入力経路にむだ時間をもつ多変数最適追従系の設計†

朴 炳 植*・鈴木 胖*

Synthesis of Digital Feedforward-Feedback Control System for Multivariable System with Inputs Delays

Pyeong Sik PAK* and Yutaka SUZUKI*

Many industrial systems can be represented by a linear multivariable system with time-delays in inputs. In this paper an optimal control problem of such a system is discussed when the reference inputs are polynomial functions of time. The outline of the synthesis is as follows: A new tracking error is defined, where inevitable error due to the system's time delays is not evaluated. The integrated value of the tracking error is also introduced in order to incorporate integral-type controllers into the control system. By imbedding the delayed inputs into the system's state variables, the equation of the controlled system is transformed to a usual state equation without time-delays. A criterion function is a quadratic form of the tracking error, its integrated value and the deviation of controls from their steady state values which are determined so that the system's outputs coincide with the reference inputs. By using this criterion function the synthesis problem is reduced to a standard regulator problem which is easily solved. Advantages of this method are as follows: (1) The optimal control law can be easily derived. (2) The control system has feedback, feedforward and predictive control pass. (3) Offsets due to system parameter variations or disturbances never arise, because the integral-type controllers are incorporated in the control system. (4) Even if the controlled system's time-delays are large, the integral-type controllers do not deteriorate transient characteristics of the control system, because the integral actions are delayed as much as the system's time delays. (5) The parameters of the control system depend only on the parameters of the controlled system and on the weighting matrices of the criterion function, and are independent of the reference inputs.

1. ま え が き

実際の制御問題で遭遇するシステムはむだ時間プラス集中定数系で近似できるものが多い。本論文では、入力経路に複数個のむだ時間をもつ多変数システムを対象とし、ステップやランプ状入力のような時間に関する多項式で表わされる目標入力に最適に追従する制御系を設計する方法について報告する。これまで、このような追従系設計問題に関連しては Lin の設計法があるが¹⁾、これは目標入力をステップ関数に限定しており、また一つのむだ時間を含むシステムにしか適用できないという難点がある。また、最適操作量をいかにして求めるかについての最終的な結果にまで言及していない。

むだ時間をもつシステムに対し追従特性のよい制御系を設計するにはまず、単にフィードバック制御を行なうだけでなく、むだ時間分だけの予測動作を入れたフィードフォワード制御を行なう必要があることはよく知られている²⁾。さらに、システムパラメータの変動や外乱などにより定常偏差が生じるのを防ぐために、制御系に積分形コントローラを付加する必要がある³⁾。しかし、むだ時間をもつシステムで積分形コントローラをそのまま従来のように使用したのでは、システムのもつむだ時間のために制御系はオーバーシュートの過大な過渡特性の悪い系となってしまう。

筆者らは積分形コントローラの動作にむだ時間分だけの遅れを入れることにより、定常特性のみならず過渡特性もよい制御系を得ることを試みた。設計の原理は以下のとおりである。システムの物理的構造より避けることができないむだ時間分の追従誤差は制御評価の対象にしないことにする。このように定め、追従誤差自身と追従誤差の積分値および操作量の定常値からのずれに関する2次評価関数を導入すると、問題はレギュレータ問題に帰着され、上記の要求を満足する制御系を容易に設計することができる。操作量の定常値はシステムの出力が目標入力に一致しなければなら

† 第15回自動制御連合講演会で発表(昭47・11)

* 大阪大学工学部 吹田市宇山田上

* Faculty of Engineering, Osaka University, Suita
(Received September 9, 1974)

という条件から求まる。このようにして定められる最適操作量は予測動作を包含している。なお、制御方式としてはデジタル方式を採用する。

2. 制御対象および設計仕様

システムはつぎのような離散値系で表示されるとする。

$$x(k+1)T = \Phi(T)x(kT) + \sum_{i=\lambda}^{\nu} \theta_i(T)u(k-iT) \quad (1)$$

$$y(kT) = Cx(kT) \quad (2)$$

ここで

T : サンプルング周期

$x(kT)$: $n \times 1$ の状態ベクトル

$u(kT)$: $m \times 1$ の入力 (操作量) ベクトル

$y(kT)$: $m \times 1$ の出力 (制御量) ベクトル

$\Phi(T)$: $n \times n$ の定数行列

$\theta_i(T)$: $n \times m$ の定数行列 ($i = \lambda, \lambda+1, \dots, \nu$; λ, ν は $0 \leq \lambda \leq \nu$ を満す整数). $\theta_i(T)$ のうち零行列となるものがあるてもよい。

C : $m \times n$ の定数行列

むだ時間のうち最小は λT , 最大は νT である。簡単のためここでは $u(kT)$ と $y(kT)$ の次元は一致しているとするが、異なっている場合についても以下の議論は容易に拡張できる⁴⁾。システム (1), (2) は完全可制御, 完全可観測であるとする⁵⁾。

制御系の設計仕様としてつぎのものを与える。

(i) 制御量 $y(kT)$ の目標入力は時間に関し q 次 (q は零または正整数) の多項式で与えられる。以下, これを $r(kT)$ で表わす。

(ii) 制御系はフィードバック制御を行なうだけでなく, むだ時間分だけの予測動作を入れたフィードフォワード制御を行なう。

(iii) 制御系は積分形コントローラをもつ。

(iv) システムのもつむだ時間のために生じるむだ時間の間の追従誤差は制御評価の対象としないことにする。したがって, $y(kT)$ の j 番目の要素を $y_j(kT)$ で表わし, $y_j(kT)$ に影響を及ぼす $u(k-iT)$ のうち最小の遅れを $\mu_j T$ で表わすと, 制御評価の対象となる追従誤差は

$$e(kT) = y(kT) - E(k-\mu_j T)r(kT) \quad (3)$$

で定義される。ここで,

$$E(k-\mu_j T) = \begin{bmatrix} d(k-\mu_1 T) & & 0 \\ & d(k-\mu_2 T) & \\ 0 & & d(k-\mu_m T) \end{bmatrix} \quad (4)$$

であり,

$$d(k-\mu_j T) = \begin{cases} 0 & (k < \mu_j) \\ 1 & (\mu_j \leq k) \end{cases} \quad (5)$$

である。

(v) 定常状態では追従誤差はない。すなわち, $r(kT)$ を加えてから十分時間が経過したときの $x(kT)$ および $y(kT)$ の値をそれぞれ $x_s(kT)$, $y_s(kT)$ で表わすと

$$y_s(kT) = Cx_s(kT) = E(k-\mu_j T)r(kT) \quad (6)$$

が成り立つ。定常状態では, $r(k)$ がたとえば 2 次の場合 $x(k)$, $y(k)$ および $u(k)$ はすべて時間に関し加速度 (2 次関数) 的に変化することになる。

3. 設計法^{6), 7)}

以下では記述の簡単化のためサンプルング時点を表わす T は省略する。

状態変数 $x(k)$ の $x_s(k)$ からのずれを

$$\tilde{x}(k) \equiv x(k) - x_s(k) \quad (7)$$

と定義する。(7) 式を (1) 式に代入すると

$$\tilde{x}(k+1) + x_s(k+1) = \Phi \tilde{x}(k) + \Phi x_s(k) + \sum_{i=\lambda}^{\nu} \theta_i u(k-i) \quad (8)$$

である。 $k \rightarrow \infty$ では $\tilde{x}(k) \rightarrow 0$ となるからこのときの $u(k)$ を $u_s(k)$ で表わすと, (8) 式は

$$x_s(k+1) = \Phi x_s(k) + \sum_{i=\lambda}^{\nu} \theta_i u_s(k-i) \quad (9)$$

となる。(9) 式は $k \rightarrow \infty$ において $y_s(k) = r(k)$ とするための定常入力 $u_s(k)$ を与える。入力 $u(k)$ の $u_s(k)$ からのずれ

$$\tilde{u}(k) \equiv u(k) - u_s(k) \quad (10)$$

を定義し, これを (8) 式に代入し, さらに (9) 式を用いると

$$\tilde{x}(k+1) = \Phi \tilde{x}(k) + \sum_{i=\lambda}^{\nu} \theta_i \tilde{u}(k-i) \quad (11)$$

が得られる。

積分形コントローラを制御系に付加するために

$$v(k+1) \equiv v(k) + Te(k) \quad (12)$$

で定義される $v(k)$ をシステムの状態変数として新たに追加する (注 1)。(12) 式は (2), (3), (6) 式を用いると $\tilde{x}(k)$ についてつぎのように表わすことができる。

(注 1) ここでは簡単のため, 定常位置偏差を生じない系を設計することに議論を限定している。一般に, q 次までの定常 (速度, 加速度, ...) 偏差を生じない系とするためには

$$v^0(k+1) = v^0(k) + Te(k)$$

$$v^i(k+1) = v^i(k) + v^{i-1}(k)$$

なる $v^i(k)$ ($i = 0, 1, \dots, q$) を状態変数として新たに導入すればよい⁹⁾。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}(k+1) &= \mathbf{v}(k) + T\{\mathbf{y}(k) - \mathbf{E}(k - \mu_j)\mathbf{r}(k)\} \\
 &= \mathbf{v}(k) + T\{\mathbf{C}\mathbf{x}(k) - \mathbf{E}(k - \mu_j)\mathbf{r}(k)\} \\
 &= \mathbf{v}(k) + T\mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}(k)
 \end{aligned} \quad (13)$$

(11), (13) 式をまとめると

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = \tilde{\Phi}\tilde{\mathbf{x}}(k) + \sum_{i=\lambda}^{\nu} \tilde{\Theta}_i \tilde{\mathbf{u}}(k-i) \quad (14)$$

が得られる。ここで、

$$\tilde{\mathbf{x}}(k) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(k) \\ \mathbf{v}(k) \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\tilde{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi & 0 \\ T\mathbf{C} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\tilde{\Theta}_i = \begin{bmatrix} \Theta_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (i=\lambda, \dots, \nu) \quad (17)$$

である。(14) 式は完全可制御であるとする。この仮定はもとのシステム(1), (2) 式が完全可制御・完全可観測であるとしたので、ほとんどのシステムで無条件に成立する。なぜなら、 $\tilde{\mathbf{u}}(k)$ により $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ および $\mathbf{y}(k)$ が可制御であり、また $\mathbf{y}(k)$ により $\mathbf{v}(k)$ は可制御であるからである(注2)。

(14) 式に対する最適制御系を構成するためつぎのような評価関数を定義する。

$$\begin{aligned}
 J &= \sum_{k=1}^{\infty} [\mathbf{e}'(k)\mathbf{Q}_1\mathbf{e}(k) + \mathbf{v}'(k)\mathbf{Q}_0\mathbf{v}(k) \\
 &\quad + \mathbf{w}'(k-1)\mathbf{P}\mathbf{w}(k-1)]
 \end{aligned} \quad (18)$$

ここで、

$$\mathbf{w}(k) = \tilde{\mathbf{u}}(k-\lambda) \quad (19)$$

であり、 $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_0$, $\mathbf{P}$ はいずれも $m \times m$ の半正定行列である。本評価関数を最小とすることは $\tilde{\mathbf{x}}(k) \rightarrow 0$ ($\mathbf{x}(k) \rightarrow \mathbf{x}_s(k)$), $\tilde{\mathbf{u}}(k) \rightarrow 0$ ($\mathbf{u}(k) \rightarrow \mathbf{u}_s(k)$), $\mathbf{v}(k) \rightarrow 0$, すなわちできるだけすみやかに定常状態におちつく系を設計するという意味をもつ。(18) 式の第2項は積分形コントローラを制御系に導入するために必要である³⁾。

最適制御策の求解を容易にするため(14) 式をつぎのように変形する(付録1 参照)。

$$\mathbf{z}(k+1) = \tilde{\Phi}\mathbf{z}(k) + \tilde{\Theta}\mathbf{w}(k) \quad (20)$$

ここで、

$$\mathbf{z}(k) \equiv [\tilde{\mathbf{x}}'(k)\tilde{\mathbf{u}}'(k-\lambda-1)\dots\tilde{\mathbf{u}}'(k-\nu)]' \quad (21)$$

$$\tilde{\Theta} \equiv \begin{bmatrix} \tilde{\Phi} & \tilde{\Theta}_{\lambda+1} & \tilde{\Theta}_{\lambda+2} & \dots & \tilde{\Theta}_{\nu-1} & \tilde{\Theta}_{\nu} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

(注2) (14) 式が完全可制御とならないのは、定常ゲインが零であるシステムとか、1 入力2 出力のシステムのように、任意の零でない目標入力にオフセットなしに定常的に合致させることが本来物理的に不可能なシステムの場合である³⁾。

$$\tilde{\Theta} \equiv \tilde{\Theta}'[\lambda \mathbf{I} \ 0 \dots 0]' \quad (23)$$

である。このとき、評価関数はつぎのようになる。

$$J = \sum_{k=1}^{\infty} [\mathbf{z}'(k)\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{z}(k) + \mathbf{w}'(k-1)\mathbf{P}\mathbf{w}(k-1)] \quad (24)$$

ここで、 $\tilde{\mathbf{Q}}$ は

$$\tilde{\mathbf{Q}} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{C}'\mathbf{Q}_1\mathbf{C} & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

で定義される $\{n+m(\nu-\lambda+1)\}$ 次の正方行列である。

(20) 式の条件のもとで(24) 式を最小にする問題は、いわゆるレギュレータ問題としてよく知られている。先に(14) 式は完全可制御と仮定したから、(20) 式も完全可制御となるので、 J を最小とする $\mathbf{w}(k)$ は

$$\mathbf{w}(k) = -\mathbf{H}\mathbf{z}(k) \quad (26)$$

として求められる⁸⁾。 $\mathbf{H}$ はつぎの漸化式で求められる $\mathbf{H}(i)$ の定常値である。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}(i) &= [\tilde{\Phi}'\{\tilde{\mathbf{Q}} + \mathbf{R}(i-1)\}\tilde{\Theta} + \mathbf{P}]^{-1}\tilde{\Theta}' \\
 &\quad \times \{\tilde{\mathbf{Q}} + \mathbf{R}(i-1)\}\tilde{\Phi}
 \end{aligned} \quad (27)$$

$$\mathbf{R}(i) = \tilde{\Phi}'\{\tilde{\mathbf{Q}} + \mathbf{R}(i-1)\}\{\tilde{\Phi} - \tilde{\Theta}\mathbf{H}(i)\}, \mathbf{R}(0) = 0 \quad (28)$$

$$(i=1, 2, \dots)$$

(26), (19) 式より J を最小とする意味で最適な操作量を $\tilde{\mathbf{u}}_0(k)$ とすると $\tilde{\mathbf{u}}_0(k)$ は

$$\tilde{\mathbf{u}}_0(k) = \mathbf{w}(k+\lambda) = -\mathbf{H}\mathbf{z}(k+\lambda) \quad (29)$$

となる。これから時刻 k における最適操作量 $\tilde{\mathbf{u}}_0(k)$ を求めるには時間 λ だけ進んだ状態変数の値 $\mathbf{z}(k+\lambda)$ が必要であることがわかる。 $\mathbf{z}(k+\lambda)$ は(19), (20) 式を利用すると、時刻 k における $\mathbf{z}(k)$ と、 k 時点より以前の操作量 $\tilde{\mathbf{u}}(k-1)$, $\tilde{\mathbf{u}}(k-2)$, ..., $\tilde{\mathbf{u}}(k-\lambda)$ より

$$\mathbf{z}(k+\lambda) = \tilde{\Phi}^{\lambda}\mathbf{z}(k) + \sum_{i=1}^{\lambda} \tilde{\Phi}^{\lambda-i}\tilde{\Theta}\tilde{\mathbf{u}}(k+j-1-\lambda) \quad (30)$$

として予測できる。(30) 式を用いると(29) 式は

$$\tilde{\mathbf{u}}_0(k) = -\mathbf{K}\mathbf{z}(k) - \sum_{l=1}^{\lambda} \mathbf{K}_l\tilde{\mathbf{u}}(k-l) \quad (31)$$

となる。ここで、

$$\mathbf{K} \equiv \mathbf{H}\tilde{\Phi}^{\lambda} \quad (32)$$

$$\mathbf{K}_l \equiv \mathbf{H}\tilde{\Phi}^{l-1}\tilde{\Theta} \quad (l=1, 2, \dots, \lambda) \quad (33)$$

である。システムへの最適操作量 $\mathbf{u}_0(k)$ は(31) 式に(21), (15), (10) 式および(7) 式を代入し、

$$\mathbf{K} \equiv [\mathbf{K}_0\mathbf{K}_{\lambda+1}\dots\mathbf{K}_{\nu}] \quad (34)$$

$$\mathbf{K}_0 \equiv [\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2] \quad (35)$$

と表わすと

$$\mathbf{u}_0(k) = -\mathbf{G}_1\mathbf{x}(k) - \mathbf{G}_2\mathbf{v}(k) - \sum_{l=1}^{\nu} \mathbf{K}_l\mathbf{u}(k-l)$$

Fig. 3 Step responses

ことがわかる。この結果はフィードフォワード制御や予測制御がむだ時間をもつシステムに有効に働いていることを示している。

5. むすび

本論文では入力にむだ時間をもつ多変数システムのフィードフォワード・フィードバック制御系の設計問題を離散形のレギュレータ問題に帰着させ設計する方法について述べた。この設計法の特長は以下のとおりである。

- (i) 最適操作量の求解が極めて簡単である。
  - (ii) 設計された制御系はフィードバックならびにフィードフォワード経路を有し、むだ時間分だけの予測制御を行なう。
  - (iii) 積分形コントローラを系内に有しているため、システムパラメータの変動や外乱に強い。
  - (iv) 積分形コントローラの動作にはむだ時間分だけの遅れを入れてあるため、システムのむだ時間が大きくなっても設計された制御系の過渡応答が特に悪くならないということはない。
  - (v) 制御系内のパラメータは目標入力の大きさとは無関係にシステム方程式のパラメータと評価関数中の重み行列のみから定まる。
- これらはいずれも現実のシステムの制御問題を扱うのに適当すると考えられる。

参考文献

- 1) C.S. Lin: An Optimal DDC Algorithm for Process with Time-Delay in Control and Disturbance Input, JACC Preprints, 546/552 (1971)
- 2) 示村悦二郎：むだ時間を含む系の最適問題，計測と制御，8-8，526/536 (1969)
- 3) 朴炳植・鈴木胖・藤井克彦：積分形コントローラをもつ多変数線形最適追従系の設計，計測自動制御学会論文集，10-1，1/5 (1974)
- 4) 朴炳植・鈴木胖・藤井克彦：多変数線形最適サーボ系の設計，計測自動制御学会論文集，8-5，568/575 (1972)

- 5) B.C. Kuo: Discrete-Data Control Systems, chap. 6, Prentice-Hall (1970)
- 6) 朴炳植・鈴木胖：むだ時間をもつ多変数プロセスの最適追従系の設計，第11回SICE学術講演会予稿集 (1972)
- 7) 朴炳植・鈴木胖：むだ時間をもつ多変数プロセスのデジタル・フィードフォワード・フィードバック制御系の設計，第15回自動制御連合講演会前刷 (1972)
- 8) B.D.O. Anderson and J.B. Moore: Linear Optimal Control, 328/325, Prentice-Hall (1971)
- 9) O.J.H. Smith: A Controller to Overcome Dead Time, ISA J., 6, 28/33 (1959)
- 10) F. Kurzweil: The control of Multivariable Processes in the Presence of Pure Transport Delays, IEEE Trans., AC-8-1, 27/34 (1963)

《付 録》

1. むだ時間システムの表現

(14)式で表わされるシステムの状態変数は(21)式で定義される $z(k)$ ではなく

$$\tilde{z}(k) \equiv [\tilde{x}'(k) \tilde{u}'(k-1) \cdots \tilde{u}'(k-\lambda) \cdots \tilde{u}'(k-\nu)]' \quad (\text{A.1})$$

である¹⁰⁾。したがって、状態変数理論を形式的に適用すれば(14)式は(20)式ではなく

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}(k+1) \\ \tilde{u}(k) \\ \tilde{u}(k-1) \\ \vdots \\ \tilde{u}(k-\nu+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & 0 & \cdots & \theta_\lambda & \cdots & \theta_\nu \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(k) \\ \tilde{u}(k-1) \\ \tilde{u}(k-2) \\ \vdots \\ \tilde{u}(k-\nu) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{u}(k) \quad (\text{A.2})$$

と変換される。しかし、 $\tilde{z}(k)$ の次元は $z(k)$ に比べ $m\lambda$ 大きい。このため、筆者らは $\tilde{z}(k)$ の中の特に $z(k)$ に着目して議論を展開することにより計算機の記憶容量、求解時間などの問題を減じることを試みた。状態変数のうち見かけ上省略された $\{\tilde{u}(k-1), \dots, \tilde{u}(k-\lambda+1)\}$ は $z(k+\lambda)$ を予測するという形で必要十分だけ考慮されている。

(20)式に基づいた本手法では求解が簡単になるほかむだ時間システムに対する予測制御の必要性をも明確にできるという利点もある。なお本文では便宜上 $\tilde{z}(k)$ の代わりに $z(k)$ を(20)式の状態変数とよんでいる。

2. 多項式形目標入力の場合

まず、 $q=1$ の場合について説明する。(6)，(9)式は1階階差をとると定常状態でそれぞれ

$$\Delta x_s(k+1) = \Phi \Delta x_s(k) + \sum_{i=\lambda}^v \theta_i \Delta u_s(k-i) \quad (\text{A.3})$$

$$C \Delta x_s(k) = \Delta r(k) \quad (\text{A.4})$$

となる。ここで

$$\Delta x_s(k) \equiv x_s(k) - x_s(k-1) \quad (\text{A.5})$$

$$\Delta u_s(k) \equiv u_s(k) - u_s(k-1) \quad (\text{A.6})$$

$$\Delta r(k) \equiv r(k) - r(k-1) \quad (\text{A.7})$$

である。(A.4)式において、 $r(k)$ の1階差分 $\Delta r(k)$ は $q=1$ であるから k によらず一定の値をとる。したがって、(A.3)、(A.4)式は $\Delta r(k) = \Delta r$ なる一定の大きさのステップ状入力をうけて、 $\Delta y(k) \equiv C \Delta x(k)$ で定義される出力が定常状態に達して Δr に一致したときの状態変数が $\Delta x_s(k)$ 、入力が $\Delta u_s(k)$ となることを表わしている。したがって、 $\Delta x_s(k)$ 、 $\Delta u_s(k)$ は k によらず一定となり、(A.3)、(A.4)式は

$$\begin{bmatrix} \Phi - I & \sum_{i=\lambda}^v \theta_i \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_s \\ \Delta u_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta r \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

と書ける。上式より

$$\Delta x_s = M_{12} \Delta r \quad (\text{A.9})$$

$$\Delta u_s = M_{22} \Delta r \quad (\text{A.10})$$

と求められる。(A.9)、(A.10)式より導かれる

$$x_s(k+1) = x_s(k) + M_{12} \Delta r \quad (\text{A.11})$$

$$u_s(k-i) = u_s(k) - i M_{22} \Delta r \quad (i=\lambda, \dots, v) \quad (\text{A.12})$$

なる関係を用いると(6)、(9)式は

$$\begin{bmatrix} \Phi - I & \sum_{i=\lambda}^v \theta_i \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s(k) \\ u_s(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{M}_{12} & \Delta r \\ & r(k) \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

ここで

$$\tilde{M}_{12} \equiv M_{12} + \sum_{i=\lambda}^v i \theta_i M_{22} \quad (\text{A.14})$$

となる。上式より

$$x_s(k) = M_{11} \tilde{M}_{12} \Delta r + M_{12} r(k) \quad (\text{A.15})$$

$$u_s(k) = M_{21} \tilde{M}_{12} \Delta r + M_{22} r(k) \quad (\text{A.16})$$

と求められる。ここで $M_{ij}(i, j=1, 2)$ はシステムパラメータより定められる定数行列である。最適操作量 $u_0(k)$ は(A.15)、(A.16)式を(36)式に代入して

$$\begin{aligned} u_0(k) = & -G_1 x(k) - G_2 v(k) - \sum_{l=1}^v K_l u(k-l) \\ & + \sum_{l=0}^v N_l r(k) d(k-l) + \sum_{l=0}^v N_l^1 \Delta r d(k-l) \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

ここで、

$$N_0^1 = (G_1 M_{11} + M_{21}) \tilde{M}_{12} \quad (\text{A.18})$$

$$N_l^1 = K_l M_{21} M_{12} \quad (l=1, 2, \dots, v) \quad (\text{A.19})$$

と求められる。

一般の q 次の多項式形目標入力をうける場合については(6)、(9)式の q 階階差をとると $x_s(k)$ 、 $u_s(k)$ を定めることができ、最適操作量 $u_0(k)$ はつぎの形で求められる。

$$\begin{aligned} u_0(k) = & -G_1 x(k) - G_2 v(k) - \sum_{l=1}^v K_l u(k-l) \\ & + \sum_{l=0}^v N_l r(k) d(k-l) + \sum_{j=1}^q \sum_{l=0}^v N_l^j \Delta^j r(k) d(k-l) \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

ここで、 $\Delta^j r(k)$ は $r(k)$ の j 次の差分を表わし、 N_l^j ($j=1, \dots, q$; $l=0, 1, \dots, v$)はシステムのパラメータおよび評価関数中の重み行列により定められる定数行列である。