となり最適制御則は状態 \$x\$ に関して線形となることがよく知られている⁷⁾。しかし、\$\{u(k)\}\$ が離散値しかとれない場合には、\$f_{K-k+1}(x(k+1))\$ は多数の 2 次曲面の組合わせからなる非常に複雑な関数となり、解析的には求められない。

Fig. 1 A set of the switching lines \$\{S_i^*\}\$ in the two-dimensional state spaces \$X\$ and \$\tilde{X}\$

そこで、次節で述べる方法によって、\$f_{K-k+1}(x(k+1))\$ を状態変数 \$x\$ について一つの 2 次超曲面

$$f_{K-k+1}(x(k+1)) \approx x'(k+1)P(k+1)x(k+1) \quad (4)$$

で近似できたと仮定する。すると、準最適制御則 \$u^0(x, k)\$ は、(4) 式を (3) 式に代入し (1) 式を利用すると、

$$u^0(x, k) = \pm\delta_i, \quad x(k) \in \mathcal{R}_i^*(k) \subset \mathcal{R} \quad (5)$$

で与えられる。すなわち、状態 \$x(k)\$ が領域 \$\mathcal{R}_i^*(k)\$ に含まれる場合には、準最適操作量は \$\delta_i\$ となる。ただし、各領域 \$\{\mathcal{R}_i^*(k)\}\$ は、Fig. 1 に示すようにそれらを分離する切換平面群 \$\{S_i^*(k)\}\$ によって決定される。たとえば、隣接する領域 \$\mathcal{R}_i^*(k)\$ と \$\mathcal{R}_{i-1}^*(k)\$ とを分離する切換超平面 \$S_i^*(k)\$ の方程式は、二つの領域の境界上での評価値が等しいことから、

$$2b'P(k+1)Ax(k) + \{r + b'P(k+1)b\}(\delta_i + \delta_{i-1}) = 0 \quad (6)$$

となり、これによって準最適制御則が定められる。

さて、(5)、(6) 式による制御則を (3) 式へ代入すると、

$$\begin{aligned} f_{K-k}(x(k)) &= x'(k)\{Q + A'P(k+1)A\}x(k) \\ &\quad + 2b'P(k+1)Ax(k)\delta_i + \{r + b'P(k+1)b\}\delta_i^2 \\ &\quad x(k) \in \mathcal{R}_i^*(k) \subset \mathcal{R}, \quad i=0, 1, \dots, M \end{aligned} \quad (7)$$

となり、各領域 \$\mathcal{R}_i^*(k)\$ ごとにそれぞれ異なる \$(2M+1)\$ 個の放物面が連なった複雑な超平面を表わす。(7) 式の超曲面を次節の方法で再び一つの 2 次超曲面

$$f_{K-k}(x(k)) \approx x'(k)P(k)x(k) \quad (8)$$

で近似すると、(5)、(6) 式の導出の場合と同様にして、\$(k-1)\$ 時刻における切換平面群 \$\{S_i^*(k-1)\}\$ が求まり、これらによって分割される各領域 \$\{\mathcal{R}_i^*(k-1)\}\$ が定まり準最適制御則 \$u^0(x, k-1)\$ が与えられる。このような手続きを \$k=K\$ から \$k=1\$ まで行なうと各時刻における準最適な切換超平面群 \$\{S_i^*(K-1)\} \sim \{S_i^*(0)\}\$ が求まる。

3.2 超曲面の最小 2 乗近似

本節では、(7) 式の超曲面を (8) 式の一つの超曲面で近似するときに、まず、つぎの評価

$$g = \int_{\mathcal{R}_b} \{x'P(k)x - f_{K-k}(x)\}^2 dx \quad (9)$$

を最小にする \$P(k)\$ を求める場合を考えてみると、この積分値が有限となるように有界領域 \$\mathcal{R}_b\$ を適当に選び、積分計算を実行することはきわめて難しい。そ

ここで、 x が定義されている N 次元の座標系 X を $N-1$ 回の回転移動によって新しい直交座標系 $\tilde{X}$ へ直交変換し、 $\tilde{X}$ において (9) 式に相当する評価

$$\tilde{g} = \int_{\tilde{\mathcal{R}}_b} \{ \tilde{x}' \tilde{P} \tilde{x} - f_{K-k}(\tilde{x}) \} d\tilde{x} \quad (10)$$

を最小にする $\tilde{P}$ を求めることにする。

変換行列 $\Phi(k)$ による X から $\tilde{X}$ への直交変換

$$x = \Phi(k) \tilde{x} \quad (11)$$

を使うと、切換平面 $S_i^{\pm}(k)$ は新しい座標系 $\tilde{X}$ では、
 $2b'P(k+1)A\Phi(k)\tilde{x}$

$$\pm \{ r + b'P(k+1)b \} (\delta_i + \delta_{i-1}) = 0 \quad (12)$$

へ変換される。ここで、変換行列 $\Phi(k)$ を (12) 式が、

$$\beta_i(k) \tilde{x}_i \pm \{ r + b'P(k+1)b \} (\delta_i + \delta_{i-1}) = 0 \quad (13)$$

$$\tilde{x}_i \in S_i^{\pm}(k), \quad i=1, \dots, M$$

と表わされるように選ぶとする。ここで、 $\tilde{x}_i$ は $\tilde{x}$ の i 番目の要素である。いいかえれば、 $\Phi(k)$ を適当に選んで新しい座標系 $\tilde{X}$ の $\tilde{x}_i$ 座標軸が (6) 式の切換平面に垂直に直交するように座標系 X を回転させるわけである (Fig. 1 を参照)。 $L, \beta_i(k)$ および $\Phi(k)$ の求め方は次節でまとめて説明する。さて、(11) 式の変換によって、(7) 式の超曲面は座標系 $\tilde{X}$ では、

$$\begin{aligned} f_{K-k}(\tilde{x}) &= \tilde{x}' \Phi'(k) \{ Q + A'P(k+1)A \} \Phi(k) \tilde{x} \\ &\quad \pm \delta_i \beta_i(k) \tilde{x}_i + \{ r + b'P(k+1)b \} \delta_i^2 \\ &\quad \tilde{x} \in \tilde{\mathcal{R}}_i^{\pm}(k), \quad i=0, 1, \dots, M \end{aligned} \quad (14)$$

と表わすことができる。ここで、

$$\left. \begin{aligned} C(k) &\triangleq Q + A'P(k+1)A, \\ d(k) &\triangleq 2A'P(k+1)b, \\ \alpha(k) &\triangleq r + b'P(k+1)b \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\tilde{C}(k) \triangleq \Phi'(k)C(k)\Phi(k), \quad \tilde{P}(k) \triangleq \Phi'(k)P(k)\Phi(k) \quad (16)$$

と定義し (以下では煩雑を避けるために時刻を表わす添字を省略する)、 $\tilde{X}$ での (10) 式の積分評価

$$\tilde{g} = \sum_{i=0}^M \int_{\tilde{\mathcal{R}}_i^{\pm}} [\tilde{x}' \tilde{P} \tilde{x} - \{ \tilde{x}' \tilde{C} \tilde{x} \pm \delta_i \beta_i \tilde{x}_i + \alpha \delta_i^2 \}]^2 d\tilde{x} \quad (17)$$

を最小にする $\tilde{P}$ をまず求めることにする。ここで、例えば、 $\tilde{\mathcal{R}}_1^-$ は超直方体

$$\begin{aligned} \{ |\tilde{x}_j| \leq L(k), \quad j=1, \dots, N, \quad j \neq l; \\ \beta_i^{-1} \alpha (\delta_i + \delta_{i-1}) \leq \tilde{x}_i \leq \beta_i^{-1} \alpha (\delta_i + \delta_{i+1}) \} \end{aligned} \quad (18)$$

を表わす (Fig. 1)。ただし、 $L(k)$ は $\beta_i^{-1}(k) \alpha(k) (\delta_M + \delta_{M-1})$ より大きい適当な実数とし、特に一様量子化の場合 ($\delta_i = i\delta$; δ は量子化幅) には、 $L(k)$ は

$$L(k) = \beta_i^{-1}(k) \alpha(k) (2M+1)\delta \quad (19)$$

に選ぶとする。すなわち、(17) 式の積分を $\tilde{X}$ で行ない、しかも積分範囲全体を超立方体 $\tilde{\mathcal{R}}_b = \{ |\tilde{x}_j| \leq L(k) \}$ の内部に限定して最小 2 乗近似の $\tilde{P}(k)$ を求めるわけで

ある。 $L(k)$ は時刻によって変化するが、一様量子化の場合、(19) 式のように選ぶ理由はあとで明らかにされる。

行列 $\tilde{P}, \tilde{C}$ の各要素を $\tilde{p}_{mn}, \tilde{c}_{mn}$ とすれば、 $\partial \tilde{g} / \partial \tilde{p}_{mn} = 0$ ($m, n=1, \dots, N$) から最適な $\tilde{p}_{mn}$ の満たすべき必要条件

$$\begin{aligned} &\int_{\tilde{\mathcal{R}}_b} \tilde{x}' \tilde{P} \tilde{x} \tilde{x}_m \tilde{x}_n d\tilde{x} \\ &= \int_{\tilde{\mathcal{R}}_b} \tilde{x}' \tilde{C} \tilde{x} \tilde{x}_m \tilde{x}_n d\tilde{x} \\ &\quad + \sum_{i=1}^M \int_{\tilde{\mathcal{R}}_i^{\pm}} \{ \alpha \delta_i^2 \pm \delta_i \beta_i \tilde{x}_i \} \tilde{x}_m \tilde{x}_n d\tilde{x} \end{aligned} \quad (20)$$

が得られる。(20) 式の積分を各要素別に実行すると、結果はつぎのようにまとめられる。

$$(i) \quad m \neq n \quad \text{のとき}, \quad \tilde{p}_{mn} = \tilde{c}_{mn} \quad (21)$$

$$(ii) \quad m = n \neq l \quad \text{のとき},$$

$$\frac{1}{5} \tilde{p}_{mm} + \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq m)}}^N \tilde{p}_{jj} = \frac{1}{5} \tilde{c}_{mm} + \frac{1}{9} \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq m)}}^N \tilde{c}_{jj} + \xi \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\alpha^2}{6\beta_i L^3} \left[\sum_{i=1}^{M-1} \delta_i (\delta_{i-1}^2 - \delta_{i+1}^2) + \delta_M (\delta_{M-1}^2 - \delta_M^2) \right] \\ &\quad - \frac{\delta_M (\alpha \delta_M - \beta_i)}{L (3L - 6)} \end{aligned} \quad (23)$$

$$(iii) \quad m = n = l \quad \text{のとき},$$

$$\frac{1}{5} \tilde{p}_{ll} + \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq l)}}^N \tilde{p}_{jj} = \frac{1}{5} \tilde{c}_{ll} + \frac{1}{9} \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq l)}}^N \tilde{c}_{jj} + \eta \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\alpha^4}{12\beta_i^3 L^5} \left[\sum_{i=1}^{M-1} \delta_i \{ (\delta_i + \delta_{i+1})^3 (\delta_i - 3\delta_{i+1}) \right. \\ &\quad \left. + (\delta_{i-1} + \delta_i)^3 (3\delta_{i-1} - \delta_i) \} \right. \\ &\quad \left. + \delta_M (\delta_{M-1} + \delta_M)^3 (3\delta_{M-1} - \delta_M) \right] \\ &\quad - \frac{\delta_M (\alpha \delta_M - \beta_i)}{L (3L - 4)} \end{aligned} \quad (25)$$

ここで、 ξ, η は陽には系の次数 N にはよらない定数である。(22), (24) 式は N 元連立代数方程式であるが、解析的に解くことができ (注 1)、結局、最適近似解 $\tilde{P}(k)$ は、

$$\tilde{P}(k) = \tilde{C}(k) - H(k) \quad (26)$$

$$H(k) = \text{diag}(\omega, \dots, \omega, \underset{\substack{\uparrow \\ 1}}{\omega}, \omega, \dots, \omega, \underset{\substack{\uparrow \\ l}}{\omega}, \omega, \dots, \omega, \underset{\substack{\uparrow \\ N}}{\omega}) \quad (27)$$

(注 1) つぎの $N \times N$ 対称行列の逆行列が、以下で与えられることを利用すればよい。

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \dots & \dots & \frac{1}{9} \\ & \ddots & & \\ & & \frac{1}{5} & \frac{1}{9} \\ & & \vdots & \vdots \\ & & \frac{1}{9} & \ddots \\ & & \vdots & & \frac{1}{5} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{45(5N-1)}{4(5N+4)} & \dots & \dots & \frac{225}{4(5N+4)} \\ & \ddots & & \\ & & \frac{225}{4(5N+4)} & \dots \\ & & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\omega = \frac{45(9\xi - 5\eta)}{4(5N+4)}, \quad \lambda = \frac{225N(\eta - \xi) + 45(5\xi - \eta)}{4(5N+4)} \quad (28)$$

で与えられる。ここで、 $H(k)$ は対角行列を表わす。このようにして、制御系が N 次の変数系であっても簡単に $\tilde{P}$ の各要素を計算できることが明らかになった。

さて、 $\tilde{P}(k)$ が得られると、求めるべき (8) 式の最適近似解 $P(k)$ は、(15), (16), (26) 式から、

$$P(k) = A'P(k+1)A + Q - \Phi(k)H(k)\Phi'(k), \\ P(K) = 0 \quad (29)$$

の解として逐次計算され、切換平面 (6) が定められる。

3.3 変換行列 Φ の決定法

本節では、 $l, \beta_i(k), \Phi(k)$ の選び方を説明する。切換平面 (6) 式は、(15) 式を使うと、

$$\sum_{j=1}^N d_j x_j \pm \alpha(\delta_i + \delta_{i-1}) = 0, \quad i=1, \dots, M \quad (30)$$

と表わされるが、変換行列 Φ は座標系 X での (30) 式が変換された座標系 $\tilde{X}$ において (13) 式で表わされるように決定することはすでに述べた。このとき、 $\tilde{x}$ のどの要素を $\tilde{x}_i$ として残すかは本質的ではないが、 $N-1$ 回の回転変換の角度をすべて $\pi/4$ 以下に唯一に決めるために、 l を $\{|d_j|\}$ の中の最大値を与える要素番号に選ぶことにする。すると、変換行列 Φ は、 $N-1$ 回の座標系の回転変換行列⁹⁾から、

$$\Phi = \Phi^{(1)} \dots \Phi^{(l-1)} \Phi^{(l+1)} \dots \Phi^{(N)} = \prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq l)}}^N \Phi^{(s)} \quad (31)$$

で与えられる。ただし、

$$\Phi^{(s)} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 & & 0 \\ & \ddots & & & \\ 0 & \cos \theta_s & -\sin \theta_s & & \dots s(\neq l) \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & \sin \theta_s & \dots \cos \theta_s & & \dots l \\ 0 & & 0 & & 1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$\theta_s = \begin{cases} -\tan^{-1}(d_s/d_l^{(s-1)}); & s < l, \quad d_l^{(0)} = d_l \\ \tan^{-1}(d_s/d_l^{(s-1)}); & s > l \end{cases} \quad (33)$$

$$d_l^{(s-1)} = \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^{s-1} d_j^2 + d_s^2 \right)^{1/2}; & s=2, \dots, l \\ \left(\sum_{j=1}^s d_j^2 \right)^{1/2}; & s=l+1, \dots, N \end{cases} \quad (34)$$

とする。(13) 式の β_i は、

$$\beta_i = d_l^{(N-1)} = \left(\sum_{j=1}^N d_j^2 \right)^{1/2} \quad (35)$$

で与えられる。したがって、結局、 β_i は l には依存しないので、 $\beta_i(k)$ を $\beta(k)$ と書くことにする。

さて、直交変換行列 $\Phi(k)$ が求まれば、(29) 式は最

終的に、

$$P(k) = A'P(k+1)A + Q \\ - \{\lambda(k) - \omega(k)\} \beta^{-2}(k) d(k) d'(k) + \omega(k) I, \\ P(K) = 0 \quad (36)$$

となり(注2)、この解 $P(k)$ を用いて各切換平面 (6) が決定される。ここで、 I は単位行列、 β, d および λ, ω はそれぞれ (35), (15), (28) 式で与えられ、いずれも行列 $P(k+1)$ の要素を含むので (36) 式は P に関する非線形の差分方程式になっている。この方程式は結局、要素番号 l にはよらない点に注目すべきである。

4. 連続時間系への拡張

状態方程式、評価関数がそれぞれ、

$$\dot{x}(t) = \hat{A}x(t) + \hat{b}u(t), \quad x \in \mathcal{R}, \quad u \in \mathcal{U} \quad (37)$$

$$J = \int_0^T \{x'(t) \hat{Q} x(t) + \hat{r} u^2(t)\} dt \quad (38)$$

で与えられる連続時間系のレギュレータ問題を考える。微小なサンプリング間隔 τ を導入して、(37), (38) 式を離散時間系に変換すると、(1), (2) 式において、 A, b, Q および r をそれぞれ $I + \tau \hat{A}, \tau \hat{b}, \tau \hat{Q}$ および $\tau \hat{r}$ におきかえた系が得られる。これらを (29) 式に代入して、 $\tau \rightarrow 0$ とすれば、 $P(t)$ の満足すべき微分方程式

$$\dot{P}(t) = -\hat{A}'P(t) - P(t)\hat{A} + \hat{\Phi}(t)\hat{H}(t)\hat{\Phi}(t) - \hat{Q} \quad (39)$$

が得られる。ここで、 $P(T) = 0$ 、 $\hat{\Phi}(t)$ は、 d を

$$\hat{d}(t) = 2P(t)\hat{b} \quad (40)$$

におきかえて (31) ~ (34) 式から計算される変換行列であり、 $\hat{H}(t)$ は、 d を $\hat{d}(t)$ におきかえた (35) 式の $\hat{\beta}(t)$ を用い、(23), (25) 式の α を $\hat{r}$ におきかえて計算される (27) 式の行列を表わす。(36) 式の導出の場合と同様に、(39) 式は簡単化され、つぎの非線形行列微分方程式

$$\dot{P}(t) = -\hat{A}'P(t) - P(t)\hat{A} \\ + \{\lambda(t) - \omega(t)\} \hat{\beta}^{-2}(t) \hat{d}(t) \hat{d}'(t) \\ + \omega(t) I - \hat{Q}, \quad P(T) = 0 \quad (41)$$

となる。 λ, ω は、 d と α をそれぞれ $\hat{d}$ と $\hat{r}$ におきかえて計算される (23), (25) 式の ξ, η を (28) 式に代入して求められる。

行列 $P(t)$ が求まれば、離散時間系の場合と同様に、切換超平面群 $\{S_i^+(t)\}$ の方程式は、

(注2) (31) ~ (34) 式を利用すると、(29) 式右辺第3項の行列 $\Phi H \Phi'$ の対角 (n, n) 要素は、

$$\left(\sum_{j=1}^N d_j^2 \right)^{-1} \left\{ \omega \sum_{j=1(\neq n)}^N d_j^2 + \lambda d_n^2 \right\},$$

非対角 (n, m) 要素は $(\lambda - \omega) \left(\sum_{j=1}^N d_j^2 \right)^{-1} d_n d_m$ となることを利用すればよい。

$$2b'P(t)x(t) \pm f(\delta_{i-1} + \delta_i) = 0 \quad i=1, \dots, M \quad (42)$$

となる。準最適制御則は、

$$u^0(x, t) = \pm \delta_i, \quad x(t) \in \mathcal{R}_i^\pm(t) \quad \text{のとき} \quad (43)$$

で与えられる。各領域 $\mathcal{R}_i^\pm(t)$ は切換平面群 $\{\mathcal{S}_i^\pm(t)\}$ で Fig. 1 のように決定されるのは 3. と同様である。

5. 一様量子化準最適操作量の性質

5.1 離散時間系の場合

一様量子化、すなわち $\delta_i = i\delta$ (δ は量子化幅) の場合には、(23), (25) 式の ξ, η は (19) 式で与えた $L(k)$ と級数の有限和の公式を用いると、

$$\xi = \frac{\beta^2 M(M+1)}{9\alpha(2M+1)^2} \quad (44)$$

$$\eta = \frac{\beta^2 M(M+1)(36M^2 + 36M + 13)}{45\alpha(2M+1)^4} \quad (45)$$

と簡単になる。

操作量が連続値をとりうる場合の線形最適制御則⁷⁾を $u^*(x, k)$ と定義すれば、

$$u^*(x, k) = -\frac{\alpha^{-1}(k)d^*(k)x(k)}{2} \quad (46)$$

で与えられる。ここで、 $\alpha^*(k), d^*(k)$ は、

$$d^*(k) \triangleq 2A'P^*(k+1)b, \quad \alpha^*(k) \triangleq r + b'P(k+1)b \quad (47)$$

であり、 $P^*(k)$ は、

$$P^*(k) = A'P^*(k+1)A + Q - \frac{1}{4}\alpha^{-1}(k)d^*(k)d^{*'}(k) \quad (48)$$

から求められる。ただし、 $P^*(K) = 0$ 。また、初期値 $x(k)$ に対する最適評価値は、

$$f_{N-k}^*(x(k)) = x'(k)P^*(k)x(k) \quad (49)$$

で表わされる。

さて、量子化の幅を無限に細かくして行なったとき、本論文の準最適制御則 $u^0(x, k)$ は上の線形最適制御則に一致する性質をもつことを証明する。

【性質 1】 (17) 式の積分範囲 $\hat{\mathcal{R}}_b$ を定める $L(k)$ を (19) 式で定め、 $M \rightarrow \infty$ とすれば、

$$P(k) = P^*(k), \quad k=0, \dots, K \quad (50)$$

が成立する。

(証明) (44), (45) 式において、 $M \rightarrow \infty$ とすれば、 ξ, η はそれぞれ、 $\xi \rightarrow \alpha^{-1}(k)/36$, $\eta \rightarrow \alpha^{-1}(k)\beta^2(k)/20$ となり、これらを (28) 式に代入すれば、 $\omega(k) \rightarrow 0$, $\lambda(k) \rightarrow \alpha^{-1}(k)\beta^2(k)/4$ となることがわかる。したがって、 $M \rightarrow \infty$ のとき、(36) 式は、

$$P(k) = A'P(k+1)A + Q - \frac{1}{4}\alpha^{-1}(k)d(k)d'(k) \quad (51)$$

となり、 $\alpha(k), d(k)$ は (15) 式で与えられているので、

(48), (51) 式は同一となり、 $k=K$ における境界条件 $P(K) = P^*(K) = 0$ から、任意の $k=K-1, \dots, 0$ について $P(k) = P^*(k)$ が成立する。

【性質 2】 $L(k)$ を (19) 式で定め、 $\delta \rightarrow 0$ ($M \rightarrow \infty$) とすれば、任意の k について、 $u^0(x, k) = u^*(x, k)$ が成立する。

(証明) 準最適制御則 $u^0(x, k)$ は、

$$u^0(k) = -i\delta \equiv w, \quad x(k) \in \mathcal{R}_i^-(k) \quad \text{のとき} \quad (52)$$

で与えられている。ただし、

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_i^-(k) &= \{x(k); (2i-1)\delta\alpha(k) \\ &\leq d'(k)x(k) \leq (2i+1)\delta\alpha(k)\} \end{aligned} \quad (53)$$

である。ここで、 $i = -w/\delta$ を (53) 式へ代入し、 $\delta \rightarrow 0$ とすれば、 $\mathcal{R}_i^-(k)$ は一つの超平面

$$d'(k)x(k) + 2\alpha(k)w = 0 \quad (54)$$

に近づく。したがって、(54), (50), (46) 式から、

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} u^0(x, k) &= -\frac{\alpha^{-1}(k)d'(k)x(k)}{2} \\ &= -\frac{\alpha^{-1}(k)d^*(k)x(k)}{2} = u^*(x, k) \end{aligned} \quad (55)$$

となり、性質 2 が証明される。

5.2 連続時間系の場合

前節のおきかえを行えば、(44), (45) 式は、それぞれ

$$\xi = \frac{\beta^2(t)M(M+1)}{9f(2M+1)^2} \quad (56)$$

$$\eta = \frac{\beta^2(t)M(M+1)(36M^2 + 36M + 13)}{45f(2M+1)^4} \quad (57)$$

となり、これを (28) 式へ代入した $\hat{\omega}, \hat{\lambda}$ を用い、さらに、 $\hat{\beta}^2 = \hat{d}'\hat{d}$ と (40) 式を (41) 式へ代入すると、結局

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= -\hat{A}'P(t) - P(t)\hat{A} + \hat{\rho}P(t)\hat{b}\hat{b}'P(t) \\ &\quad + \hat{\sigma}\hat{b}'P(t)P(t)\hat{b}I - \hat{Q}, \quad P(T) = 0 \end{aligned} \quad (58)$$

が得られる。ただし、

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= 4(\hat{\lambda}(t) - \hat{\omega}(t))\hat{\beta}^{-2}(t) \\ &= \frac{8M(M+1)(2M^2 + 2M + 1)}{f(2M+1)^4} \end{aligned} \quad (59)$$

$$\hat{\sigma} = -\frac{20M(M+1)}{r(5N+4)(2M+1)^4} \quad (60)$$

とする。(58) 式は Riccati の微分方程式に類似しているが、第 4 項が含まれるために異なる形の非線形微分方程式である。

さて、線形最適制御則を $u^*(x, t)$ と定義すれば、

$$u^*(x, t) = -\hat{r}^{-1}\hat{b}'P^*(t)x(t) \quad (61)$$

で与えられ、 $P^*(t)$ は Riccati の微分方程式

$$\begin{aligned} \dot{P}^*(t) = & -\hat{A}'P^*(t) - P^*(t)\hat{A} \\ & + \hat{r}^{-1}P^*(t)\hat{b}\hat{b}'P^*(t) - \hat{Q} \end{aligned} \quad (62)$$

から求められる。ただし、 $P^*(T)=0$ とする。

連続時間系の場合も、量子化の幅を無限に細かくすると ($M \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$)、準最適制御則は (61) 式へ近づくことが証明される。

【性質 1'】 $M \rightarrow \infty$ のとき、 $P(t) \rightarrow P^*(t)$ が成立する。

【性質 2'】 $M \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$ のとき、 $u^\circ(x, t) \rightarrow u^*(x, t)$ が成立する。

性質 1' は (59), (60) 式において、 $M \rightarrow \infty$ とすれば、 $\hat{\mu} \rightarrow r^{-1}$, $\hat{\sigma} \rightarrow 0$ となり、(58) 式と (62) 式とが一致することから明らか。性質 2' の証明は性質 2 と同様。

以上では、 $x'Px$ が楕円形放物面、すなわち行列 P が正定値になるものと仮定して議論を進めてきたが、一般にはこの正定値性を保証することは難しい。しかし、ここで取扱った一様量子化操作量の場合にはつぎの性質が成立する。

【性質 3】 行列 $P(t)$ は正定値である。

(証明) ベクトル $e = \hat{\mu}P\hat{b}$ を定義し、(58) 式を書き直すと、

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) = & -(\hat{A} - \hat{b}e')'P(t) - P(t)(\hat{A} - \hat{b}e') \\ & - e\hat{\mu}^{-1}e' + \hat{\sigma}\hat{b}'P(t)P(t)\hat{b} - \hat{Q}, \quad P(T)=0 \end{aligned} \quad (63)$$

となる。この解は、 $\dot{x} = (\hat{A} - \hat{b}e')x$ の遷移行列⁹⁾ $G(t, \tau)$ を利用すると、つぎの積分方程式

$$\begin{aligned} P(t) = & \int_t^T G'(\tau, t)[e(\tau)\hat{\mu}^{-1}e'(\tau) + \hat{Q} \\ & - \hat{\sigma}\hat{b}'P(\tau)P(\tau)\hat{b}I]G(\tau, t)d\tau \end{aligned} \quad (64)$$

を満足する。一方、(59), (60) 式から $\hat{\mu}^{-1} > 0$, $\hat{\sigma} < 0$, および $\hat{Q}$ の正定値性の仮定から (64) 式のカッコの中が正定値行列となり、 $P(t)$ の正定値性が証明された。

6. 適用例

量子化操作量の最適制御則は一般に複雑な切換超平面で与えられると予想されるが、本手法では準最適解として切換超平面の形で与えていることになる。2次系に適用した例ではこの近似解はきわめて良好な結果をおさめている¹⁰⁾。本節では、本手法の別の観点、すなわち線形最適制御則の代用として使えることを例題を通して説明する。

状態方程式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

で記述される3次系を考える。評価関数は、(38) 式で $\hat{Q} = I$, $\hat{r} = 0.05$, $T = 3.0$ と仮定する。Fig. 2 に、 M と δ を変化させて、本手法の準最適解 $u^\circ(x, t)$ と線形最適制御則 $u^*(x, t)$ との比較を示した。図示したよう

Fig. 2 Comparison of the suboptimal quantized control law with the linear optimal control for various quantization levels

Table 1 Degradation of suboptimal cost performance for various M and δ

	performance degradation
$M=2, \delta=8$	3.8%
$M=4, \delta=4$	0.4%
$M=8, \delta=2$	0.2%
$M=16, \delta=1$	0.1%
linear optimal	—
initial state $x(0)=(2, 3, -4)$	

に、量子化があらわい場合には bang-bang 動作が一部に生じ、等価的に量子化幅よりも小さい振幅の操作量を発生させている点は興味深い。Table 1 に示すように、 M をかなり少なくしても、評価値がそれほど劣化しないので、機械的にも実現しやすい本論文の制御則は、連続的に振幅調整を必要とする線形最適制御則の代わりとして十分に使えるであろう。

本手法は高次系についても有力であり、8 次系への適用例でもよい結果が得られている¹⁰⁾。

7. む す び

本論文は、従来数値計画法等を使ってしか求められなかった量子化操作量による多変数制御系の最適制御則を近似的な手法ではあるが解析的に簡単に構成する方法を示した。制御則は、機構的にも実現しやすい切換平面群の形で与えられ、これらの平面の方程式は、離散時間系の場合には行列差分方程式(36)、連続時間系の場合には非線形の微分方程式(41)の解によって決

定される。さらにこの制御則は量子化を細かくすることにつれて、線形最適制御則と一致することが保証されていることを明らかにした。

操作量が多次元の場合には、一般の最適制御問題と同様にスカラの場合と比較してかなり複雑となり、この問題は今後の問題として検討している。

参 考 文 献

- 1) J.B. Lewis & J.T. Tou: Optimum Sampled-date Sytems with Quantized Control Signals, Trans. AIEE, **82**, 229/233 (1963)
- 2) J.K Arora & D.A. Pierre: Optimal Trajectories for Multi-dimensional Nonlinear Process by Iterated Dynamic Programming, IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetics, **SMC-3-1**, 85/91 (1973)
- 3) R.M. Havira & J.B. Lewis: Computation of Quantized Control Using Differential Dynamic Programming, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-17-2**, 191/196 (1972)
- 4) M. Kim & K. Djadjuri: Optimum Sampled Data Control Systems with Quantized Control Function, ISA Trans., **6**, 65/73 (1967)
- 5) 津川：フィードバック制御系での準最適状態量子化，計測自動制御学会論文集，**9-3**，320/327 (1973)
- 6) R. Bellman: Dynamic Programming, Princeton University Press (1957)
- 7) J.T. Tou: Optimum Design of Digital control Systems, Academic Press (1963)
- 8) 佐武：行列と行列式，裳華房 (1964)
- 9) R. W. Brockett: Finite Dimensional Linear Systems, John Wiley & Sons (1970)
- 10) 佐野・三浦：離散値操作量による線形制御系の準最適化，制御理論シンポジウム資料 (1974)