未知排出源を含む分布定数系の状態推定[†]

佐 野 昭*

Estimation Algorithm in Distributed-Parameter Systems with Unknown Emission Sources

Akira SANO*

This paper presents the method of estimating the state of time-discrete distributed-parameter systems perturbed by constant but unknown inputs at a finite number of unknown points, as seen in atmospheric dispersion of stack effluents.

As the number of the state vectors and the inputs is increased, the amount of computation of the coupled estimation error covariance matrix becomes excessive. In order to avoid the large amount of computation, the estimation of the unknown inputs is decoupled in this method from the computation of the input-free estimate of the state. By this decoupling the following identification of the unknown input sources is made easy. The source detection algorithm is also presented in the paper.

The source detection algorithm is based on averaging the trace norm of the innovation terms of measurement data, and on recursively correcting the estimate of the sources by the gradient method to the direction of reducing the averaged trace norm. In the numerical examples, the method is applied to a diffusion process with unknown sources, and the results are analytically examined.

1. ま え が き

本論文は、大気拡散系などにみられるような有限個の未知排出源から一定未知量の汚染物質が排出される分布定数系の状態推定について考察し、特に状態分布と未知排出量を推定すると同時にその排出源の位置をも同定し、しかも大行列演算を避け、計算時間や丸め誤差、計算機のメモリを節減した方法を提案する。

排出源の位置が既知ならば、未知排出量と状態分布とを結合した新しい状態ベクトルを定義し、線形分

布定数系の最適推定フィルタを構成するのが一般的な方法と考えられる。線形偏微分方程式で記述される系の状態推定についてはすでに多くの研究がある^{1)~7)}。

しかし分布定数系の場合、最終的には空間差分法や固有関数展開などを用いて近似計算を行わなければならないが、このとき従来の方法では、排出源の総数、座標空間の次元、空間差分の分割数が増大するにつれて、推定誤差共分散や状態推定値の次元が増加し、これに伴って共分散の計算に必要な計算機のメモリや計算誤差が増大するという問題が生ずる。

そこで、本論文は Friedland の方法⁸⁾を分布定数系へ拡張することによって、この難点を緩和した新しい推定アルゴリズムを提案する。ここでは、まず排出量を零としたときの系のモデルから得られる状態分布の推定値をまったく分離して計算し、つぎに排出量の推定値および関連する諸変数を計算して前者に加えるという手続きによって実際の状態分布の推定値を求めている。また、高次元共分散を分割し、零排出量のモデルによる共分散行列をたとえば平方根法⁹⁾などで分離して高精度で計算しておくこともできるので、特に排出源位置の推定の場合、メモリや計算時間が大幅に節減される。

一方、排出源の位置推定に関して、砂原らはベイズ則を用いた推定法を提案している¹⁰⁾。この問題はパラメータ同定問題とみなせるので、ほかに確率近似法未知パラメータを状態ベクトルに付加して非線形推定を行なう方法、観測データの集積による最尤推定法¹¹⁾などが考えられる。本論文では、観測値の innovation 項を平均化フィルタに通して得られる共分散を最小化するように排出源位置の推定値を逐次修正するアルゴリズムについて述べ、簡単な拡散系へ適用した結果を検討する。

2. 状態推定式

分布定数系は離散時間形の線形の関数方程式

[†] 第 16 回自動制御連合講演会で発表 (昭 48・10)

* 慶応義塾大学工学部 横浜市港北区日吉町 832

* Faculty of Engineering, Keio University, Yokohama

(Received November 22, 1973)

$$\left. \begin{aligned} \theta(x, k+1) &= \mathcal{L}_x \theta(x, k) + c(x)u + v(x, k) \\ c(x)u &= \sum_{i=1}^N c_i(x, x_i^s)u_i \quad x \in \Omega \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

で与えられるとする。ここで、 Ω は r 次元 Euclid 空間の部分集合、 x は Ω 内の座標点とし、 $\theta(x, k)$ は Ω で定義される N_0 次元の状態分布を表わす。 $\mathcal{L}_x(\cdot)$ は Green 関数を核とする時不変形の積分作用素、さらに $c_i(x, x_i^s)$ もそれぞれ、

$$\mathcal{L}_x(\cdot) = \int_{\Omega} \theta(x, \xi, \Delta)(\cdot) d\xi, \quad \Delta \text{ はサンプル間隔}$$

$$c_i(x, x_i^s) = \int_0^{\Delta} \theta(x, x_i^s, \Delta - \tau) d\tau \cdot b,$$

N_0 次元ベクトル (2)

で与えられるとする(注 1)。 $u_i(k)$ は、時間的に変化しない i 番目の未知排出源 x_i^s から発生されるスカラーの排出量で、時間的に一定な確率変数とする。 u はベクトル $(u_1, \dots, u_N)'$ 、したがって、 $c(x)$ は $N_0 \times N$ の行列を表わす。

初期条件 $\theta(x, 0)$ 、および u はつぎに示す平均値と共分散をもつ正規分布に従うと仮定する；

$$\begin{aligned} E[\theta(x, 0)] &\triangleq \bar{\theta}(x, 0), \quad C_{\theta\theta}[\theta(x, 0), \theta(y, 0)] \\ &\triangleq \bar{P}_{\theta}(x, y, 0) \end{aligned} \quad (3a)$$

$$E[u] \triangleq \bar{u}(0), \quad C_{\theta u}[\theta(x, 0), u] \triangleq P_x(0) \quad (3b)$$

$$C_{\theta v}[\theta(x, 0), u] \triangleq P_{\theta v}(x, 0) = 0 \quad (3c)$$

一方、系の状態は、

$$\begin{aligned} \eta(x, k) &= h(x, k)\theta(x, k) + w(x, k), \\ x \in \Omega, \quad k &= 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (4)$$

で与えられる観測値から推定される。 $h(x, k)$ は、非対角要素が零の $N_0 \times N_0$ の既知行列とし、 $v(x, k)$ 、 $w(x, k)$ は、 $\theta(x, 0)$ および u とともに独立で、平均値 0 の離散時間形の互いに独立な白色正規性雑音であり、それぞれ、

$$C_{\theta v}[v(x, k), v(y, l)] \triangleq V(x, y, k)\delta_{kl}$$

$$C_{\theta w}[w(x, k), w(y, l)] \triangleq W(x, y, k)\delta_{kl},$$

δ_{kl} はクロネッカ記号、

(注 1) ある境界条件のもとで、

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \mathcal{A}_x \theta + \sum_{i=1}^N b u_i \delta(x - x_i^s)$$

の解が、Hadamard の意味で存在し ($\mathcal{A}_x$ は楕円形自己随伴偏微分作用素、 b は N_0 次元の既知ベクトルとする)、かつ

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \mathcal{A}_x \theta = \mathcal{A}_y \theta, \quad \theta(x, y, 0) = I \delta(x - y)$$

を満たす Green 核が存在し、解が

$$\begin{aligned} \theta(x, t) &= \int_{\Omega} \theta(x, \xi, t - t_0) \theta(\xi, t_0) d\xi \\ &+ \sum_{i=1}^N u_i \int_0^t \theta(x, x_i^s, t - \tau) d\tau \cdot b \end{aligned}$$

と表わされることを仮定する。

で表わされる共分散をもつと仮定する。

さて、 u は一定であるから、 $u(k+1) = u(k)$ 、 $k=0, 1, \dots$ と書けるので、新らしくベクトル $\phi'(x, k) = [\theta'(x, k), u_1(k), \dots, u_N(k)] = [\theta'(x, k), u'(k)]$ を定義すると、(1)、(4)式は、

$$\phi(x, k+1) = \mathcal{F}_x \phi(x, k) + \Gamma v(x, k) \quad (5)$$

$$\eta(x, k) = H(x, k)\phi(x, k) + w(x, k) \quad (6)$$

と書き直される。ここで、

$$\mathcal{F}_x(\cdot) = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_x(\cdot) & c(x) \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$H(x, k) = [h(x, k), 0]$$

とおいた。以下、しばらくの間、排出源の位置 $\{x_i^s\}$ は既知とする。すると、観測値 $\eta(x, k)$ までを用いた $\phi(x, k)$ の最小分散推定値 $\hat{\phi}(x, k|k)$ はつぎのように与えられる¹²⁾。

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(x, k|k) &= \hat{\phi}(x, k|k-1) + \int_{\Omega} K(x, z, k) \{ \eta(z, k) \\ &\quad - H(z, k)\hat{\phi}(z, k|k-1) \} dz \\ \hat{\phi}(x, k+1|k) &= \mathcal{F}_x \hat{\phi}(x, k|k) \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、 $K(x, z, k)$ は、Fredholm 形の積分方程式、

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} K(x, z, k) [H(z, k)P(z, y, k)H'(y, k) \\ + W(z, y, k)] dz = P(x, y, k)H'(y, k), \\ x, y \in \Omega \end{aligned} \quad (8)$$

から求められ、推定誤差共分散 $P(x, y, k)$ は、

$$\begin{aligned} P(x, y, k+1) &= \mathcal{F}_x [P(x, y, k) \\ &\quad - \int_{\Omega} K(x, z, k) H(z, k) P(z, y, k) dz] \mathcal{F}_x' \\ &\quad + \Gamma V(x, y, k) \Gamma' \end{aligned} \quad (9)$$

で与えられる。ここで、 $(\cdot)' \mathcal{F}_y'$ は $[\mathcal{F}_y(\cdot)]'$ を意味する。これらを要素別に計算すれば、(1)、(4)式の系に対する最適フィルタが得られる。

3. 共分散の計算

実際に(9)式を計算する場合には、空間差分法などの近似が必要となるので、排出源の個数 N 、空間座標の次元 r 、分割数が増加するにつれて、(9)式はきわめて高次元の行列演算を必要とし、各要素が互いに干渉しているので連立計算に伴う計算誤差や時間が増大する。そこで、Friedland⁹⁾の方法を分布定数系へ拡張することによって各要素を分離して計算できるアルゴリズムを提案する。まずつぎの定理が成立する。

《定理 1》 $\bar{P}(x, y, k)$ をある初期条件 $\bar{P}(x, y, 0)$ のもとでの(9)式の解とすれば、異なる任意の初期条件 $P(x, y, 0)$ に対する解は、

$$P(x, y, k) = \bar{P}(x, y, k) + R(x, k)M(k)R'(y, k) \quad (10)$$

で与えられる。ただし、 $R(x, k)$ および $M(k)$ は、それぞれ

$$R(x, k+1) = \mathcal{F}_x[R(x, k) - \int_{\Omega} \bar{K}(x, z, k)H(z, k)R(z, k)dz] \quad (11)$$

$$M(k+1) = M(k) - M(k) \int_{\Omega} J(z, k)H(z, k)R(z, k)dz M(k) \quad (12)$$

を満足する $(N_0 + N) \times N$, $N \times N$ の行列であり、 $\bar{K}(x, z, k)$, および $J(z, k)$ はつぎの積分方程式、

$$\int_{\Omega} \bar{K}(x, z, k)[H(z, k)\bar{P}(z, y, k)H'(y, k) + W(z, y, k)]dz = \bar{P}(x, y, k)H'(y, k) \quad x, y \in \Omega \quad (13)$$

$$\int_{\Omega} J(z, k)[H(z, k)P(z, y, k)H'(y, k) + W(z, y, k)]dz = R'(y, k)H'(y, k) \quad y \in \Omega \quad (14)$$

を満足する。

証明は数学的帰納法によるが、長くなるので省略する。文献 13) を参照されたい。集中定数系の場合と異なり、 $K(x, z, k)$ が積分方程式で与えられているためにその証明はそれほど容易ではなくなる。(11)式は、便宜上、

$$V(x, k) = R(x, k) - \int_{\Omega} \bar{K}(x, z, k)H(z, k)R(z, k)dz \quad (15)$$

$$R(x, k+1) = \mathcal{F}_x V(x, k) \quad (16)$$

と表わすことにする。前述のように、 $P(x, y, k)$ は $\phi'(x, k) = [\theta'(x, k), u'(k)]$ の推定誤差分散であるから、要素別に

$$P(x, y, k) = \begin{bmatrix} P_{\theta}(x, y, k) & P_{\theta u}(x, k) \\ P_{\theta u}'(y, k) & P_u(k) \end{bmatrix} \quad (17)$$

と書ける。ここで、定理 1 の $\bar{P}(x, y, k)$ として初期条件

$$\bar{P}(x, y, 0) = \begin{bmatrix} \bar{P}_{\theta}(x, y, 0) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

に対する(9)式の解とすれば(9)式の要素別の計算から、

$$\bar{P}(x, y, k) = \begin{bmatrix} \bar{P}_{\theta}(x, y, k) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

が得られる。ここで、 $\bar{P}_{\theta}(x, y, k)$ は、 $u(k) = 0$ の場合の(9)式の解であることが容易に確かめられる。す

なわち、 $\bar{P}_{\theta}(x, y, k)$ は、

$$\begin{aligned} & \bar{P}_{\theta}(x, y, k+1) \\ &= \mathcal{L}_x \left[\bar{P}_{\theta}(x, y, k) \right. \\ & \quad \left. - \int_{\Omega} \bar{K}_{\theta}(x, z, k)h(z, k)\bar{P}_{\theta}(z, y, k)dz \right] \\ & \quad \times \mathcal{L}_y' + V(x, y, k) \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \bar{K}_{\theta}(x, z, k)[h(z, k)\bar{P}_{\theta}(z, y, k)h'(y, k) \\ & \quad + W(z, y, k)]dz = \bar{P}_{\theta}(x, y, k)h'(y, k) \end{aligned} \quad (21)$$

を満足する。一方、(18)式と異なる一般的な初期条件、

$$P(x, y, 0) = \begin{bmatrix} P_{\theta}(x, y, 0) & P_{\theta u}(x, 0) \\ P_{\theta u}'(y, 0) & P_u(0) \end{bmatrix} \quad (22)$$

に対応する $u(k) \neq 0$ の場合の解は定理 1 から(10)式で与えられる。すなわち、 $R(x, k)$, $V(x, k)$ および $\bar{K}(x, z, k)$ を、

$$\begin{aligned} R(x, k) &= \begin{bmatrix} R_{\theta u}(x, k) \\ R_u(k) \end{bmatrix}, \quad V(x, k) = \begin{bmatrix} V_{\theta u}(x, k) \\ V_u(k) \end{bmatrix}, \\ \bar{K}(x, z, k) &= \begin{bmatrix} \bar{K}_{\theta}(x, z, k) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{注 } 2) \end{aligned}$$

と要素別に表わせれば、(17)式の $P(x, y, k)$ の各要素は、

$$\begin{aligned} P_{\theta}(x, y, k) &= \bar{P}_{\theta}(x, y, k) + R_{\theta u}(x, k)M(k)R_{\theta u}'(y, k) \\ P_{\theta u}(x, k) &= R_{\theta u}(x, k)M(k)R_u(k) \\ P_u(k) &= R_u(k)M(k)R_u(k) \end{aligned} \quad (23)$$

で与えられる。さらに(11), (15), (16)式から、

$$V_{\theta u}(x, k) = R_{\theta u}(x, k) - \int_{\Omega} \bar{K}_{\theta}(x, z, k)h(z, k)R_{\theta u}(z, k)dz \quad (24a)$$

$$V_u(k) = R_u(k) \quad (24b)$$

$$R_{\theta u}(x, k+1) = \mathcal{L}_x V_{\theta u}(x, k) + c(x)V_u(k) \quad (24c)$$

$$R_u(k+1) = V_u(k) \quad (24d)$$

で各要素が与えられる。初期条件(22)式も(23)式から

$$\begin{aligned} P_{\theta}(x, y, 0) - \bar{P}_{\theta}(x, y, 0) &= R_{\theta u}(x, 0)M(0)R_{\theta u}'(y, 0) = 0 \\ P_{\theta u}(x, 0) &= R_{\theta u}(x, 0)M(0)R_u(0) \\ P_u(0) &= R_u(0)M(0)R_u(0) \end{aligned} \quad (25)$$

を満していなければならない。

ここで、(3c)の仮定、すなわち $P_{\theta u}(x, 0) = 0$ を利用すると、(25)式から $R_u(0) = I$, $R_{\theta u}(x, 0) = 0$ とすることができ、(24b, d)式から $R_u(k) = I$ が得られる。

(注 2) (21)式の導出のときに第 2 要素がゼロとなることが明らかに。

以上の結果をまとめるとつぎの定理を得る。

《定理2》 $P(x, y, k)$ の各要素はつぎのように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} P_\theta(x, y, k) \\ = \bar{P}_\theta(x, y, k) + R_{\theta u}(x, k)M(k)R_{\theta u}'(y, k) \\ P_{\theta u}(x, k) = R_{\theta u}(x, k)M(k) \\ P_u(k) = M(k) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

ここで、 $R_{\theta u}(x, k)$ 、 $M(k)$ は、それぞれ、(24)、(12)、(15)式から

$$V_{\theta u}(x, k) = R_{\theta u}(x, k) - \int_Q \bar{K}_\theta(x, z, k)S(z, k)dz \quad (27a)$$

$$S(z, k) = h(z, k)R_{\theta u}(z, k) \quad (27b)$$

$$R_{\theta u}(x, k+1) = \mathcal{L}_x V_{\theta u}(x, k) + c(x) \quad (27c)$$

$$M(k+1) = M(k) - M(k) \int_Q J(z, k)S(z, k)dz M(k) \quad (28)$$

$$\int_Q J(z, k)[h(z, k)\bar{P}_\theta(z, y, k)h'(y, k) + W(z, y, k) + S(z, k)M(k)S'(y, k)]dz = S'(y, k) \quad (29)$$

を満たす。

この定理によって、共分散の各要素は、まず $u(k) = 0(\forall k)$ の場合の(20)式の解 $\bar{P}_\theta(x, y, k)$ を求めて、つぎに初期条件 $R_{\theta u}(x, 0) = 0$ 、 $M(0) = P_u(0)$ のもとで解いた、(27)、(28)式の解とを用いて(26)式の各式で与えられることが明らかにされた。

4. 推定アルゴリズムの構成

状態分布および排出量の各推定値 $\hat{\theta}(x, k|k-1)$ 、 $\hat{u}(k|k-1)$ は(7)式を各要素別に書き直すことにより、

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(x, k+1|k) \\ = \mathcal{L}_x \left[\hat{\theta}(x, k|k-1) + \int_Q K_\theta(x, z, k)\{\eta(z, k) \right. \\ \left. - h(z, k)\hat{\theta}(z, k|k-1)\}dz \right] + c(x)\hat{u}(k+1|k) \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \hat{u}(k+1|k) = \hat{u}(k|k-1) + \int_Q K_u(z, k)\{\eta(z, k) \\ - h(z, k)\hat{\theta}(z, k|k-1)\}dz \end{aligned} \quad (31)$$

で表わされる。ここで、 $K_\theta(x, z, k)$ 、 $K_u(z, k)$ は $K(x, z, k)$ の各要素である。(30)、(31)式は明らかのように、 $\hat{\theta}$ と $\hat{u}$ の連立方程式であるが、前節の結果を利用すると、 $\hat{\theta}$ と $\hat{u}$ の間にはつぎのような関係が成立する。

《定理3》 $\bar{\theta}(x, k|k)$ 、 $\bar{\theta}(x, k|k-1)$ を $u(k) = 0(\forall k)$ の場合の $\theta(x, k)$ の推定値とすれば、 $u(k) \neq 0$ のときの推定値 $\hat{\theta}(x, k|k)$ 、 $\hat{\theta}(x, k|k-1)$ はそれぞれ、

$$\hat{\theta}(x, k|k) = \bar{\theta}(x, k|k) + V_{\theta u}(x, k)\hat{u}(k|k) \quad (32a)$$

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(x, k|k-1) = \bar{\theta}(x, k|k-1) \\ + R_{\theta u}(x, k)\hat{u}(k|k-1) \end{aligned} \quad (32b)$$

で与えられる。ここで、右辺の $\bar{\theta}$ 、および $\hat{u}$ は、

$$\left. \begin{aligned} \bar{\theta}(x, k|k) = \bar{\theta}(x, k|k-1) \\ + \int_Q \bar{K}_\theta(x, z, k)\{\eta(z, k) \\ - h(z, k)\bar{\theta}(z, k|k-1)\}dz \\ \bar{\theta}(x, k|k-1) = \mathcal{L}_x \bar{\theta}(x, k-1|k-1) \\ \hat{u}(k|k) = \hat{u}(k|k-1) \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

$$\left. \begin{aligned} + \int_Q K_u(z, k)\{\eta(z, k) \\ - h(z, k)\bar{\theta}(z, k|k-1) \\ - S(z, k)\hat{u}(k|k-1)\}dz \\ \hat{u}(k|k-1) = \hat{u}(k-1|k-1) \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \int_Q K_u(z, k)[h(z, k)\bar{P}_\theta(z, y, k)h'(y, k) \\ + W(z, y, k) + S(z, k)M(k)S'(y, k)]dz \\ = M(k)S'(y, k) \end{aligned} \quad (35)$$

から求められる。あるいは、 $K_u(z, k) = M(k)J(z, k)$ から求めてもよい。(33)、(34)式の初期条件はそれぞれ、 $\bar{\theta}(x, 0)$ 、 $\hat{u}(0)$ とする。

この証明も文献13)を参照されたい。排出量 $u(k)$ が存在する場合の推定値 $\hat{\theta}(x, k|k)$ は、まず $u(k) = 0$ の場合の推定値 $\bar{\theta}(x, k|k)$ を(33)式で計算し、つぎに前節で求めた $R_{\theta u}(x, k)$ 、または $V_{\theta u}(x, k)$ を用いて(34)、(35)式から計算される $\hat{u}(k|k)$ を加えたものによって与えられる。これが定理3の意味である。このように、共分散を(26)式で、推定値を(32)式で計算することによる利点は、一つには(9)、(30)、(31)式は連立方程式で同時に解かなければならないのに対して、(26)、(32)式は共に分割してそれを一方向性で計算できる点、もう一つの利点は次節で明らかにする。

5. 排出源の探知

前節までは、(1)式に含まれる排出源の位置 $\{x_i^s\}$ すなわち $c(x)$ が既知であると仮定してきたが、本節では未知排出源を探知する方法を述べる。真の排出源 $\{x_i^s\}$ が未知なので、その推定値を $\{\hat{x}_i^s\}$ と定義し、 $\{\hat{x}_i^s\}$ に対応する(2)式の $c(x)$ を $\hat{c}(x)$ と定義する。 $\hat{c}(x)$ を $\hat{c}(x)$ でおきかえて得られる(27c)式の解を $\hat{R}_{\theta u}(x, k)$ とし、さらにそれに対応して(27b)式を $\hat{S}(z, k)$ で、(27a)式の解を $\hat{V}_{\theta u}(x, k)$ で、(28)式の解を $\hat{M}(k)$ で、(29)式の解を $\hat{J}(z, k)$ で、そして(35)式の解を $\hat{K}_u(z, k)$ でそれぞれ表わすことにする(ただし、 $\bar{P}_\theta$ と $\bar{K}_\theta$ は $\{x_i^s\}$ には無関係なので変わらない)。さらに、 $h(x, k)$ 、 $W(x, y, k)$ 、 $V(x, y, k)$ は

時不変とし、それぞれ $h(x)$, $W(x, y)$, $V(x, y)$ と書く。また、 $\mathcal{L}_x(\cdot)$ も時不変とする。

以上を用いて、(34)式から得られる $u(k)$ の実際の推定値を $\hat{u}_a(k|k-1)$ と定義すれば、 $\theta(x, k)$ の対応する推定値 $\hat{\theta}_a(x, k|k-1)$ は、(32)式から、

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_a(x, k|k-1) \\ = \bar{\theta}(x, k|k-1) + \hat{K}_{\theta u}(x, k) \hat{u}_a(k|k-1) \end{aligned} \quad (36)$$

で与えられる。しかしこの推定値は $\hat{c}(x)$ が真値 $c(x)$ と一般には一致しないので最適推定値とはいえない。

5.1 推定残差 (innovation term)

推定残差は、適応フィルタの構成に利用されているが^{14), 15)}、系のパラメータ同定にも積極的に利用できる。推定残差 $\zeta(x, k)$ を、

$$\zeta(x, k) = \eta(x, k) - h(x) \hat{\theta}_a(x, k|k-1) \quad (37)$$

と定義すると、この共分散はつぎのように与えられる。

$$\begin{aligned} E[\zeta(x, k) \zeta'(y, k)] \\ = h(x) A_\theta(x, y, k) h'(y) + W(x, y) \end{aligned} \quad (38)$$

ただし、 $A_\theta(x, y, k)$ は $\hat{\theta}_a(x, k|k-1)$ の推定誤差共分散

$$\begin{aligned} A_\theta(x, y, k) &= E[\{\theta(x, k) \\ &\quad - \hat{\theta}_a(x, k|k-1)\} \{\theta(y, k) \\ &\quad - \hat{\theta}_a(y, k|k-1)\}'] \end{aligned}$$

を表わす。 $A_\theta(x, y, k)$ は、それぞれの共分散を、

$$\begin{aligned} A_{\theta u}(x, k) &= E[\{\theta(x, k) - \hat{\theta}_a(x, k|k-1)\} \{u(k) \\ &\quad - \hat{u}_a(k|k-1)\}'] \\ A_u(k) &= E[\{u(k) - \hat{u}_a(k|k-1)\} \{u(k) \\ &\quad - \hat{u}_a(k|k-1)\}'] \\ B_{\theta u}(x, k) &= E[\{\theta(x, k) - \hat{\theta}_a(x, k|k-1)\} u'(k)] \\ B_u(k) &= E[\{u(k) - \hat{u}_a(k|k-1)\} u'(k)] \\ D_u(k) &= E[u(k) u'(k)] \end{aligned}$$

と定義し、さらに

$$\begin{aligned} G(z_1, z_2, k) &= h(z_1) A_\theta(z_1, z_2, k) h'(z_2) + W(z_1, z_2) \\ \Delta c(x) &= c(x) - \hat{c}(x) \end{aligned}$$

とおけば、

$$\begin{aligned} A_\theta(x, y, k+1) &= \mathcal{L}_x \left[A_\theta(x, y) \right. \\ &\quad - \int \hat{K}_\theta(x, z) h(z) A_\theta(z, y) dz \\ &\quad - \int A_\theta'(x, z) h'(z) \hat{K}_\theta'(y, z) dz \\ &\quad + \iint \hat{K}_\theta(x, z_1) G(z_1, z_2) \hat{K}_\theta'(y, z_2) dz_1 dz_2 \left. \right] \mathcal{L}_y' \\ &\quad + \mathcal{L}_x \left[A_{\theta u}(x) - \int \hat{K}_\theta(x, z) h(z) A_{\theta u}(z) dz \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\quad - \int A_\theta'(x, z) h'(z) \hat{K}_u'(z) dz \\ &\quad + \iint \hat{K}_\theta(x, z_1) G(z_1, z_2) \hat{K}_u'(z_2) dz_1 dz_2 \left. \right] \hat{c}'(y) \\ &\quad + \hat{c}(x) \left[A_{\theta u}'(y) - \int A_{\theta u}'(z) h'(z) \hat{K}_\theta'(y, z) dz \right. \\ &\quad - \int \hat{K}_u(z) h(z) A_\theta(z, y) dz \\ &\quad + \iint \hat{K}_u(z_1) G(z_1, z_2) \hat{K}_\theta'(y, z_2) dz_1 dz_2 \left. \right] \mathcal{L}_y' \\ &\quad + \hat{c}(x) \left[A_u - \int \hat{K}_u(z) h(z) A_{\theta u}(z) dz \right. \\ &\quad - \int A_{\theta u}'(z) h'(z) \hat{K}_u'(z) dz \\ &\quad + \iint \hat{K}_u(z_1) G(z_1, z_2) \hat{K}_u'(z_2) dz_1 dz_2 \left. \right] c'(y) \\ &\quad + \mathcal{L}_x \left[B_{\theta u}(x) - \int \hat{K}_\theta(x, z) h(z) B_{\theta u}(z) dz \right] \Delta c'(y) \\ &\quad + \Delta c(x) \left[B_{\theta u}'(y) \right. \\ &\quad - \int B_{\theta u}'(z) h'(z) \hat{K}_\theta'(y, z) dz \left. \right] \mathcal{L}_y' \\ &\quad + \hat{c}(x) \left[B_u - \int \hat{K}_u(z) h(z) B_{\theta u}(z) dz \right] \Delta c'(y) \\ &\quad + \Delta c(x) \left[B_u' - \int B_{\theta u}'(z) h'(z) \hat{K}_u'(z) dz \right] \hat{c}'(y) \\ &\quad + \Delta c(x) D_u \Delta c'(y) + V(x, y) \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} A_{\theta u}(x, k+1) &= \mathcal{L}_x \left[A_{\theta u}(x) \right. \\ &\quad - \int \hat{K}_\theta(x, z) h(z) A_{\theta u}(z) dz \\ &\quad - \int A_\theta'(x, z) h'(z) \hat{K}_u'(z) dz \\ &\quad + \iint \hat{K}_\theta(x, z_1) G(z_1, z_2) \hat{K}_u'(z_2) dz_1 dz_2 \left. \right] \\ &\quad + \hat{c}(x) \left[A_u - \int \hat{K}_u(z) h(z) A_{\theta u}(z) dz \right. \\ &\quad - \int A_{\theta u}'(z) h'(z) \hat{K}_u'(z) dz \\ &\quad + \iint \hat{K}_u(z_1) G(z_1, z_2) dz_1 dz_2 \left. \right] \\ &\quad + \Delta c(x) \left[B_u' - \int B_{\theta u}'(z) h'(z) \hat{K}_u'(z) dz \right] \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} A_u(k+1) &= A_u - \int \hat{K}_u(z) h(z) A_{\theta u}(z) dz \\ &\quad - \int A_{\theta u}'(z) h'(z) \hat{K}_u'(z) dz \end{aligned}$$

$$+\iint \hat{K}_u(z_1)G(z_1, z_2)\hat{K}_u'(z_2)dz_1dz_2 \quad (41)$$

$$\begin{aligned} B_{\theta u}(x, k+1) &= \mathcal{L}_z[B_{\theta u}(x) \\ &\quad - \int \hat{K}_{\theta}(x, z)h(z)B_{\theta u}(z)dz] \\ &\quad + \hat{c}(x)[B_u - \int \hat{K}_u(z)h(z)B_{\theta u}(z)dz] + \Delta c(x)D_u \end{aligned} \quad (42)$$

$$B_u(k+1) = B_u - \int \hat{K}_u(z)h(z)B_{\theta u}(z)dz \quad (43)$$

$$D_u(k+1) = D_u \quad (44)$$

で与えられる。ここで、(38)~(44)式の右辺の添字 k は簡潔化のためすべて省略されている。また、 $\hat{K}_{\theta}(x, z, k)$, $\hat{K}_u(z, k)$ は、(30), (31)式において $\hat{c}(x)$ に対応する $\hat{K}(x, z, k)$ の各要素である。初期条件(3)は正しく与えられ、

$$A_{\theta}(x, y, 0) = \bar{P}_{\theta}(x, y, 0), \quad A_{\theta u}(x, 0) = B_{\theta u}(x, 0) = 0 \quad (45)$$

$$A_u(0) = B_u(0) = P_u(0), \quad D_u(0) = D_u = \text{const}$$

が成立しているとする。

さて、(39)~(45)式において、もし $\hat{c}(x) = c(x)$ であれば、 $A_{\theta}(x, y, k)$ は(9)式を要素別に計算して得られる。つぎに、推定残差 $\zeta(x, k)$ の Euclid ノルムの期待値をとると、

$$\begin{aligned} F[\hat{c}(x)] &\equiv E\|\zeta(x, k)\|^2 \\ &= \text{tr}[h(x)A_{\theta}(x, x, k)h'(x) + W(x, x)] \end{aligned} \quad (46)$$

となる。ここで、任意の x, k について、(39)~(45)式の条件のもとで、(46)式の $F[\hat{c}(x)]$ を最小にする $\hat{c}(x)$ の条件を変分法で求めると、 $\hat{c}(x) = c(x)$ であることが証明される。以上の考察から、推定残差のノルムの期待値を最小にするように $\hat{c}(x)$ 、すなわち $\{\hat{x}_i^s\}$ を変更すれば、真の $\{x_i^s\}$ に対応する最小分散フィルタが得られることがわかる。最小化の手法としてたとえば、最大傾斜法を利用し、さらに(46)式の期待値は実時間では観測できないので過去 L 個の推定残差を平均化フィルタに通したものを利用すれば、つぎのアルゴリズムが考えられる。

r 次元座標空間内の i 番目の排出源の時刻 lL における推定値を $\hat{x}_{iq}^s(l)$ と定義すれば、つぎのようにして逐次修正される；

$$\begin{aligned} \hat{x}_{iq}^s(l+1) &= \hat{x}_{iq}^s(l) \\ &\quad - \frac{a_{iq}}{L} \sum_{n=lL}^{(l+1)L-1} \int_{\Omega} [\|\zeta^+(x, n)_{iq}\|^2 \\ &\quad - \|\zeta^-(x, n)_{iq}\|^2] dx \end{aligned}$$

Fig. 1 Block diagram of the overall estimation algorithm

$$i=1, \dots, N; q=1, \dots, r \quad (47)$$

ここで、 a_{iq} は正の係数、 L は平均化すべき過去のデータ数を表す。すなわち、各排出源の推定は L サンプル間隔で行なわれる。 $\zeta^+(x, n)_{iq}$ および $\zeta^-(x, n)_{iq}$ は、(27c)式の $\hat{c}(x)$ において、 $\hat{x}_i^s(l)$ の第 q 要素だけをそれぞれ $\hat{x}_{iq}^s(l) + d_{iq}$, $\hat{x}_{iq}^s(l) - d_{iq}$ ($d_{iq} > 0$) へ摂動させたときの(27c)式の $\hat{R}_{\theta u}^+(x, k)_{iq}$, $\hat{R}_{\theta u}^-(x, k)_{iq}$ を用いて得られる(36)式の $\hat{\theta}_a^+(x, k|k-1)_{iq}$, $\hat{\theta}_a^-(x, k|k-1)_{iq}$ を用いた(37)式の推定残差を表す。Fig. 1 に推定法全体のブロック線図を示した。

さて、(47)式において $\hat{x}_i^s$ に関する勾配を求めるには、図中のブロック(B)のモデルが $2Nr$ 個必要であり、一方、ブロック(A)は排出量や排出源の推定にはまったく無関係なので1個だけ用意しておけばよく、したがって著しくメモリが節約される。これは前節で述べたように、排出量の推定に関係する部分としない部分に分割したアルゴリズムの大きな利点といえよう。

(47)式の推定値の収束性を厳密に議論することは難しい。しかし、ここでは、系の特性、外乱などの統計的性質、真値 $\{x_i^s\}$ が時間的にほとんど変動しないという仮定をしているので、 L を比較的大きくすれば(47)式右辺第2項は推定残差のノルムの期待値として代用できるであろう。一方、 L を大きくすると同定時間が長くなるので、これらのかねあいから L を決定しなければならない。また、このアルゴリズムの安定性は、係数 a_{iq} に依存するが、 a_{iq} の上限は $A_{\theta}(x, y, k)$ を計算することによりある程度の見当をつけることが可能である。

5.2 適用例 (1次元拡散プロセス)

$$\theta(x, k+1) = \mathcal{L}_x \theta(x, k) + \sum_{i=1}^N c_i(x, x_i^s) u_i + v(x, k), \quad x \in (0, 1) \quad (48)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}_x(\cdot) &= 2 \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j^2 \pi^2 d} \sin j \pi x \int_0^1 \sin j \pi \xi(\cdot) d\xi \\ c_i(x, x_i^s) &= 2 \sum_{j=1}^{\infty} (1 - e^{-j^2 \pi^2 d})(j \pi)^{-2} \sin j \pi x \sin j \pi x_i^s \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

で与えられる 1 次元の分布定数系に前述の探知方法を適用してみよう。これは N 個の排出源 $\{x_i^s\}$ から一定未知量 $\{u_i\}$ が排出され、領域 $\Omega=(0, 1)$ へ拡散していく系を表わす(注 3)。状態は測定方法の簡単化のために空間内の N_m 個の点 $\{x_\nu^m\}$ で得られる観測値 $\eta(x_\nu^m, k) = \theta(x_\nu^m, k) + w(x_\nu^m, k)$, $\nu=1, \dots, N_m$ (50)

から推定されるとする。前節のアルゴリズムにおいてすべての $\int$ を Σ で置きかえればよい(注 4)。(47)式から、

$$\begin{aligned} \hat{x}_i^s(l+1) &= \hat{x}_i^s(l) - \frac{a_i}{L} \sum_{n=lL}^{(l+1)L-1} \sum_{\nu=1}^{N_m} [|\zeta^+(x_\nu^m, n)_i|^2 \\ &\quad - \zeta^-(x_\nu^m, n)_i|^2] \quad i=1, \dots, N \quad (51) \\ \zeta(x_\nu^m, n) &= \eta(x_\nu^m, n) - \hat{\theta}_a(x_\nu^m, n|n-1), \\ \nu &= 1, \dots, N_m \end{aligned}$$

によって $\{x_i^s\}$ の推定が行なわれる。前述のように、 $\zeta^+(x_\nu^m, n)_i$, $\zeta^-(x_\nu^m, n)_i$ は $\hat{x}_i^s$ だけをそれぞれ $\hat{x}_i^s + d_i$, $\hat{x}_i^s - d_i$ としたときの対応する推定残差を表わす。Fig. 2 には、排出源の個数が $N=2$ 、すなわち $x_1^s=0.35$, $u_1=10$ および $x_2^s=0.7$, $u_2=7.0$ とし、観測点を等間隔に 9 点選んだときの例を示した。推定の初期値はそれぞれ $\hat{u}_1(0)=\hat{u}_2(0)=5$, $\hat{x}_1^s(0)=0.6$, $\hat{x}_2^s(0)=0.9$ としている。またこの系には等間隔に 19 点に分散 2.0 の独立な外乱が付加されている。排出源の推定値の方が排出量の推定値よりも早く真値に近づくことが図示されている。

(51)式の推定値の収束の様子などの検討は、推定残差のノルムの期待値、すなわち $A_\theta(x, x, k)$ と $\{\hat{x}_i^s\}$ との関係を考察することによってある程度可能である。

Fig. 2 Estimates of the emission rate u and the emission sources $\{x_i^s\}$ for $N=2$ ($a_1=0.01$, $a_2=0.02$, $d=0.02$, $d=0.01$, $L=10$)

厳密には(39)~(45)式を解かなければならないが、もしこの適用例において観測点がわずか 1 点 ($x_\nu^m=x_m$) とすれば、(39)式の $A_\theta(x, y, k)$ の解の形は観測がない場合の解の形に近いと考えられる。そこで、(39)~(44)式右辺の積分項をすべて省略し、さらに $k \rightarrow \infty$ の定常解を求めると、

$$\begin{aligned} \bar{A}_\theta(x, y) &= \mathcal{L}_x \bar{A}_\theta(x, y) \mathcal{L}_y' + \mathcal{L}_x \bar{A}_{\theta u}(x) \hat{c}(y) \\ &\quad + \hat{c}(x) \bar{A}_{\theta u}'(y) \mathcal{L}_y' + \mathcal{L}_x \bar{B}_{\theta u}(x) \{c'(y) - \hat{c}'(y)\} \\ &\quad \{c(x) - \hat{c}(x)\} \bar{B}_{\theta u}(y) \mathcal{L}_y' + \hat{c}(x) \bar{A}_u \hat{c}'(y) \\ &\quad + \hat{c}(x) \bar{B}_u \{c'(y) - \hat{c}'(y)\} + \{c(x) - \hat{c}(x)\} \\ &\quad \times \bar{B}_u \hat{c}'(y) + \{c(x) - \hat{c}(x)\} \bar{D}_u \{c'(y) - \hat{c}'(y)\} \\ &\quad + V(x, y) \quad (52) \end{aligned}$$

$$\bar{A}_{\theta u}(x) = \mathcal{L}_x \bar{A}_{\theta u}(x) + \hat{c}(x) \bar{A}_u + (c(x) - \hat{c}(x)) \bar{B}_u \quad (53)$$

$$\bar{A}_u = \bar{B}_u = \text{const} \equiv \Phi_u \quad (54)$$

$$\bar{B}_{\theta u}(x) = \mathcal{L}_x \bar{B}_{\theta u}(x) + \hat{c}(x) \bar{B}_u + (c(x) - \hat{c}(x)) \bar{D}_u \quad (55)$$

$$\bar{D}_u = \text{const} \equiv \Pi_u \quad (56)$$

が得られる。

(49)式を利用して上の連立方程式を解くと、もし $x_m < x_1^s < \dots < x_N^s$ であれば、

$$\begin{aligned} \bar{A}_\theta(x_m, x_m) &= \\ x_m^2 \sum_{i=1}^N [\Phi_{u_i} \{2(1 - \hat{x}_i^s)(1 - x_i^s) \\ &\quad - (1 - \hat{x}_i^s)^2\} + \Pi_{u_i} (\hat{x}_i^s - x_i^s)^2] \quad (57) \end{aligned}$$

(注 3) $\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \sum_{i=1}^N u_i \delta(x - x_i^s)$, $\theta(0, t) = \theta(1, t) = 0$ を 2 で述べたように離散時間系に変換し、それに外乱 $v(x, k)$ を加えた系である。

(注 4) $\phi(x, k|k) \sum_{n=0}^k \sum_{\nu=1}^{N_m} K_\nu(x; k, n) \eta(x_\nu^m, n)$ の形をとる最小分散推定値を求めると、(7)~(9)式において Σ で $\int$ を置きかえた最適フィルタが得られる¹²⁾。

となり(注 5), $\hat{x}_i^s$ に関して N 次元の超放物面になることが知れる。微分により, (57) 式の最小値は $\hat{x}_i^s = x_i^s (i=1, \dots, N)$ のときだけであることがわかる。 $x_i^s < x_m < x_N^s$ の場合もまったく同様にして $\hat{x}_i^s = x_i^s$ のとき最小値をもつ放物面となる。この $A_\theta(x_m, x_m)$ の形から, a_i 係数の安定限界の目安や推定値の修正感度(たとえば, A_θ の $\hat{x}_i^s$ に対する勾配は (57) 式から $2(\Pi_u - 1)$ となり, 排出量 u_i 大であればあるほど修正感度が向上する)に関する検討も可能となる。

6. む す び

本論文では, 大気拡散系などを例とする分布定数系において観測値データからの推定残差を利用してその状態や排出量の推定だけでなく, その未知排出源の位置をもオンラインで探知する方法について考察した。この場合, 排出量の推定値の計算に関係する部分としない部分に分離することにより, 排出源の個数が増大しても計算機のメモリを節減している。本方法を 1 次元拡散プロセスに適用したシミュレーションとその解析的検討からほぼ満足な結果が得られた。本論文では, 排出量は一定で, 排出源は点状と仮定したが, 一般的には関数の形で与えられるある領域で時間的にも変化すると考えられる場合も多く, このような系への拡散は今後の課題となろう。

(注 5) (52), (53), (55) 式を固有関数 $\psi_n(x) = \sqrt{2} \sin n\pi x$ で展開し(固有値 $\lambda_n = (n\pi)^2$ (49) 式)を利用して計算すると,

$$\begin{aligned} A_\theta(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{A}_{nj} \psi_n(x) \psi_j(y) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n \lambda_j} \left[\sum_{i=1}^N \Phi_{ui} \{ \psi_n(\hat{x}_i^s) \psi_j(x_i^s) \right. \\ &\quad + \psi_n(x_i^s) \psi_j(\hat{x}_i^s) - \psi_n(\hat{x}_i^s) \psi_j(\hat{x}_i^s) \} \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \Pi_{ui} \{ \psi_n(x_i^s) - \psi_n(\hat{x}_i^s) \} \{ \psi_j(x_i^s) \\ &\quad \left. - \psi_j(\hat{x}_i^s) \} \right] \psi_n(x) \psi_j(y) \end{aligned}$$

ここで, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \psi_n(a) \psi_n(b) = \begin{cases} (1-a)b: 1 > a > b > 0 \\ (1-b)a: 1 > b > a > 0 \end{cases}$ を利用すると(57)式が得られる。

参 考 文 献

- 1) S.G. Tzafestas and J.M. Nightingale: Optimal Filtering, Smoothing and Prediction in Linear Distributed-Parameter Systems, Proc. IEE, **115**-8, 1207/1212 (1968)
- 2) P.L. Falb: Infinite Dimensional Filtering, Information and Control, **11**-1, 102/137 (1967)
- 3) F.E. Thau: On Optimal Filtering for a Class of Linear Distributed-Parameter Systems, Trans. ASME, **91**D-2, 173/178 (1969)
- 4) H.J. Kushner: Filtering for Linear Distributed Parameter Systems, SIAM, J. Control, **8**-3, 346/359 (1970)
- 5) Y. Sakawa: Optimal Filtering in Linear Distributed-Parameter Systems, Int. J. Control, **16**-1, 115/127 (1972)
- 6) J. Matsumoto and K. Ito: Feedback Control of Distributed-Parameter Systems with Spatially Concentrated Controls, Int. J. Control, **12**-3, 401/419 (1970)
- 7) G.R.V. Kumar and A.R. Sage: The Innovation Approach to Space-Time Filtering and Smoothing Information Science, **4**-3, 193/215 (1972)
- 8) B. Friedland: Treatment of Bias in Recursive Filtering, IEEE Trans. on AC, **AC-14**-4, 356/367 (1969)
- 9) P.G. Kaminski, A.E. Bryson and S.F. Schmidt: Discrete Square Root Filtering, IEEE, Trans. on AC, **AC-16**-6, 727/735 (1971)
- 10) 砂原: 環境システムにおける汚染源探知の一方法, 昭和 48 年度文部省科研費特定研究「環境汚染制御」報告書, 159/166 (1974)
- 11) R.L. Kashyap: Maximum Likelihood Identification of Stochastic Linear Systems, IEEE, Trans. on AC, **AC-15**-1, 25/34 (1970)
- 12) 佐野: 分布定数系における測定最適化のための適応的方法, 計測自動制御学会論文集, **11**-2, 221/228 (1975)
- 13) A. Sano: Optimal Estimation Algorithm for a Distributed-Parameter System with Multi-Pointwise Sources, Keio Engineering Reports, **28**-5, 41/55 (1975)
- 14) T. Kailath: An Innovation Approach to Least-Square Estimation, IEEE Trans. on AC, **AC-13**-6, 646/655 (1968)
- 15) A.H. Tazwinski: Adaptive Filtering, Automatica, **5**-4, 475/485 (1969)
- 16) R.K. Mehra: On-line Identification of Linear Dynamics Systems with Application to Kalman Filtering, IEEE Trans. on AC, **AC-16**-1, 12/21 (1971)