非線形レギュレータの構成[†]

大久保 重 範*・北 森 俊 行*

Construction of Nonlinear Regulator

Shigenori OHKUBO* and Toshiyuki KITAMORI*

This paper presents a construction of the optimal regulator system of a nonlinear controlled process.

Here the process is described in a power series of Kronecker products of the state vector. The nonlinear description is a natural extension of the usual linear matrix notation. All the mathematical manipulation is conducted in the tensor products. The method is straight forward to obtain the unique solution without any arbitrariness in the expression and the manipulation.

The steps towards the solution are as follows:

(1) To build the Hamiltonian, and to get the canonical equation and the maximizing equation of the Hamiltonian with respect to the control (u).

(2) To expand the adjoint vector in a series of Kronecker powers of the state vector, and to substitute it into the canonical equation.

(3) To equate the coefficients of the same Kronecker powers in the both sides of the canonical equation, and to obtain a set of equations which must be fulfilled by the optimal feedback coefficient tensors ($K_n, n=1, 2, \dots$).

The equation for K_1 coincides with the Riccati equation of the linear optimal regulator problem for the linear part of the controlled object. The stationary $K_n (n \geq 2)$ can be obtained from well-posed linear matrix equations successively for $n=2, 3, \dots$.

By induction, K_n 's are proved to be $(1, n)$ type complete symmetric tensors.

When the process is odd nonlinear and the performance function is even nonlinear, the optimal feedback becomes odd nonlinear.

An example with a third-power-nonlinear process, a forth-power-nonlinear performance function, and a third-power optimal feedback,

showed much improved responses over the linearized optimal feedback, especially for the large initial states.

1. は し が き

本論文は、非線形システムをテンソル積で記述し、最適レギュレータの構成について述べたものである。本稿での非線形システムは、状態の高次テンソル積とその係数テンソルの行列積で記述され、線形システムにおける行列表示の自然な拡張になっている。そのため、複雑な高次非線形システムでも簡潔に表現できる。状態の高次テンソル積は、成分によって同じものがでてくるが、これらに対する係数成分は等しくとり、係数テンソルを共変対称に設定することができる。本方法は、システムの記述に任意性を含まず、係数テンソルによって一意的に決定される。

非線形システムの解析が、線形の場合と比べて困難であるのは、構造の複雑さのみならず、システムを把握する手段として、線形におけるような一意的かつ簡潔な方法をとっていない点にも原因があると考えられる。従来における非線形レギュレータの解法には、Garrard¹⁾ らの ε 摂動法、Burghart²⁾ の級数展開法等がある。これらはシステムを記述するのに、状態変数を含む係数行列を使っているため、システムの記述が係数行列の選び方に依存する。そのことが、ハミルトン・ヤコビの方程式から、フィードバック係数に関する行列微分方程式を誘導する場合、任意性を含み、制御則を一意的に決定することができない。

西川³⁾ らは、同様の記述法をとって扱っているが、解が一意的に定まる条件について別に考察している。ほかの解法に、Pearson⁴⁾ の瞬時形化法がある。これは状態変数の数が多くなると、接続条件が複雑になり、計算が困難である。本研究による方法では、最大原理の正準方程式から、フィードバック係数に関するテンソル方程式を分離する場合、共変部の対称性を考慮しているので、解法に任意性は含まず、制御則が一

[†] 第 11 回計測自動制御学会学術講演会で発表 (昭 47・8)

* 東京大学工学部 東京都文京区本郷 7-3-1

* Faculty of Engineering, University of Tokyo, Bunkyo-ku, Tokyo

(Received May 1, 1974)

意的に決定される。状態の n 次非線形フィードバック係数 (K_n) は、安定なテンソル微分方程式の定常解として求まり、定数フィードバックの形で最適レギュレータが構成される。

$n=1$ のときは、線形部における最適レギュレータのリカッチ方程式を解く。 $n \geq 2$ のときは、 K_n の方程式は、 K_n に関して線形であり、その定常解を求めるには、逆行行列が存在する well-posed な線形行列方程式を解けばよい。それゆえ、 K_n ($n \geq 2$) の数値計算はきわめて容易である。システムの非線形性が奇数次、評価関数の非線形性が偶数次である場合は、利用価値が高いが、最適フィードバックも奇数次になり、構成が容易になる。本稿における非線形レギュレータの解析には、テンソルに関する種々の演算を使用しており、これらの定義および性質については、付録を参照されたい。

2. 問題の設定

システム方程式が (2.1) 式、評価関数が (2.2) 式である場合、 $J \rightarrow \min$ にする最適制御則 u を状態フィードバックの形で構成する。

$$\dot{x} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^{[n]} + Bu \quad (2.1)$$

$$J = \int_0^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} x' Q_n x^{[n]} + \frac{1}{2} u' R u \right\} dt \quad (2.2)$$

x : $m \times 1$ 状態ベクトル

u : $r \times 1$ 制御ベクトル

A_n : $(1, n)$ 形 ($m \times m^n$) 共変対称テンソル

Q_n : $(1, n)$ 形 ($m \times m^n$) 完全対称テンソル

R : $r \times r$ 対称正定値行列

(評価関数における $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} x' Q_n x^{[n]}$ は、任意の x に対して、 $g(x) \geq 0$ である。システム、および評価関数の x に関する次数が、ただだか N である場合は、 $(N+1)$ 以上の係数は零であるものとし、級数で与えられる場合、その収束性は保証されるとして扱う。したがって、 $g(x)$ が N 次多項式の場合は、 $g(x) \geq 0$ の必要条件から、 N は偶数をとるものとする。)

3. 最適フィードバックの決定

(2.1), (2.2) 式におけるハミルトニアン H は

$$H = - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} x' Q_n x^{[n]} + \frac{1}{2} u' R u \right) + \phi' \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n x^{[n]} + Bu \right) \quad (3.1)$$

である。 H の u による最適化、および正準方程式より、

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -Ru + B' \phi = 0 \quad (3.2)$$

$$u = R^{-1} B' \phi \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= - \frac{\partial H}{\partial x} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} Q_n x^{[n]} - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n A_n^{\sigma(ijk)} A_n^{\sigma(ijk)} \times (x \otimes \cdots \otimes \phi \otimes \cdots \otimes x) \end{aligned} \quad (3.4)$$

が求まる。ここで

$$\frac{\partial}{\partial x} \phi' A_n x^{[n]} = \sum_{k=1}^n A_n^{\sigma(ijk)} (x \otimes \cdots \otimes \phi \otimes \cdots \otimes x) \quad (3.5)$$

である。

ハミルトン、ヤコビの方程式では (2.2) 式の下限を t とおいた最小評価関数

$$V(x, t) = \min_u \int_t^{\infty} \left\{ g(x) + \frac{1}{2} u' R u \right\} dt$$

に関し、 V, V_x の連続微分可能性を仮定しており⁵⁾、本節でもこれを用いる。 $\phi = -\partial V / \partial x$ であるから、 $\phi(t, x)$ は、 t の連続微分可能関数を係数として、任意の x のまわりに展開可能である。したがって、補助ベクトル ϕ を x のクロネッカ冪級数に展開した形に設定する。(3.6) 式の級数が収束する場合、(3.7) 式の制御則 u は最適解を与える。

$$\begin{aligned} \phi &= - \sum_{n=1}^{\infty} K_n x^{[n]} \\ (K_n \text{ は、} t \text{ の連続微分可能関数}) \end{aligned} \quad (3.6)$$

K_n : $(1, n)$ 形 ($m \times m^n$) 共変対称テンソル

これを、(3.3), (2.1) 式および (3.4) 式に代入すると

$$u = -R^{-1} B' \sum_{n=1}^{\infty} K_n x^{[n]} \quad (3.7)$$

$$\dot{x} = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n - B R^{-1} B' K_n) x^{[n]} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \sum_{n=1}^{\infty} Q_n x^{[n]} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n A_n^{\sigma(ijk)} x^{[k-1]} \\ &\quad \otimes \left(\sum_{m=1}^{\infty} K_m x^{[m]} \right) \otimes x^{[n-k]} \end{aligned} \quad (3.9)$$

を得る。つぎに (3.9) 式の総和の順序を交換し、係数テンソルの共変部を対称化し、 x について整頓すると (付録の A.4, A.6 を参照) (3.10) 式になる。

$$\dot{\phi} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(Q_n + \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^l A_l^{\sigma(ijk)} (K_{n-l+1}) \binom{l}{l} \right) S_n x^{[n]} \quad (3.10)$$

つぎに (3.6) 式で設定した ϕ を時間で微分し、(3.8) 式の $\dot{x}$ を代入し、付録4. (2) の公式を使って x について整頓する。

$$\begin{aligned} \dot{\phi} = & - \sum_{n=1}^{\infty} \dot{K}_n x^{[n]} \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m K_n (A_m - BR^{-1}B'K_m) \binom{k}{n} x^{[n+m-1]} \end{aligned} \quad (3.11)$$

さらに、総和の順序交換および、係数の共変対称化を行なう。

$$\begin{aligned} \dot{\phi} = & - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\dot{K}_n + \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^l K_l (A_{n-l+1} \right. \\ & \left. - BR^{-1}B'K_{n-l+1}) \binom{k}{l} \right) S_n x^{[n]} \end{aligned} \quad (3.12)$$

(3.10), (3.12)式の両者が恒等的に等しくなる条件から、 $x^{[n]}$ の係数を等しくおき、 K_l についての方程式を誘導する。(3.10), (3.12)式の両式の係数テンソルは、共変対称化されているので、係数を分離するときの条件(付録の[補題d])は、満足されている。なお、 Q_n, K_n については、それらの対称性から、 $Q_n S_n = Q_n$, $K_n S_n = K_n$ が成立する。以上より、

$$\begin{aligned} \dot{K}_n + \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^l A_l \sigma^{(ijk)} (K_{n-l+1}) \binom{k}{l} S_n \\ + \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^l K_l (A_{n-l+1}) \binom{k}{l} S_n \\ - \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^l K_l (BR^{-1}B'K_{n-l+1}) \binom{k}{l} S_n + Q_n = 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

さらに、付録の[補題a]を使い、

$$\begin{aligned} K_l (BR^{-1}B'K_{n-l+1}) \binom{k}{l} \\ = \frac{1}{2} K_l (BR^{-1}B'K_{n-l+1}) \binom{k}{l} \\ + \frac{1}{2} (BR^{-1}B'K_l \sigma^{(ijk)}) \binom{k}{l} (K_{n-l+1}) \binom{k}{l} \end{aligned} \quad (3.14)$$

である。ここで K_n について整頓する。

$$\begin{aligned} \dot{K}_n + (A_1 - BR^{-1}B'K_1) K_n \\ + \sum_{k=1}^n K_n (A_1 - BR^{-1}B'K_1) \binom{k}{n} \\ + \sum_{l=2}^{n-1} \sum_{k=1}^l \left(A_l - \frac{1}{2} BR^{-1}B'K_l \sigma^{(ijk)} \right) \sigma^{(ijk)} \\ \times (K_{n-l+1}) \binom{k}{l} S_n \\ + \sum_{l=2}^{n-1} \sum_{k=1}^l K_l \left(A_{n-l+1} - \frac{1}{2} BR^{-1}B'K_{n-l+1} \right) \binom{k}{l} S_n \\ + K_1 A_n + \sum_{k=1}^n (K_1' A_n) \sigma^{(ijk)} + Q_n = 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

$n=1$ のときは、

$$\dot{K}_1 + A_1' K_1 + K_1 A_1 - K_1 BR^{-1}B'K_1 + Q_1 = 0 \quad (3.16)$$

であり、境界条件は、

$$\lim_{T \rightarrow \infty} K_n(T) = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (3.17)$$

である。 K_1 は(3.16)式のような線形レギュレータにおけるリカッチ方程式の定常解であり、したがって、 $(A_1 - BR^{-1}B'K_1)$ は安定なシステム行列である。(3.15)式の定常解(定数テンソル) K_n を使って、最適フィードバックは、(3.7)式のような定係数状態フィードバックの形に構成できる。つぎに K_n の計算法について考察する。 K_1 は、(3.18)式の逆時間リカッチ方程式の定常解として求まる。

$$\begin{aligned} \dot{K}_1 = A_1' K_1 + K_1 A_1 - K_1 BR^{-1}B'K_1 + Q_1, \\ K_1(0) = 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

$n \geq 2$ の場合には、定常解 K_n は、(3.15)式で、 $\dot{K}_n = 0$ とおいた(3.19)式を満足する。

$$S' K_n + \sum_{k=1}^n K_n S \binom{k}{n} + W_n = 0 \quad (3.19)$$

ここで、

$$S = A_1 - BR^{-1}B'K_1 \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} W_n = & \sum_{l=2}^{n-1} \sum_{k=1}^l \left(A_l - \frac{1}{2} BR^{-1}B'K_l \sigma^{(ijk)} \right) \sigma^{(ijk)} \\ & \times (K_{n-l+1}) \binom{k}{l} S_n \\ & + \sum_{l=2}^{n-1} \sum_{k=1}^l K_l \left(A_{n-l+1} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} BR^{-1}B'K_{n-l+1} \right) \binom{k}{l} S_n \\ & + K_1 A_n + \sum_{k=1}^n (K_1' A_n) \sigma^{(ijk)} + Q_n \end{aligned} \quad (3.21)$$

である。ここで、 K_n および W_n を列ベクトルに変換したものを $\tilde{K}_n, \tilde{W}_n$ とすれば、 $\tilde{K}_n$ は(3.24)式のような行列方程式の解として求まる⁶⁾。

$$K_n^t = (k_1^t k_2^t \dots k_m^t) \rightarrow \tilde{K}_n^t = (k_1 k_2 \dots k_m) \quad (3.22)$$

$$W_n^t = (w_1^t w_2^t \dots w_m^t) \rightarrow \tilde{W}_n^t = (w_1 w_2 \dots w_m) \quad (3.23)$$

$$k_i: 1 \times m^n, \quad w_i: 1 \times m^n \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

$$\left[\sum_{k=1}^{n+1} S' \binom{k}{n+1} \right] \tilde{K}_n = \tilde{W}_n, \quad \tilde{K}_n = \left[\sum_{k=1}^{n+1} S' \binom{k}{n+1} \right]^{-1} \tilde{W}_n \quad (3.24)$$

ここで、 S が安定なシステム行列であるとき、

$$\sum_{k=1}^{n+1} S' \binom{k}{n+1}$$

もまた、安定なシステム行列になる⁶⁾。それゆえ、 $\tilde{K}_n$ は(3.24)式のように解ける。その後

$$\tilde{K}_n^t = (k_1 k_2 \dots k_m) \rightarrow K_n^t (k_1^t k_2^t \dots k_m^t)$$

と変換することにより、 K_n が求まる。微分方程式の

Fig. 1 Flow chart for calculation of K_n

収束解として求める必要のあるものは、 $n=1$ のときだけであり、 $n \geq 2$ のときは、well posed な線形行列方程式 (3.24) を解くだけでよい。また (3.21) 式における W_n の構成からわかるように、 K_n を求めるのに必要とするのは、 $A_1, \dots, A_n, Q_1, \dots, Q_n, K_1, \dots, K_{n-1}, B, R$ であり、 $A_N, Q_N (N \geq n+1)$ は、 K_n に影響を及ぼさない。 $K_l (l \geq 2)$ の方程式は、 K_n の単独線形行列方程式であり、ほかの未知数を含むような連立形ではない。それゆえ、低次の K_l から順に求めることにより、任意の高次の K_l を、線形計算だけで求められる。 K_l の方程式のこうした構造は、数値計算を、きわめて容易にしている。Fig. 1 に $K_n (1 \leq n \leq N)$ を求めるフロー・チャートを示す。

4. K_n の対称性

《定理 1》最適フィードバック係数 K_n は、(3.15) 式を満足し、 $(1, n)$ 形完全対称定数テンソルである。

《定理 1》を証明するための準備として、[補題 1] を証明する。

【補題 1】 $S: m \times m$ 安定システム行列、 $W: (1, n)$ 形 $(m \times m^n)$ 完全対称テンソルとすると、

$$\dot{K} + S^T K + \sum_{k=1}^n K S^{(k)} + W = 0, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} K(T) = 0 \quad (4.1)$$

の解 K は、 $(1, n)$ 形完全対称定数テンソルである。

(証明) S を対角化する行列を V として、 K, W を V で変換する。

$$V^{-1} S V = \text{diag}(\lambda_i), \quad \tilde{K} = V^T K V^{[n]}, \\ \tilde{W} = V^T W V^{[n]} \quad (4.2)$$

ゆえに、成分で表示すれば、

$$\frac{d}{dt} \tilde{k}^i_{j_1 j_2 \dots j_n} + (\lambda_i + \lambda_{j_1} + \dots + \lambda_{j_n}) \tilde{k}^i_{j_1 j_2 \dots j_n} \\ + \tilde{w}^i_{j_1 j_2 \dots j_n} = 0 \quad (4.3)$$

であるから、

$$\tilde{k}^i_{j_1 j_2 \dots j_n}(t, T) \\ = \frac{\tilde{w}^i_{j_1 j_2 \dots j_n}}{\lambda_i + \lambda_{j_1} + \dots + \lambda_{j_n}} \\ \times \left[e^{(\lambda_i + \lambda_{j_1} + \dots + \lambda_{j_n})(T-t)} - 1 \right] \quad (4.4)$$

となる。 S が安定システム行列より、 $\text{Re}(\lambda_i + \lambda_{j_1} + \dots + \lambda_{j_n}) < 0$ であるから、

$$\tilde{k}^i_{j_1 \dots j_n} = \lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{k}^i_{j_1 \dots j_n}(t, T) = -\frac{\tilde{w}^i_{j_1 j_2 \dots j_n}}{\lambda_i + \dots + \lambda_{j_n}} \quad (4.5)$$

よって、 $\tilde{k}^i_{j_1 \dots j_n}$ は完全対称である。したがって V による (4.2) 式の逆変換を行なえば、 K は $(1, n)$ 形完全対称定数テンソルになる。よって [補題 1] は成立する。 K は直接積分して、つぎのようにも書ける⁶⁾。

$$K = \int_0^\infty e^{S^T \tau} W (e^{S \tau})^{[n]} d\tau \quad (4.6)$$

《定理 1》は帰納法を使って証明される。 $n=1$ のとき、 K_1 は対称行列であるから《定理 1》は成立する。 $(n-1)$ 以下の $K_l (1 \leq l \leq n-1)$ について《定理 1》が成立するとすれば、 $K_l^{(i, j_k)} = K_l$ である。そこで、付録の [補題 c] の $T\Sigma$ 演算を使い、(3.15) 式は、つぎのようにまとめることができる。

$$\dot{K}_n + (A_1 - BR^{-1}B^TK_1)^TK_n \\ + \sum_{k=1}^n K_n (A_1 - BR^{-1}B^TK_1)^{(k)} \\ + \sum_{l=2}^{n-1} T\Sigma \left\langle \left(A_l - \frac{1}{2} BR^{-1}B^TK_l \right), K_{n-l-1} \right\rangle \\ + T\Sigma \langle A_n, K_1 \rangle + Q_n = 0 \quad (4.7)$$

$S = (A_1 - BR^{-1}B^TK_1)$ は安定システム行列であり、また

$$W = \sum_{l=2}^{n-1} T\Sigma \left\langle \left(A_l - \frac{1}{2} BR^{-1}B^TK_l \right), K_{n-l+1} \right\rangle \\ + T\Sigma \langle A_n, K_1 \rangle + Q_n \quad (4.8)$$

は、付録の [補題 c] から、 $(1, n)$ 形完全対称テンソルになる。さらに、境界条件が $\lim_{T \rightarrow \infty} K_n(T) = 0$ であるから、 K_n に対して、[補題 1] が成立する。

ゆえに K_n は, $(1, n)$ 形完全対称定数テンソルである
ことより, 《定理 1》が成立する。

5. 奇数形システム, 偶数形評価関数の場合

《定理 2》 奇数形システム, 偶数形評価関数の場合
($A_{2n}=0, Q_{2n}=0, n=1, 2, \dots$) には, 偶数次フィード
バック係数 ($K_{2n}, n=1, 2, \dots$) は, 零になり, 奇数形
フィードバックになる。

(証明) K_{2n} は, (4.6) 式より次式になる。

$$K_{2n} = \int_0^\infty e^{S^* \tau} W_{2n}(e^{S \tau}) [2n] d\tau \quad (5.1)$$

$$W_{2n} = \sum_{l=2}^{2n-1} T_S \left\langle \left(A_l - \frac{1}{2} B R^{-1} B^* K_l \right), K_{2n-l+1} \right\rangle \\ + T_S \langle A_{2n}, K_1 \rangle + Q_{2n} \quad (5.2)$$

$A_{2n}=0, Q_{2n}=0 (n=1, 2, \dots)$ であるから, $l=1$ のとき,
 $W_2 = T_S \langle A_2, K_1 \rangle + Q_2 = 0$ より, $K_2=0$ である。
 $1 \leq l \leq (n-1)$ に対して, $K_{2l}=0$ が成立すれば,

$$W_{2n} = \sum_{l=1}^{n-1} T_S \left\langle \left(A_{2l} - \frac{1}{2} B R^{-1} B^* K_{2l} \right), K_{2n-2l+1} \right\rangle \\ + \sum_{l=2}^n T_S \left\langle \left(A_{2l-1} - \frac{1}{2} B R^{-1} B^* K_{2l-1} \right), \right. \\ \left. K_{2(n-l+1)} \right\rangle + T_S \langle A_{2n}, K_1 \rangle + Q_{2n} \quad (5.3)$$

において,

$$A_{2l} - \frac{1}{2} B R^{-1} B^* K_{2l} = 0 \quad (1 \leq l \leq n-1) \quad (5.4)$$

$$K_{2(n-l+1)} = 0 \quad (2 \leq l \leq n), \quad A_{2n} = 0, \quad Q_{2n} = 0 \quad (5.5)$$

であるから, $W_{2n}=0$ である。ゆえに $K_{2n}=0$ が示され,
《定理 2》が成立する。

6. 評価関数値

(2.2) 式における評価関数の積分下限を t においた
 J を, $J=V(x(t))$ とすれば, ハミルトン・ヤコビの
関係から,

$$\phi = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\sum_{n=1}^\infty K_n x^{[n]} \quad (6.1)$$

が成立する。ここで, K_n が完全対称テンソルである
ことより, 完全積分の条件

$$\frac{\partial S_j}{\partial x_i} = \frac{\partial S_i}{\partial x_j} \quad (i, j=1, \dots, n) \quad (6.2)$$

が成立する。ゆえに (6.1) 式を直接積分することより,

$$V[x(t)] = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n+1} x^*(t) K_n x(t)^{[n]} \quad (6.3)$$

が求まり, 評価関数値は

$$J = V(x_0) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n+1} x_0^* K_n x_0^{[n]} \quad (6.4)$$

になる。

7. 最適解の存在性について

《定理 3》 (Filippov)^{9), 5)} $x(t) \in R^n$ を状態ベクトル
とし, 評価関数に対応する変数 $x_0(t)$ を付加した
($n+1$) 次元ベクトル $z(t) = (x_0(t), x^*(t))^t$ は

$$\dot{z} = f(z(t), u(t), t), \quad z(t_0) = z_0 = (0, x_0^*)^t \quad (7.1)$$

を満足するとする。 $S(t)$ を R^n における閉じた, かつ
 t に関し連続な目標集合とする。

ある時刻 $t, t \in [t_0, t_1]$ において $x^*(t) \in S(t)$ となる
ような許容制御が存在するとき, 条件 (i), (ii), (iii)
が成立すれば, $x_0(t)$ を最小にする最適制御も存在す
る。

(i) $f, \partial f / \partial z$ は z, u, t について連続

(ii) すべての $t, z, u \in V(t)$ (r 次元 Euclid 空間
の空でないような Compact な集合) について
 $z^* f(z, u, t) \leq C(1 + \|z\|^2)$ (7.2)

が成り立つような定数 C が存在する。

(iii) $R(t, z) = \{f(z, u, t) : u \in V(t)\}$ で定義される
集合関数が, すべての z, t について凸 (convex)
である。

(2.1), (2.2) 式の最適レギュレータ問題の最適解の
存在について考察する。システム方程式は $(2l-1)$ 次
の有限次とし, (i), (iii) は成立しているとする。つき
の (7.3), (7.4), (7.5) 式の系で (iv) が成立するとき
(ii) が成立することを示す。

$$\dot{x} = f_1(x, u, t) = \sum_{k=1}^{2l-1} A_k x^{[k]} + Bu \quad (7.3)$$

$$J = \int_{t_0}^t f_0(x, u, \tau) d\tau \rightarrow \min \quad (7.4)$$

$$\dot{x}_0 = f_0(x, u, t) \quad (7.5)$$

$$f = (f_0, f_1)^t, \quad z = (x_0, x^*)^t \quad (7.6)$$

(iv) A_{2l-1} が負定値である。すなわち

$$\alpha \|x\|^{2l} \leq -x^* A_{2l-1} x^{[2l-1]} \leq \beta \|x\|^{2l}, \quad \beta \geq \alpha > 0 \quad (7.7)$$

((iv) $\rightarrow$ (ii) の証明)

$$x^* f_1 = \sum_{k=1}^{2l-1} x^* A_k x^{[k]} + x^* Bu \\ \leq \left(\|B\| \|u\| \|x\| + \sum_{k=1}^{2l-2} \|A_k\| \|x\|^{k+1} - \alpha \|x\|^{2l} \right) \\ \leq C_1 (\|x\| + \dots + \|x\|^{2l-1} - \alpha \|x\|^{2l}) \leq M \quad (7.8)$$

$$u \in U(t) (\text{compact}) \rightarrow \|u\| \leq N \quad (t \in [t_0, t_1])$$

$$C_1 = \max(\|B\|N, \|A_1\|, \dots, \|A_{2l-2}\|) \quad (7.9)$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &\leq 2M(t-t_0) + \|x^0\|^2 \\ &\leq 2M(t_1-t_0) + \|x^0\|^2 = D \quad (t \in [t_0, t_1])\end{aligned}\quad (7.10)$$

また

$$\|x\| \leq \sqrt{D}, \quad \|u\| \leq N \rightarrow |f_0| \leq M' \quad (7.11)$$

ゆえに

$$\begin{aligned}z'f &\leq x_0 f_0 + M \leq \frac{1}{2} x_0^2 + \frac{1}{2} (M + M'^2) \\ &\leq C(1 + \|z\|^2)\end{aligned}\quad (7.12)$$

$$C = \max\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}(M + M'^2)\right) \quad (7.13)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.6 & 0.6 & 0.1 & 0.6 & 0.1 & 0.1 & 0.5 \\ -1.8 & -0.9 & -0.9 & -0.1667 & -0.9 & -0.1667 & -0.1667 & -0.7 \end{bmatrix}$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad Q_3 = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}$$

A_2 の固有値は, $\lambda_{1,2} = -0.5 \pm j2\pi/0.8$ である. この例題は, 奇数形システム, 偶数形評価関数なので5節で扱ったように, u は, 状態に関する奇数形フィードバックになる.

$$\begin{aligned}K_3 &= \begin{bmatrix} 277.380 & -6.96852 & -6.96852 & -0.816747 & -6.96852 & -0.816747 & -0.816747 & -2.63891 \\ -6.96852 & -0.816747 & -0.816747 & -2.63891 & -0.816747 & -2.63891 & -2.63891 & 220.133 \end{bmatrix} \\ &\times 10^{-4}\end{aligned}\quad (8.4)$$

このときの評価関数値は

$$\begin{aligned}J_1 &= \frac{1}{2} x_0' K_1 x_0, \quad J_3 = \frac{1}{4} x_0' K_3 x_0^{[3]}, \\ J &= J_1 + J_3\end{aligned}\quad (8.5)$$

になる. これらの数値は Fig. 2-2, Fig. 3-2 に示す. 制御系の応答は, つぎの (a), (b), (c) の三つの場合

Fig. 2-1 Response x_1 ($x_1(0)=20$, $x_2(0)=15$)

- (a) $u=0$ (Response of the process)
- (b) $u=-R^{-1}B'(K_1x)$ (Response of the first order optimum system)
- (c) $u=-R^{-1}B'(K_1x+K_3x^{[3]})$ (Response of the third order optimum system)

7. 数値例

(8.1)式のシステムにおいて, (8.2)式の評価関数を最小にする制御 u を求める.

$$\dot{x} = A_1x + A_3x^{[3]} + Bu \quad (8.1)$$

$$J = \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} x' Q_1 x + \frac{1}{4} x' Q_3 x^{[3]} + \frac{1}{2} u' R u \right) dt \quad (8.2)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3.52124 & -8.16814 \\ 9.53159 & -4.52124 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$$

バックになる. ここでは, (8.3)式のように3次まで求める. このときフィードバック係数 K_1, K_3 は (8.4)になる.

$$u = -R^{-1}B'(K_1x + K_3x^{[3]}) \quad (8.3)$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 11.6607 & -0.272178 \\ -0.272178 & 4.33308 \end{bmatrix} \times 10^{-2}$$

合についてあげる.

- (a) $u=0$ の場合, (Response of process)
- (b) $u=-R^{-1}B'(K_1x)$ の場合 (Response of the first order optimum system)
- (c) $u=-R^{-1}B'(K_1x+K_3x^{[3]})$ の場合 (Response of the third order optimum system)

さらに, Case 1 として初期値が大きい場合, Case 2 として初期値が小さい場合について調べる.

$$\text{Case 1} \begin{cases} x_1(0)=20 \\ x_2(0)=15 \end{cases} \text{ のとき, Fig. 2-1} \dots x_1 \text{ の応答} \\ \text{Fig. 2-2} \dots x_2 \text{ の応答}$$

Fig. 2-2 Response x_2 ($x_1(0)=20$, $x_2(0)=15$)

Fig. 3-1 Response x_1 ($x_1(0)=4$, $x_2(0)=3$)

Case 2 $\begin{cases} x_1(0)=4 \\ x_2(0)=3 \end{cases}$ のとき, Fig. 3-1... x_1 の応答
Fig. 3-2... x_2 の応答

初期値が小さいときは (Case 2), 線形レギュレータと非線形レギュレータの間に顕著な差はみられないが, 初期値が大きくなると (Case 1), 制御則における非線形項の効果が大きくなり, 線形フィードバックのときよりも応答が著しく改善されることがわかる。

10. あとがき

本研究は, 非線形システムをテンソル積で記述し, その最適レギュレータの決定法, および性質について論じたものである。非線形レギュレータによる応答特性の改善については, 数値例をあげることで示したが, より詳細な考察は, 別の機会にゆずる。本レギュレータでは, 外乱が大きい場合, フィードバックの非線形性が効果的に働き, 線形制御では得られない優れた安定性, ならびに速応性が得られるものと考えられる。なお, 本研究における数値計算には, 東京大学大形計算機 HITAC 8700/8800 を使用した。

参考文献

- 1) W. L. Garrard, N. H. McClamroch & L. G. Clark: An Approach to Sub-optimal Feedback Control of Nonlinear Systems, Int. J. of Control, 5, 425/435 (1967)
- 2) J. H. Burghart: A Technique for Suboptimal Feedback Control of Nonlinear Systems, IEEE Trans., Automatic Control, AC-14, 530/533 (1969)
- 3) 西川, 三宮, 板倉: 非線形系の準最適フィードバック制御, 計測自動制御学会論文集, 7-1, 79/85 (1971)
- 4) J. D. Pearson: Approximation Methods in Optimal Control, I. Sub-optimal Control, J. Electronics and Control, 13, 453/469 (1962)
- 5) 坂和: 最適システム制御論, コロナ社, 2章, 3章(1972)
- 6) Bellman: Introduction to Matrix Analysis, McGraw-Hill, Chap. 12 (1960)
- 7) 矢野, 武藤: テンソル解析, 広川書店, 1章~5章(1971)
- 8) 大久保, 北森: 非線形レギュレータ問題, 第11回SICE学術講演会予稿集 (1972)
- 9) A. F. Filippov: On certain questions in the theory

Fig. 3-2 Response x_2 ($x_1(0)=4$, $x_2(0)=3$)

of optimal control, SIAM J. Control, 1-1, 76/84 (1962)

《付 録》

A. テンソル演算に関する定義および性質

1. テンソルの定義

n_i 次元列ベクトル空間を V_i , m_i 次元行ベクトル空間を V_i^* とするとき,

$$V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_p \times V_1^* \times V_2^* \times \cdots \times V_q^* \quad (\text{A.1})$$

を定義域にする多重線形写像を p 階反変 q 階共変テンソルといい, (p, q) 形 $(n_1 n_2 \cdots n_p \times m_1 m_2 \cdots m_q)$ テンソルと表記する。

2. テンソルの行列表示

(p, q) 形 $(n_1 n_2 \cdots n_p \times m_1 m_2 \cdots m_q)$ テンソル

$$A = (a_{j_1 j_2 \cdots j_q}^{i_1 i_2 \cdots i_p}) \quad (\text{A.2})$$

は, $[i_p + n_p(i_p - 1) + n_p n_{p-1}(i_{p-2} - 1) + \cdots + n_p n_{p-1} \cdots n_2(i_1 - 1), j_q + m_q(j_q - 1) + m_q m_{q-1}(j_{q-2} - 1) + \cdots + m_q m_{q-1} \cdots m_2(j_1 - 1)]$ 成分が, $a_{j_1 j_2 \cdots j_q}^{i_1 i_2 \cdots i_p}$ であるような $(n_1 n_2 \cdots n_p) \times (m_1 m_2 \cdots m_q)$ 行列によって表示される。

3. テンソルの対称性

(p, q) 形テンソル $A = (a_{j_1 j_2 \cdots j_q}^{i_1 i_2 \cdots i_p})$ において添字 $i_k i_{k_2} \cdots i_{k_r} j_{l_1} \cdots j_{l_s}$ の次元 $n_{k_1} n_{k_2} \cdots n_{k_r} m_{l_1} \cdots m_{l_s}$ がすべて等しく, 添字 $(i_{k_1}, i_{k_2}, \cdots, i_{k_r}, j_{l_1}, \cdots, j_{l_s})$ の配置交換に関する任意の互換に対して A が不変であるとき, A は $(i_{k_1}, i_{k_2}, \cdots, i_{k_r}, j_{l_1}, j_{l_2}, \cdots, j_{l_s})$ に関して対称であるという。 A が反変部 $(i_1 i_2 \cdots i_p)$ に関して対称であるとき, (p, q) 形反変対称テンソル, 共変部 $(j_1 \cdots j_q)$ に関して対称であるとき, (p, q) 形共変対称テンソル, および, すべての添字 $(i_1 i_2 \cdots i_p j_1 j_2 \cdots j_q)$ に関して対称であるとき, (p, q) 形完全対称テンソルという。

4. クロネッカ積とその諸演算

(1) $n_1 \times m_1$ 行列 $A = (a_{j_1}^{i_1})$, $n_2 \times m_2$ 行列 $B = (b_{j_2}^{i_2})$ において, $(i_2 + n_2(i_2 - 1), j_2 + m_2(j_2 - 1))$ 成分が $c_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} = a_{j_1}^{i_1} b_{j_2}^{i_2}$ である $n_1 n_2 \times m_1 m_2$ 行列 C を,

A, B のクロネッカ積といい, $C = A \otimes B$ で表わす.
(行列は $(1, 1)$ 形テンソルである.)

$$C = A \otimes B = \begin{pmatrix} a_1^1 B, a_2^1 B, \dots, a_{m_1}^1 B \\ \vdots \\ a_1^{n_1} B, a_2^{n_1} B, \dots, a_{m_1}^{n_1} B \end{pmatrix} \quad (A.3)$$

一般に (p, q) 形 $(n_1 n_2 \dots n_p \times m_1 m_2 \dots m_q)$ テンソル $A = (a_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p})$, (r, s) 形 $(n'_1 n'_2 \dots n'_r \times m'_1 m'_2 \dots m'_s)$ テンソル $B = (b_{j'_1 j'_2 \dots j'_s}^{i'_1 i'_2 \dots i'_r})$ において, $i_k' = i_{p+k}$, $n_k' = n_{p+k}$ ($k=1, \dots, r$), $j_k' = j_{q+k}$, $m_k' = m_{q+k}$ ($k=1, \dots, s$) とするとき, $\left\{ i_{r+p} + \sum_{k=1}^{r+p-1} \left(\prod_{\alpha=k+1}^{r+p} n_\alpha \right) (i_k - 1), j_{s+q} + \sum_{k=1}^{s+q-1} \left(\prod_{\alpha=k+1}^{s+q} m_\alpha \right) (j_k - 1) \right\}$ 成分が,

$$c_{j_1 j_2 \dots j_q j_{q+1} \dots j_{q+s}}^{i_1 i_2 \dots i_p i_{p+1} \dots i_{p+r}} = a_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} b_{j_{q+1} \dots j_{q+s}}^{i_{p+1} \dots i_{p+r}} \quad (A.4)$$

である $(p+r, r+s)$ 形 $\left(\prod_{k=1}^{p+r} n_k \right) \times \left(\prod_{k=1}^{r+s} m_k \right)$ テンソル C を A, B のクロネッカ積という.

$$A \otimes B = C \quad (A.5)$$

(p, q) 形 (r, s) 形 $(p+r, q+r)$ 形

(2) クロネッカ積に関し, つぎの公式が成り立つ.

$$\langle 2.1 \rangle \quad A \otimes (B_1 + B_2) = A \otimes B_1 + A \otimes B_2$$

$$\langle 2.2 \rangle \quad (A_1 + A_2) \otimes B = A_1 \otimes B + A_2 \otimes B$$

$$\langle 2.3 \rangle \quad c(A \otimes B) = (cA) \otimes B = A \otimes (cB), \quad c: \text{定数}$$

$$\langle 2.4 \rangle \quad (A_1 \otimes A_2) \otimes A_3 = A_1 \otimes (A_2 \otimes A_3) \\ = A_1 \otimes A_2 \otimes A_3$$

$$\langle 2.5 \rangle \quad (A_1 \otimes A_2 \otimes A_3 \dots \otimes A_n) (B_1 \otimes B_2 \otimes \dots \otimes B_n) \\ = (A_1 B_1) \otimes (A_2 B_2) \otimes \dots \otimes (A_n B_n)$$

$$\langle 2.6 \rangle \quad (A_1 \otimes B_1) (A_2 \otimes B_2) \dots (A_n \otimes B_n) \\ = (A_1 A_2 \dots A_n) \otimes (B_1 B_2 \dots B_n)$$

$$\langle 2.7 \rangle \quad (A \otimes B)^t = A^t \otimes B^t, \quad t \text{ は行列の転置}$$

(3) クロネッカ冪

$$A^{[n]} = \underbrace{A \otimes \dots \otimes A}_n \quad (A.6)$$

をテンソル A の n 次クロネッカ冪といい, つぎの公式が成り立つ.

$$\langle 3.1 \rangle \quad A^{[k+l]} = A^{[k]} \otimes A^{[l]} = A^{[l]} \otimes A^{[k]}$$

$$\langle 3.2 \rangle \quad (AB)^{[n]} = A^{[n]} B^{[n]}$$

$$(4) \quad A \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$$

A を (n, m) 形テンソル, I を $(1, 1)$ 形 $l \times l$ 単位テンソル ($l \times l$ 単位行列) とし,

$$A \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = I^{[q-1]} \otimes A \otimes I^{[p-q]} \quad (A.7)$$

を定義すれば, つぎの公式が成り立つ.

$$\langle 4.1 \rangle \quad (AB) \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix},$$

$$\left(A \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} q+s-1 \\ p+r-1 \end{pmatrix}$$

$$(5) \quad A^{\sigma(ijr)}$$

$(1, n)$ 形テンソル $A = (a_{j_1 \dots j_n}^i)$ の添字 i と j_r を交換したテンソルを

$$A^{\sigma(ijr)} = (a_{j_1 j_2 \dots j_n}^{i \dots i \dots i}) \quad (A.8)$$

で定義する. この場合, 各添字に対応する次数も変換される.

$$(6) \quad n \text{ 次対称化テンソル } S_n$$

(m, n) 形 $(l^m \times l^n)$ テンソル $A = (a_{j_1 j_2 \dots j_n}^{i_1 i_2 \dots i_m})$ の共変部を対称化する, (n, n) 形 $(l^n \times l^n)$ テンソル S_n が存在し, $A = \hat{A} S_n$ により A を共変対称テンソル $\hat{A}$ に変換する. また, $\tilde{A} = S_n A$ により, A を反変対称テンソル $\tilde{A}$ に変換する. $A, \hat{A}, \tilde{A}$ は, 任意の x ($l \times 1$ ベクトル) に対し次式を満足する.

$$x^t [m] A x [n] = x^t [m] \hat{A} x [n] = x^t [m] \tilde{A} x [n] \quad (A.9)$$

[補題 a] $K: (1, n)$ 形 $(l \times m^n)$ テンソル, $C_i: m \times p$, $B: q \times l$ とするとき, つぎの公式が成り立つ.

$$\{BK(C_1 \otimes C_2 \otimes \dots \otimes C_n)\}^{\sigma(ijr)} \\ = C_r^t K^{\sigma(ijr)} (C_1 \otimes C_2 \otimes \dots \otimes \overset{\langle r \rangle}{B} \otimes \dots \otimes C_n) \quad (A.10)$$

[補題 b] $(1, n)$ 形 $l \times l^n$ 共変対称テンソル $A = (a_{j_1 j_2 \dots j_n}^i)$ に対し, $\hat{A}$ を

$$\hat{A} = \frac{1}{n+1} \left(A + \sum_{k=1}^n A^{\sigma(ijk)} \right) \quad (A.11)$$

とすれば, $\hat{A}$ は $(1, n)$ 形完全対称テンソルであり, 任意の l 次列ベクトル x に対し, $x^t A x [n] = x^t \hat{A} x [n]$ を満足する.

[補題 c] $A: (1, n)$ 形 $p \times l^n$ 共変対称テンソル, $B: (1, m)$ 形 $p \times l^m$ 共変対称テンソル, $x: l \times 1$ 列ベクトルにおいて, $y = A x [n]$, $z = B x [m]$, とするとき, 任意の x について,

$$q = y^t z = x^t [n] A^t B x [m] = x^t Q x [n+m-1] \quad (A.12)$$

を満足するような, $(1, n+m-1)$ 形 $l \times l^{n+m-1}$ 完全対称テンソル Q はつぎのように決定される.

$$Q = \frac{1}{n+m} T \Sigma \langle A, B \rangle \quad (A.13)$$

ここで,

$$T \Sigma \langle A, B \rangle \\ = \left(\sum_{k=1}^n A^{\sigma(ijk)} B \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^m B^{\sigma(ijk)} A \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} \right) S_{n+m-1} \quad (A.14)$$

S_{n+m-1} は, $(n+m-1)$ 次共変対称テンソルである.

【補題 d】 A を $(1, n)$ 形 $(l \times m^n)$ 共変対称テンソル, x を $m \times 1$ ベクトルとすると, 任意の x に対して, $Ax^{[n]}=0$ が成立するための必要十分条件は, $A=0$ である. A が共変非対称であるときには, $\forall x \rightarrow Ax^{[n]}=0$ の必要十分条件は, $AS_n=0$ (S_n は n 次対称化テンソル) である.

B. 多変数高次多項式のテンソル表示

$x=[x_1x_2\cdots x_m]^t$ の k 次同次多項式 $g_k(x)$ を

$$g_k(x) = \sum_{l_1+\cdots+l_m=k} C_{l_1l_2\cdots l_m} x_1^{l_1} x_2^{l_2} \cdots x_m^{l_m} \quad (B.1)$$

とする. x の k 次クロネッカ冪 $x^{[k]}$ の $j_k + \sum_{r=1}^{k-1} m^{n-r}$ (j_{r-1} 成分 $x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_k}$ が, $x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_k}=x_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_m^{l_m}$ であるとき,

$$a_{j_1j_2\cdots j_k} = \frac{l_1!l_2!\cdots l_m!}{k!} C_{l_1l_2\cdots l_m} \quad (B.2)$$

の式より, $(0, k)$ 形係数テンソル A_k を定める. A_k は (B.2) の構成より, $j_1\cdots j_k$ の順序によらないから, 共変対称であり, また一意的に決まる. この A_k を使えば, g_k は

$$g_k = A_k x^{[k]} \quad (B.3)$$

と記述される. よって, x の n 次多項式 $g(x)$, および n 次多項式ベクトル $G(x)$ は, (B.4), (B.5) 式のように表される.

$$g(x) = \sum_{k=1}^n g_k(x) = \sum_{k=1}^n A_k x^{[k]} \quad (B.4)$$

ここに, A_k は, $(0, k)$ 形共変対称テンソル.

$$G(x) = (G^i(x)) = \left(\sum_{k=1}^n F_k^i x^{[k]} \right) = \sum_{k=1}^n F_k x^{[k]} \quad (B.5)$$

ここに, F_k は, $(1, k)$ 形共変対称テンソル.

論文集論文に対する討論の募集

- ◇ 会員相互の知識の交換のため, 論文集には寄書欄を設けてあります.
- ◇ 新しい着想や学術上の所見はもとより, 実験結果または論文集の論文に対する質問・討論・意見などなるべく短くまとめて (0.5~2 ページ以内) ご投稿ください.
- ◇ 昭和 50 年 11 月 10 日までの投稿は次号に掲載されるよう努力します.