Lyapunov 法によるモデル規範形適応制御系の設計[†]

神宮寺 俊 夫*・小 林 精 次*

Design of Model Reference Adaptive Control Systems
via the Method of Lyapunov

Toshio JINGUJI* and Seiji KOBAYASHI*

Most methods used for designing model reference adaptive control systems are restricted to the case where all the parameters in the plant and control matrices are mutually independent. But, in many practical cases such an assumption is not necessarily valid. In this paper, new general design methods are presented via the method of Lyapunov which can be used in such cases as the same unknown parameters and adjustable parameters may appear in two or more elements of these matrices simultaneously. As these conditions are less restrictive compared with the other method, this design method is considered to have much applicability to a broad class of adaptive systems.

First, the relations among the parameters of the plant are classified into two cases and for the both cases the well known integral parameter adjustment rule is derived by applying the nonlinear equations previously suggested by Lüders and Narendra. After that, the "proportional plus integral" adjustment rule which is quite effective for the improvement of the transient response characteristics is also derived by choosing appropriate Lyapunov function.

Illustrative examples for these rules are given with their simulation results. In some cases, unrealizable adjustment rule may be derived. An example suggests how this situation can be overcome by constructing an approximate controller.

に対し、別に理想特性を有するモデルを作り両者の特性が一致するようにプラントのパラメータを調整するものを意味する。最初の M. R. A. C. S は 1958 年に M. I. T. 研究所の Whitaker により導入された M. I. T. scheme であるが、この M. I. T. scheme は、多数のフィルタを必要とする、全体として不安定系を構成することが多い等の難点を有するものであった。

前者は、Donalson¹⁾、Kokotovic²⁾ らにより、後者は、Parks³⁾、Buchart and Schackcloth⁴⁾ らにより改良され、現在、パラメータ調整則の設計法に関しては、評価関数の最小化に基づく方法^{2), 5), 6)}、安定性に基づく方法^{3), 7)~9)}、の二つに大別できる。従来、安定性を利用した方法には、Lyapunov の直接法が多く用いられてき^{7), 10)}たが、最近ではポポフの超安定定理を利用したもの^{8), 13), 14)}も少なくない。設計問題に関しては、両者に大差はないが Lyapunov 法による方がより heuristic であり直観的であるといえる。しかし、いずれの方法に基づいて設計する場合にも、プラント中のパラメータは互いに独立であるとして扱われている場合が多い。

本論文では、プラント中のパラメータが従属して変動するような場合も含んだより一般的な系に対するパラメータ調整則の Lyapunov 法による設計について考察する。また、導出された調整則に対する過渡応答特性の改善の方法を述べ、その例題も示す。さらに、近似的なコントローラの構成が必要となる場合の一例をそのシミュレーション結果とともに示す。

1. ま え が き

本論文で議論するモデル規範形適応制御系 (M. R. A. C. S) とは、特性変動のあるプラント (可調整系)

2. 問題と仮定

プラントと規範モデルがそれぞれ

$$\dot{x}_p = A_p x_p + B_p r \quad (1)$$

$$\dot{x}_m = A_m x_m + B_m r \quad (2)$$

で記述されているとする。ここで、 x_p, x_m は n 次元状態ベクトル、 r は k 次元制御ベクトル、 A_p は $(n \times n)$ プラントシステム行列、 B_p は $(n \times k)$ プラント制御行

[†] 第 17 回自動制御連合講演会で発表 (昭 49・11)。

* 早稲田大学理工学部 東京都新宿区西大久保 4-170

* School of Science and Engineering, Waseda University, Shinjuku-ku, Tokyo

(Received December 12, 1974)

列で, A_p と B_p は未知変動パラメータと可調整パラメータを含む。また, A_m は $(n \times n)$ モデルシステム行列, B_m は $(n \times k)$ モデル制御行列で, ともに定数行列とする。このプラントと規範モデルの状態誤差

$$e = x_m - x_p \quad (3)$$

が $t \rightarrow \infty$ で漸的に 0 となるような可調整パラメータの調整則を求めるのが目的である。ただし, 以下の議論では, 共通してつぎのような仮定が成立しているものとする。

- (a) 規範モデルのシステム行列は安定である。
- (b) 可調整パラメータを調整し, プラントと規範モデルのダイナミクスを一致させることができる。すなわち, パラメータ可調整¹²⁾である。
- (c) 同一の変動パラメータと可調整パラメータが A_p と B_p の二つ以上の要素に同時に現われてもよい。
- (d) プラントの変動パラメータは, その時間的変化の割合がきわめて小さく, 適応動作時間内では, 一定とみなせる。
- (e) すべての状態は可測定である。

従来, Lyapunov 法により適応ループを構成するさいには, 通常(c)のような仮定はされていない。しかし, 実際の物理システムを(1)式のような状態変数形で記述するとほとんどすべての場合, 同一の変動パラメータ, 可調整パラメータが A_p, B_p の二つ以上の要素に同時に現われ, それぞれのパラメータが独立に現われるのは, むしろその特殊な場合であるといえる。したがって(c)の仮定は, より一般的であり, より広範囲の問題への応用を可能にするものであると考えられる。

3. 適応ループの構成

以下の議論に先立って, Lüders と Narendra が示した非線形系とその系の大域的漸近安定を保証する Lyapunov function¹¹⁾ について述べる。

《Lüders and Narendra の非線形系》

つぎのような非線形系を考える。

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_1 x_1 + [C_1^T x_1, \dots, C_n^T x_1]^T x_2 \\ &\quad + [H_1^T u(t), \dots, H_n^T u(t)]^T x_2 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= A_2 x_2 - P_2^{-1} [C_1^T x_1, \dots, C_n^T x_1] P_1 x_1 \\ &\quad - P_2^{-1} [H_1^T u(t), \dots, H_n^T u(t)] P_1 x_1 \end{aligned} \quad (5)$$

ここで, A_1, A_2 は安定行列, $C_i, H_i (i=1, 2, \dots, n)$ は定数行列, P_1, P_2 は

$$P_1 A_1 + A_1^T P_1 = -Q_1 \quad (6)$$

$$P_2 A_2 + A_2^T P_2 = -Q_2 \quad (7)$$

を満す正定値対称行列, Q_1, Q_2 も正定値対称行列と

する。また, T は行列の転置を表わす。

この系に対しては

$$V(x_1, x_2) = x_1^T P_1 x_1 + x_2^T P_2 x_2 \quad (8)$$

なる 2 次形式の Lyapunov function が存在し, その(4), (5)式に沿っての時間微分は

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -x_1^T Q_1 x_1 - x_2^T Q_2 x_2 \quad (9)$$

となり, (4), (5)式で記述される非線形系は, 大域的漸近安定が保証されている。

$A_2 = 0$ の場合には, (8)式の P_2 として任意の正定値行列をとると,

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -x_1^T Q_1 x_1$$

となり, x_1 の漸近安定性は保存される。

3.1 積分形調整則

さて, いま

$$\Delta A = A_m - A_p, \quad \Delta B = B_m - B_p$$

とすると, (1), (2), (3)式より

$$\dot{e} = A_m e - \Delta A e + \Delta A x_m + \Delta B r \quad (10)$$

なる周知の状態誤差に関する式を得る。したがって(4)式と(10)式の各項を対応させ, (10)式を(4)式の形で記述したとき, x_2 としてその要素がパラメータエラー(注¹⁾)から成るようなベクトルをとることができれば, (5)式より可調整パラメータの調整則を導出することが可能となる。ここでは, 議論を簡明にするために, 先に

$$x_1 = e \quad A_1 = A_m \quad u = \begin{pmatrix} x_m \\ r \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$x_2; m \text{ 次元パラメータエラーベクトル (注 } 2 \text{)} \quad (12)$$

なる対応をさせ, (10)式を(4)式で記述したときの $C_i, H_i (i=1, 2, \dots, n)$ なる行列を求めることにする。ここで, $\Delta A, \Delta B$ の形として二つの場合を考える。

【場合 1】

$\Delta A, \Delta B$ が

$$\Delta A = \begin{pmatrix} x_2^T a_1^1, \dots, x_2^T a_n^1 \\ \vdots \\ x_2^T a_1^n, \dots, x_2^T a_n^n \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\Delta B = \begin{pmatrix} x_2^T b_1^1, \dots, x_2^T b_k^1 \\ \vdots \\ x_2^T b_1^n, \dots, x_2^T b_k^n \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$a_j^i, b_l^i (i, j=1, 2, \dots, n, l=1, 2, \dots, k);$$

m 次元定数ベクトル

のように記述できる場合に, まず $C_i (i=1, 2, \dots, n)$ を求める。(4)式の第 2 項は

(注 1) パラメータエラーとは, これらの量が 0 になるとき $\Delta A, \Delta B$ が 0 になるようなものをいう。

(注 2) パラメータエラーのうち互いに独立なものをすべて, 任意の順序に並べて作った列ベクトル。

$$[C_1^T x_1, \dots, C_n^T x_1]^T x_2 = \begin{pmatrix} x_2^T C_1^T \\ \vdots \\ x_2^T C_n^T \end{pmatrix} x_1 \quad (15)$$

と書けることから, (10)式第2項, (13), (15)式を比較して

$$C_i^T = (-a_1^i, \dots, -a_n^i) \quad i=1, 2, \dots, n \quad (16)$$

なる $(n \times m)$ 行列 $C_i (i=1, 2, \dots, n)$ が求まる.

同様に(4)式の第3項は

$$[H_1^T u(t), \dots, H_n^T u(t)]^T x_2 = \begin{pmatrix} x_2^T H_1^T \\ \vdots \\ x_2^T H_n^T \end{pmatrix} u(t) \quad (17)$$

のように変形でき, (10)式の後2項は(13), (14)式を使って

$$\begin{aligned} \Delta A x_m + \Delta B r \\ = \begin{pmatrix} x_2^T a_1^1, \dots, x_2^T a_n^1, x_2^T b_1^1, \dots, x_2^T b_k^1 \\ \vdots \\ x_2^T a_1^n, \dots, x_2^T a_n^n, x_2^T b_1^n, \dots, x_2^T b_k^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_m \\ r \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

と書けることから, (17), (18)式を比較して

$$H_i^T = (a_1^i, \dots, a_n^i, b_1^i, \dots, b_k^i) \quad i=1, 2, \dots, n \quad (19)$$

なる $(n+k) \times m$ 行列 $H_i (i=1, 2, \dots, n)$ が求まる.

(5)式において $A_2=0$ とおき, C_i, H_i として(16), (19)式で決定された行列を用いれば,

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = -P_2^{-1} [C_1^T x_1, \dots, C_n^T x_1] P_1 x_1 \\ - P_2^{-1} [H_1^T u(t), \dots, H_n^T u(t)] P_1 x_1 \end{aligned} \quad (20)$$

なるパラメータエラーベクトル x_2 に関する式を得る. ただし, (6)式より, P_1 は

$$\begin{aligned} P_1 A_m + A_m^T P_1 = -Q_1 \\ Q_1; \text{任意の正定値対称行列} \end{aligned} \quad (21)$$

を満たす正定値対称行列で, P_2 は任意な正定値対称行列であればよい. (20)式をもとにして, 積分形適応ループが構成できるので, この式を積分形調整則とよぶことにする. (1), (2)式で記述される系に導出された調整則を適用すると, $t \rightarrow \infty$ のとき $e \rightarrow 0$ とすることができる. しかし, パラメータエラー x_2 に対しては必ずしも漸近性を期待することはできない^{7), 14), 15)}.

(注意) これは, $A_2=0$ としたために $\dot{V}$ が半負定値となったことに起因する. $A_2 \neq 0$ とする方が得策のように思えるが, 反面適応ループの構成を困難にする.

[場合 2]

$\Delta A, \Delta B$ が

$$\begin{aligned} \Delta A = \Delta A_1 + \Delta A_2 \\ = \begin{pmatrix} x_2^T a_1^1, \dots, x_2^T a_n^1 \\ \vdots \\ x_2^T a_1^n, \dots, x_2^T a_n^n \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} x_2^T M_1^1 x_2, \dots, x_2^T M_n^1 x_2 \\ \vdots \\ x_2^T M_1^n x_2, \dots, x_2^T M_n^n x_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \Delta B = \Delta B_1 + \Delta B_2 \\ = \begin{pmatrix} x_2^T b_1^1, \dots, x_2^T b_k^1 \\ \vdots \\ x_2^T b_1^n, \dots, x_2^T b_k^n \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} x_2^T N_1^1 x_2, \dots, x_2^T N_k^1 x_2 \\ \vdots \\ x_2^T N_1^n x_2, \dots, x_2^T N_k^n x_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

$$a_j^i, b_l^i (i, j=1, 2, \dots, n, l=1, 2, \dots, k);$$

m 次元定数ベクトル

$$M_j^i, N_l^i (i, j=1, 2, \dots, n, l=1, 2, \dots, k);$$

$(m \times m)$ 対称行列

で記述されるような場合には, 直接 Lüders and Narendra の非線形系を構成するのは困難であるから(4), (5)式に項を追加し

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + [(C_1^T + \tilde{C}_1^T(x_2))x_1, \dots, \\ (C_n^T + \tilde{C}_n^T(x_2))x_1]^T x_2 \\ + [(H_1^T + \tilde{H}_1^T(x_2))u(t), \dots, \\ (H_n^T + \tilde{H}_n^T(x_2))u(t)]^T x_2 \quad (24) \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 - P_2^{-1} [(C_1^T + \tilde{C}_1^T(x_2))x_1, \dots, \\ (C_n^T + \tilde{C}_n^T(x_2))x_1] P_1 x_1 \\ - P_2^{-1} [(H_1^T + \tilde{H}_1^T(x_2))u(t), \dots, \\ (H_n^T + \tilde{H}_n^T(x_2))u(t)] P_1 x_1 \end{aligned} \quad (25)$$

の形にする. ただし, $A_1, A_2, P_1, P_2, C_i, H_i$ については(4), (5)式の場合と同一であり, $\tilde{C}_i(x_2), \tilde{H}_i(x_2) (i=1, 2, \dots, n)$ は x_2 よりなる行列を意味する. この非線形系についても(8)式の V が Lyapunov function となり, その大域的漸近安定性は保証される. したがってここでは, $\Delta A, \Delta B$ が(22), (23)式で与えられたときの(10)式を(24)式で記述することとする. [場合1]と同様に(11), (12)式のような対応をさせると, ΔA^1 は[場合1]の ΔA と同一の形であるから C_i, H_i は(16), (19)式で与えられる. したがって $\tilde{C}_i(x_2), \tilde{H}_i(x_2)$ を求めればよい. まず

$$[\tilde{C}_1^T(x_2)x_1, \dots, \tilde{C}_n^T(x_2)x_1]^T x_2 = \begin{pmatrix} x_2^T \tilde{C}_1^T(x_2) \\ \vdots \\ x_2^T \tilde{C}_n^T(x_2) \end{pmatrix} x_1 \quad (26)$$

と $\Delta A_2 e (= \Delta A_2 x_1)$ を比較するとただちに

$$\tilde{C}_i^T(x_2) = (-M_1^i x_2, \dots, -M_n^i x_2) \quad i=1, 2, \dots, n \quad (27)$$

なる $(n \times m)$ 行列 $\tilde{C}_i(x_2)$ が求まる. 同様に

$$\begin{aligned} [\tilde{H}_1^T(x_2)u(t), \dots, \tilde{H}_n^T(x_2)u(t)]^T x_2 \\ = \begin{pmatrix} x_2^T \tilde{H}_1^T(x_2) \\ \vdots \\ x_2^T \tilde{H}_n^T(x_2) \end{pmatrix} u(t) \end{aligned} \quad (28)$$

と $\Delta A_2 x_m + \Delta B_2 r (= \Delta A_2, \Delta B_2 u(t))$ を比較すると

$$\tilde{H}_i^T(x_2) = (M_1^i x_2, \dots, M_n^i x_2, N_1^i x_2, \dots, N_k^i x_2) \quad (29)$$

なる $(n+k) \times m$ 行列 $\tilde{H}_i(x_2)$ が求まる. (25)式にお

いて $A_2=0$ とおき, $C_i, H_i, \tilde{C}_i(x_2), \tilde{H}_i(x_2)$ として (16), (19), (27), (29) 式で決定された行列を使用すれば, この場合における調整則として,

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = & -P_2^{-1}[(C_1^T + \tilde{C}_1^T(x_2))x_1, \dots, \\ & (C_n^T + \tilde{C}_n^T(x_2))x_1]P_1x_1 \\ & -P_2^{-1}[(H_1^T + \tilde{H}_1^T(x_2))u(t), \dots, \\ & (H_n^T + \tilde{H}_n^T(x_2))u(t)]P_1x_1 \end{aligned} \quad (30)$$

が得られる.

以上, 二つの場合について述べたが [場合 1] は, [場合 2] において $\Delta A_2=0, \Delta B_2=0$ としたときであるから (20) 式は (30) 式に含まれている. したがって以後 (20) 式の調整則も含めて (30) 式の調整則を積分形調整則とよぶことにする.

(注意) [場合 1] すなわち $\Delta A_2=0, \Delta B_2=0$ のとき以外は (30) 式の右辺に x_2 が現われるため, その初期値が既知でないと, この式から実際の適応ループが構成できないこともある. そのため, 実用上差支えない程度の近似的な構成を余儀なくされることも起こる. (例題 2 参照)

3.2 比例+積分形調整則

仮定 (d) から明らかなように特性変動の速い系に対しても良好な適応動作が行なわれるためには, 適応時間の速い調整則が望まれる¹⁵⁾. 3.1 の積分形調整則を使用して適応ループを構成するさいには, 通常, 適応ループのゲインを増大すると速応性は改善されるが, 応答は非常に振動的になる場合が多い. また, 物理的実現性, 雑音などのより実際の面から考えても, 過大なループゲインは望ましくない. この欠点は, 適応ループの積分器に比例動作を付加することにより改良されることが多い^{10), 13)}. そこで 3.1 の積分形調整則に比例の項を加えることを考える.

まず

$$\begin{aligned} g = & P_2^{-1}[(C_1^T + \tilde{C}_1^T(x_2))x_1, \dots, \\ & (C_n^T + \tilde{C}_n^T(x_2))x_1]P_1x_1 \\ & + P_2^{-1}[(H_1^T + \tilde{H}_1^T(x_2))u(t), \dots, \\ & (H_n^T + \tilde{H}_n^T(x_2))u(t)]P_1x_1 \end{aligned} \quad (31)$$

とすると (30) 式は

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = & -g \\ & -\alpha g \quad (\alpha \geq 0) \end{aligned} \quad (32)$$

を考えたとしても依然として状態誤差 $e (=x_1)$ の漸近安定性は保証されている. 実際,

$$V = x_1^T P_1 x_1 + (x_2 + \alpha g)^T P_2 (x_2 + \alpha g) \quad (33)$$

なる正定値関数 V の (24), (32) 式にそっての時間微分を考えると, 簡単な計算により

$$\dot{V} = -x_1^T Q_1 x_1 - 2\alpha g^T P_2 g \quad (\alpha \geq 0)$$

となることがわかる. すなわち, (33) 式の V は (24), (32) 式で記述される系の Lyapunov function となっている. したがって, $t \rightarrow \infty$ のとき $x_1 = e = 0$, また, $x_1 = 0$ のとき $g = 0$ であるから (32) 式より $x_2 = \text{const.}$ となる. (32) 式にしたがって構成される適応ループは一般に比例+積分形になるので, これを比例+積分形調整則とよぶ. $\alpha=0$ としたものは積分形調整則 (30) 式に一致する. 比例項が過渡応答特性の改善に有効であることはつぎの例題からもわかる.

4. 例 題

前述の手法を用いた適応ループの構成法について, 簡単な二つの例題とその計算機によるシミュレーションの結果を示す.

[例題 1] それぞれのダイナミクスが

$$\text{プラント; } \begin{pmatrix} \dot{x}_{p1} \\ \dot{x}_{p2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L n_p & b \\ -K b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{p1} \\ x_{p2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n_p \\ C \end{pmatrix} r \quad (34)$$

$$\text{規範モデル; } \begin{pmatrix} \dot{x}_{m1} \\ \dot{x}_{m2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L n_m & b \\ -K b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{m1} \\ x_{m2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n_m \\ C \end{pmatrix} r \quad (35)$$

$$n_p = n_o \cdot n_c \quad \dot{n}_v \approx 0 \quad (36)$$

n_v ; 変動パラメータ (正值)

n_c ; 可調整パラメータ

与えられた場合の n_c の調整則を求めてみよう.

いま,

$$x_1 = e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{m1} - x_{p1} \\ x_{m2} - x_{p2} \end{pmatrix}, \quad x_2 = n_m - n_p \quad (37)$$

とすると

$$\Delta A = A_m - A_p = \begin{pmatrix} L x_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta B = B_m - B_p = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから, (16), (19) 式より

$$C_1^T = (-a_1^1, -a_2^1) = (-L, 0) \quad (38)$$

$$C_2^T = (-a_1^2, -a_2^2) = (0, 0) \quad (39)$$

$$H_1^T = (a_1^1, a_2^1, b_1^1) = (L, 0, 1) \quad (40)$$

$$H_2^T = (a_1^2, a_2^2, b_1^2) = (0, 0, 0) \quad (41)$$

また, $\Delta A, \Delta B$ 中に x_2 の 2 次以上の項は存在しないので

$$\tilde{C}_i^T(x_2) = \tilde{H}_i^T(x_2) = 0 \quad (i=1, 2) \quad (42)$$

(38)~(42) 式を (31) 式に代入して,

$$g = P_2^{-1}(L x_{p1} + r, 0) P_1 e \quad (43)$$

ここで, P_2 は任意な正定数であり, P_1 は (21) 式を満たす行列である. これを

$$P_1 = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

とすると, (32), (37), (43)式より比例+積分形調整則は,

$$\dot{x}_2 = -P_2^{-1} \left\{ (Lx_{p1} + r)(p_{11}e_1 + p_{12}e_2) + \alpha \frac{d}{dt} (Lx_{p1} + r)(p_{11}e_1 + p_{12}e_2) \right\}$$

となる. この式より実際のパラメータ調整則を求めると, (36), (37)式より

$$\dot{n}_c = \frac{1}{n_v P_2} \left\{ (Lx_{p1} + r)(p_{11}e_1 + p_{12}e_2) + \alpha \frac{d}{dt} (Lx_{p1} + r)(p_{11}e_1 + p_{12}e_2) \right\}$$

となる. これより n_c の発生機構は Fig. 1 のような比例+積分形となる. ここで n_v は未知パラメータであるが, P_2 は任意な正定数であるから, $n_v \cdot P_2$ を任意な正数とみなすことができる. この $n_v \cdot P_2$ は適応ループゲインの逆数に相当する⁷⁾. $a=5$, $b=C=n_m=1$, $L=0.2$, $K=6$, $Q_1=I$ としたときのアナログシミュレーション結果の一例を Fig. 2 に示す. この例においては, 比例項の付加が応答特性の改善に非常に有効であることがわかる.

【例題 2】 前述の例題のように g にパラメータエラー x_2 が現われなければ, 導出された調整則からただちに, 適応ループを構成することが可能である. ここでは, g に x_2 が現われたときの近似的な積分形適応ループの構成例を示す.

それぞれのダイナミクスが

$$\text{プラント; } \dot{x}_p = -n_p^2 x_p + u \quad (44)$$

$$\text{規範モデル; } \dot{x}_m = -0.25 x_m + u \quad (45)$$

$$n_p = n_c - n_v - 0.5 \quad \dot{n}_v \approx 0 \quad (46)$$

n_v ; 未知変動パラメータ

n_c ; 可調整パラメータ

で与えられているとする. ここで

$$x_1 = e = x_m - x_p \quad x_2 = n_p - 0.5 \quad (47)$$

とすると

$$\Delta A = n_p^2 - 0.25 = x_2 + x_2^2 \quad \Delta B = 0$$

と書けるゆえ, $\Delta A_1 = x_2$, $\Delta A_2 = x_2^2$, $\Delta B_1 = 0$, $\Delta B_2 = 0$ と考えれば, (16), (19), (27), (29), (30)式より

$$\dot{x}_2 = -P_2^{-1} P_1 x_p x_1 (1 + x_2)$$

なる積分形調整則が得られる. (46), (47)式を用いて,

$$\dot{n}_c = -P_2^{-1} P_1 x_p e (n_c - n_v) \quad (48)$$

この式がパラメータ調整則を与えることになるが, この式中には未知パラメータ n_v が存在しており (48)式自身の実現性はない. そこで Fig. 3 で示すように

$$\dot{z} = -P_2^{-1} P_1 x_p e z \quad z(0) \neq 0 \quad (49)$$

で z を発生し, $z + w$ を n_c とする近似的なコントローラを用いる. ここで, w (定数) は n_v の推定値である. また, (49)式から明らかなように $z(0) = 0$ とすると $z(t) \equiv 0$, $n_v \equiv w$ となり適応ループが動作しないので $z(0) \neq 0$ とする必要がある. $w = n_v$ のとき, この近似的コントローラで発生された n_c は (48)式の n_c と一致する. 実際には, n_v は未知であるから, $w - n_v = \delta$ とすると $\delta \neq 0$ のとき, 一般には $t \rightarrow \infty$ で $e \rightarrow 0$ とはならない. δ と e の定常誤差との関係は, 以下のようにして求められる.

上述の近似コントローラの式は

$$\dot{n}_c = -P_2^{-1} P_1 x_p e (n_c - n_v - \delta) \quad (50)$$

となる. いま

$$V = P_1 e^2 + P_2 (n_c - n_v - 1 + \delta)^2$$

を考えると, (44), (45), (46), (47), (50)式より

$$\dot{V} = -0.5 P_1 e \{ (1 - 2\delta)^2 e + 4\delta(1 - \delta)x_m \}$$

となる. これより $\dot{V} \leq 0$ が成立する領域として

$$|e| \geq \frac{4|\delta(1-\delta)|}{(1-2\delta)^2} |x_m| \quad (51)$$

が得られる. したがって (51)式の右辺は, $|e|$ の定常状態の上限を与えることとなり $\delta \neq 0$ の場合でも e はこの範囲におさえられることになる. この上限は $z(0) = 0$ の場合の $|e|$ の定常値に一致する. (51)式は十分条件であり $z(0) \neq 0$ としているので実際にはさらに良

Fig. 1
Controller
for example
1

Fig. 2

State error
responses
for a step
input ex-
ample 1
 $n_v P_2 = 1/30$

Fig. 3
Controller
for
example 2

Fig. 4 State error responses for a step input example 2 $P_2^{-1}P_1=5$

好な収束性が期待できる。 $\delta=0.5$ の場合が特に問題となるがシミュレーションの結果では、 $\delta<0$, $\delta>1$ の場合には(51)式に従い、 $\delta=0.5$ も含めて $0\leq\delta\leq 1$ の場合には、 e は漸近的に 0 になることが認められている。 Fig. 4 に 3 種の δ の値について、状態誤差の応答を示す。

5. 結 言

プラントのパラメータが従属して変動するような場合も、取扱うことのできる一般的な系に対するパラメータ調整則設計法について述べた。この方法は従来の設計法に比べ、より広範囲の問題に適用可能であると思われる。[場合 1] に対する調整則は、一般に実現容易であるが[場合 2] について導かれた調整則に対しては、近似的な構成が必要となる場合があることを簡単な例題により示した。また、比例+積分形調整則の使用により過渡応答特性の改善が可能であることを示した。この論文では、変動パラメータの変動速度はゆるやかで、事実上定数とみなして調整則を導いたが、実際にはかなり速く変動する系に対しても、この調整則は良好な追従性を示すことがシミュレーションにより確かめられている。

今後の研究課題としては、[場合 1], [場合 2] に対する条件をよりゆるやかなものとする、より一般的な近似回路の構成法を考え、応用可能な範囲を広げ

ることなどがある。

参 考 文 献

- 1) D.D. Donalson and C.T. Leondes: A model referenced parameter tracking technique for adaptive control systems, IEEE Trans. Appl. Ind., Sept. 241/262 (1963)
- 2) P.V. Kokotovic, J.V. Medanić, S.P. Bingulac and M.I. Vusković: Sensitivity method in the experimental design of adaptive control systems, Proc. 3rd IFAC Congr., 45 B. 1/45 B. 12 (1966)
- 3) P.C. Parks: Lyapunov redesign of model reference adaptive control systems, IEEE Trans. on A.C. AC-11-3, 362/367 (1966)
- 4) R.L. Butchart and B. Schackcloth: Synthesis of model reference adaptive control systems by Lyapunov's second method, Proc. 1965 IFAC Symp. Adaptive Control, ISA, 145/152 (1966)
- 5) D.F. Wilkie and W.R. Perkins: Design of Model Following Systems using the Companion Transformation, Automatica, 5-5, 615/622 (1969)
- 6) R.M. Dressler: An Approach to Model-Referenced Adaptive Control Systems, IEEE Trans. on A.C., AC-12-1, 75/80 (1967)
- 7) B. Porter and M.L. Tatnall: Performance characteristics of multivariable model-reference adaptive systems synthesized by Lyapunov's direct method, Int. J. Control, 10-3, 241/257 (1969)
- 8) I.D. Landou: A Hyperstability Criterion for Model Reference Adaptive Control Systems, IEEE Trans. on A.C., AC-14-5, 552/555 (1969)
- 9) I.D. Landau: Synthesis of Discrete Model Reference Adaptive Systems, IEEE Trans. on A.C., AC-16, 507/508 (1971)
- 10) C.C. Hang and P.C. Parks: Comparative Studies of Model Reference Adaptive Control Systems, IEEE Trans. on A.C., AC-18-5, 419/428 (1973)
- 11) G. Lüders and K.S. Narendra: Lyapunov Functions for Quadratic Differential Equations with Applications to Adaptive Control, AACC, paper 18-2, 568/571 (1972)
- 12) 伊藤: 適応制御系におけるパラメータ可調整, 計測と制御, 8-4, 240/246 (1969)
- 13) 鈴木, 土肥元: モデル規範形適応制御系の構成法について, 第 17 回自動制御連合講演会前刷 (1974)
- 14) 太田: ポポフの超安定論によるモデル規範形適応制御系の解析, 計測自動制御学会論文集, 10-3, 370/377 (1974)
- 15) 小林: モデル規範形適応制御系における適応速度の改善, 計測自動制御学会論文集, 10-2, 217/222 (1974)