格子群上の線形系の無干渉制御†

河野 通夫*・杉浦 一郎*

Noninteracting Control of Linear Systems Over Lattice Groups

Michio KONO* and Ichiro SUGIURA*

A non-interacting control of an r -input m -output linear discrete time system over the lattice group via state variable feedback is considered. In a linear discrete time system over the lattice group, components of the input vector, the output vector and the state vector take only integral values.

This paper defines the sequential reproducibility which corresponds to the functional reproducibility in a linear system over the vector space, and gives a necessary and sufficient condition for the sequential reproducibility in a single-variable linear discrete time system over the lattice group.

This paper defines the non-interacting control system which is sequentially reproducible. A sufficient condition for non-interaction is derived. In particular, when $r=m$, a necessary and sufficient condition for non-interaction is obtained.

General decoupling control laws are given in order to improve responses. An example is given illustrating the result.

1. ま え が き

状態フィードバックによる、線形連続時間系の無干渉制御に関する多くの研究がなされ、系の入力の数と出力の数が等しい場合には、無干渉制御可能であるための必要十分条件が得られ^{1),2)}、入力の数と出力の数が等しいとは限らない場合には、十分条件が得られている^{3)~6)}。一方、線形離散時間系の無干渉制御についても、入力の数と出力の数が等しい場合には、無干渉制御可能であるための必要十分条件が得られている⁷⁾。しかしながら、これらの研究はすべてベクトル空間上で定義された系の無干渉制御に関するものであり、格子群上で定義された系の無干渉制御に関する研究はま

だなされていない。

本稿は格子群上の線形離散時間系の無干渉制御問題を論じる。

格子群上の線形離散時間系とは入力、出力、状態の各成分が整数値しかとらない系であって、例としては個体数のみを問題にする系等が考えられる。実数の集合は体になるが、整数の集合は体にならず、環にしかならないために、格子群はベクトル空間にならず、module にしかならない。つまり、従来の線形系が実数体上のベクトル空間上で定義されているのに対し、ここで考えている線形系は整数環上の格子群上で定義されている。したがってその性質はベクトル空間上の線形系とかなり異なり、ベクトル空間上の線形系で成立している事柄が格子群上の線形系でも成立するとは限らない^{8),12)}。

本稿では、第2章で線形連続時間系の functional reproducibility¹⁰⁾に対応する概念である sequential reproducibility および無干渉制御系の定義を与える。第3章で格子群上の一変数線形系が sequentially reproducible であるための必要十分条件を与え、pointwise reproducibility の条件と異なることを示している。第4章では、系の入力の数と出力の数が等しいとは限らない場合に無干渉制御可能であるための十分条件を与え、入力の数と出力の数が等しい場合には必要十分条件を与えている。第5章では、より一般的な無干渉制御則を与える。

2. 定義と数学的準備

格子群上の線形離散時間系

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (2.1a)$$

$$y(k) = Cx(k) \quad (2.1b)$$

を考える。ここで $x(k)$ は n 次元状態ベクトル、 $u(k)$ は r 次元入力ベクトル、 $y(k)$ は m 次元出力ベクトルで、その各成分は整数値しかとらないとする。また、 A, B, C は適当な大きさの行列で、その各要素は整数値しかとらないとする。

† 第14回計測自動制御学会学術講演会で発表(昭50・8)

* 名古屋大学工学部 名古屋市中千種区不老町

* Faculty of Engineering, Nagoya University, Nagoya

(Received March 3, 1975)

【定義 1】 C の第 i 行を c_i としたとき, $c_i A^j B \neq 0$ となる最小の j を相対次数とよび, d_i で表わす. ただし $j=0, \dots, n-1$ に対して $c_i A^j B=0$ ならば, $d_i=n-1$ とする. 系(2.1)に制御則

$$u(k)=F x(k)+G v(k) \quad (2.2)$$

を適用すれば, 構成系は

$$x(k+1)=(A+BF)x(k)+BGv(k) \quad (2.3a)$$

$$y(k)=Cx(k) \quad (2.3b)$$

となる. ここで $v(k)$ は m 次元入力ベクトルで, その各成分は整数値しかとらないとする. また, F, G は適当な大きさの行列で, その各要素は整数値しかとらないとする. さらに G はフルランクと仮定しておく.

連続時間系において, 任意の出力関数を発生する入力関数を選ぶことを functional reproducibility と呼ぶが, 離散時間系においても同様な概念を定義することができる¹³⁾. ここでは, 格子群上の線形離散時間系に対して, functional reproducibility に対応する概念を定義する.

【定義 2】 初期値 $x(0)=0$ からの系の挙動を考えて, s 時刻以降任意に与えられた出力 y の列(有限列)を発生する入力 v の列が存在するとき, y は v によって, s -delay sequentially reproducible であるという.

つぎに, sequential reproducibility より弱い概念である pointwise reproducibility を定義する.

【定義 2'】 初期値 $x(0)=0$ からの系の挙動を考えて, 任意に与えられた出力 y を発生する入力 v の列が存在するとき, y は v によって, pointwise reproducible であるという.

(注意) 明らかに, pointwise reproducibility の定義と出力完全可到達性の定義は一致する(出力可到達性の定義は状態可到達性の定義¹²⁾に準ずる).

【定義 3】 y_i は v_i ($j \neq i$) の影響を受けず, v_i によって, $(\bar{d}_i+1)$ -delay sequentially reproducible であるとき, 構成系(2.3)は無干渉制御系であるという. ただし y_i, v_i はそれぞれ y, v の第 i 成分を表わし, $\bar{d}_i$ は構成系の相対次数を表わす.

(注意) sequential reproducibility を functional reproducibility にいい換えれば, 定義 3 は従来の無干渉制御系の定義^{1), 2), 6)}に一致する.

つぎに, 構成系(2.3)の応答を調べよう. 初期値を $x(0)$ として順次代入すれば,

$$y_i(1)=c_i(A+BF)x(0)+c_iBGv(0)$$

$$y_i(2)=c_i(A+BF)^2x(0)+c_i(A+BF)BGv(0) \\ +c_iBGv(1)$$

⋮

$$y_i(k)=c_i(A+BF)^kx(0)$$

$$+c_i(A+BF)^{k-1}BGv(0)+\dots$$

$$+c_iBGv(k-1) \quad (2.4)$$

となる.

つぎに, 以下の展開に必要な補題を準備する.

【補題 1】 整数環上の正方行列を T としよう. T の逆行列 T^{-1} が整数環上に存在するための必要十分条件は, $|\det T|=1$ となることである.(証明略)

【補題 2】 代数方程式

$$Tw=h \quad (2.5)$$

を考える. ただし T は整数を要素とする $n \times n$ の行列で, h は整数を成分とする n 次元ベクトルである. 任意の h に対して方程式(2.5)に整数解が存在するための必要十分条件は

$$|\det T|=1$$

である.

(証明) 十分性は補題 1 から明らか. 必要性を証明する. 任意の h に対して整数解が存在するのであるか

ら, 特に $h=h_i=[0 \dots 0 \overset{i}{1} 0 \dots 0]'$ と選ぶ. h は転置を表わす. h_i に対応する解を x_i とすれば,

$$Tx_i=h_i, \quad i=1, \dots, n$$

となり, $X=[x_1, x_2, \dots, x_n]$ とすれば,

$$TX=I_n \quad (I_n \text{ は単位行列を表わす})$$

とかけて, 両辺の行列式をとれば

$$\det T \det X=1$$

したがって, $|\det T|=1$ となる. (Q.E.D.)

3. 一変数の sequential reproducibility について

ベクトル空間上の一変数形系の場合, pointwise reproducibility の条件と functional reproducibility の条件は一致する¹⁰⁾が, 格子群上の線形系では, pointwise reproducibility の条件と sequential reproducibility の条件は, 一変数系であっても一致しない. この節では, 格子群上の一変数線形系が $(d+1)$ -delay sequentially reproducible であるための必要十分条件を求める.

《定理 1》 格子群上の一変数線形系

$$x(k+1)=Ax(k)+bu(k) \quad (3.1a)$$

$$y(k)=cx(k) \quad (3.1b)$$

を考える. ここで $u(k)$ および $y(k)$ はスカラー入力およびスカラー出力で, 整数値しかとらないとする. 系(3.1)の出力 y が u によって $(d+1)$ -delay sequentially reproducible であるための必要十分条件は

$$|cA^db|=1 \quad (3.2)$$

である. ここで d は相対次数である.

(証明) 初期値 $x(0)=0$ からの系の応答を考えれば, d の定義から,

$$y(1)=cbu(0)=0$$

$$y(2)=cAbu(0)+cbu(1)=0$$

⋮

$$y(d+1)=cA^d bu(0)$$

⋮

$$y(l)=cA^{l-1}bu(0)+cA^{l-2}bu(1) \\ + \cdots + cA^d bu(l-d-1)$$

⋮

$$y(l+d)=cA^{l-d-1}bu(0)+\cdots+cA^d bu(l-1)$$

となる。ただし l は任意の正整数とする。上式は省略して

$$Y_{[1,d]}=0$$

$$Y_{[d+1,l+d]}=T_l \cdot U_{[0,l-1]} \quad (3.3)$$

とかける。ただし, $d=0$ のときは, $Y_{[1,d]}$ は存在しないとし,

$$Y_{[1,d]}=[y(1), \dots, y(d)]'$$

$$Y_{[d+1,l+d]}=[y(d+1), \dots, y(l+d)]'$$

$$U_{[0,l-1]}=[u(0), \dots, u(l-1)]'$$

$$T_l = \begin{bmatrix} cA^d b & 0 & \cdots & 0 \\ cA^{d+1} b & cA^d b & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ cA^{l+d-1} b & cA^{l+d-2} b & \cdots & cA^d b \end{bmatrix}$$

である。任意の $Y_{[d+1,l+d]}$ に対して適当な $U_{[0,l-1]}$ が存在すれば, y は u によって $(d+1)$ -delay sequentially reproducible である。任意の $Y_{[d+1,l+d]}$ に対して方程式 (3.3) に整数解が存在するための必要十分条件は, 補題 2 から, $|\det T_l|=1$ である。ところが, T_l は三角行列であるから, $\det T_l=(cA^d b)^l$ となり, $|cA^d b|=1$

を得る。 (Q. E. D.)

(注意) 格子群上の一変数線形系が pointwise reproducible であるための必要十分条件は

$$g.c.d.[cb, \dots, cA^{n-1}b]=1$$

である。ここで $g.c.d.[\]$ は最大公約数を表わす。

4. 主な結果

r が m と等しいとは限らない場合の十分条件として定理 2 を与える。

《定理 2》 無干渉制御系を構成する F, G が存在するための十分条件は, 整数環上の行列 $B^* \dagger$ が存在して

$$B^* B^* \dagger = I_m \quad (4.1)$$

となることである。ただし

$$B^* \dagger = [(c_1 B^{d_1} b)' : \cdots : (c_m A^{d_m} b)']$$

である。

(証明) 制御則を

$$F = -B^* \dagger A^*, \quad G = B^* \dagger \quad (4.2)$$

とする。ただし

$$A^* \dagger = [(c_1 A^{d_1+1} b)' : \cdots : (c_m A^{d_m+1} b)']$$

である。 $k < d_i$ のときには, d_i の定義から,

$$c_i(A+BF)^* BG = 0$$

$k = d_i$ のときには,

$$c_i(A+BF)^{d_i} BG = c_i A^{d_i} BG = [0 \cdots 0 1 \cdots 0]$$

であるから, y_i は v_i によって (d_i+1) -delay sequentially reproducible である。一方,

$$c_i(A+BF)^{d_i+1} = c_i A^{d_i+1} + c_i A^{d_i} BF = 0$$

であるから, 任意の正整数 k に対して

$$c_i(A+BF)^{d_i+k} BG = 0$$

となる。したがって, (2.4) 式から無干渉制御系になっている。 (Q. E. D.)

(注意) 条件 (4.1) は B^* が全射であることと等価であり, B^* の列ベクトルが張る格子群の基本格子の体積が 1 であるという表現にいい換えられる⁸⁾。基本格子の体積の計算方法は佐野・池田⁸⁾によって与えられている。

$r=m$ のときの必要十分条件として定理 3 を与える。

《定理 3》 $r=m$ のとき, 無干渉制御系を構成する F, G が存在するための必要十分条件は

$$|\det B^*| = 1 \quad (4.3)$$

である。

(証明) (十分性) 条件 (4.3) から, B^* の逆行列が存在し, 定理 2 から明らか。

(必要性) 無干渉制御系が構成されているとすれば y_i は v_i によって $(\tilde{d}_i+1)$ -delay sequentially reproducible である。ここで, $\tilde{d}_i$ は構成系の相対次数を表わす。一方, y_i は v_i ($j \neq i$) の影響を受けない。また, G は正則であるから相対次数は G によって変化せず, $\tilde{d}_i = d_i$ となる。したがって,

$$c_i(A+BF)^{\tilde{d}_i} BG = c_i A^{d_i} BG \\ = [0, \dots, 0, \pm 1, 0, \dots, 0]$$

それゆえ,

$$B^* G = \text{diag} [\pm 1, \dots, \pm 1]$$

となり, 両辺の行列式をとれば,

$$\det B^* G = \det B^* \det G = \pm 1$$

したがって, $|\det B^*| = 1$ である。 (Q. E. D.)

5. 無干渉制御系の構成

定理 2 の証明において具体的な制御則 (4.2) を与えたが, 実際に無干渉制御系を構成するさいには, 応答

特性を考えた無干渉制御則を使う必要がある。そのため一般的な制御則を構成する。以下の展開では定理2の条件(4.1)は満たされていると仮定する。

I_m の第 i 列を除いた行列を Σ_i とし、

$$Q_i = [BB^* \Sigma_i : (A - BB^* A) BB^* \Sigma_i : \dots \dots : (A - BB^* A)^{l-1} BB^* \Sigma_i]$$

$$\rho_i = n - \text{rank } Q_i$$

と定義する。方程式

$$M_i Q_i = 0 \quad (0 \text{ は零行列を表わす}) \quad (5.1)$$

を考える。ただし (M_i) は $\rho_i \times n$ のフルランクの未知行列である。 Q_i の各要素は整数であるから、方程式(5.1)には整数解 $\bar{M}_i$ が存在する。また Cayley-Hamilton の定理によって、

$$\bar{M}_i (A - BB^* A) Q_i = 0 \quad (5.2)$$

が成立する。

《定理4》 条件(4.1)が満たされていると仮定する。制御則

$$F = \bar{F} = B^* (-A^* + L \bar{M}) \quad (5.3a)$$

$$G = B^* \quad (5.3b)$$

は無干渉制御系を構成する。ただし、 $\bar{M}' = [\bar{M}_1' : \dots : \bar{M}_m']$, $L = \text{diag} [l_1, \dots, l_m]$ であり、 $l_i (i=1, \dots, m)$ は整数を成分とする任意の ρ_i 次行ベクトルである。

(証明) まず、

$$\bar{M} (A + B \bar{F})^k B B^* = \text{diag} [f_1^k, \dots, f_m^k] \quad (5.4)$$

となることを示す。ここで f_i^k はある ρ_i 次列ベクトルである。 $k=0$ に対して(5.4)式が成立していることは明らかである。つぎに、 $k=l-1$ に対して(5.4)式が成立しているとすれば、(5.2)式から

$$\begin{aligned} \bar{M}_i (A + B \bar{F})^{l-1} B B^* &= \bar{M}_i (A - BB^* A^*) (A + B \bar{F})^{l-1} B B^* \\ &\quad - \bar{M}_i B B^* L M (A + B \bar{F})^{l-1} B B^* \\ &= [0, \dots, 0, f_i^{l-1}, 0, \dots, 0] \end{aligned}$$

となる。ここで f_i^{l-1} はある ρ_i 次列ベクトルである。したがって、すべての k に対して(5.4)式が成立することがわかった。(5.4)式から

$$\begin{aligned} c_i (A + B \bar{F})^{d_i+k} B B^* &= c_i A^{d_i} (A + B \bar{F})^k B B^* \\ &= c_i A^{d_i+1} (A + B \bar{F})^{k-1} B B^* \\ &\quad + c_i A^{d_i} B \bar{F} (A + B \bar{F})^{k-1} B B^* \\ &= [0, \dots, 0, l_i, 0, \dots, 0] \bar{M}_i (A + B \bar{F})^{k-1} B B^* \\ &= [0, \dots, 0, l_i f_i^{k-1}, 0, \dots, 0] \end{aligned}$$

となるから、定理2の証明と同様にして、制御則(5.3)が無干渉制御系を構成することがわかる。

(Q. E. D.)

(注意) 定理4で与えた無干渉制御則の構成は、Gilbert²⁾, Silverman³⁾ の構成法に似ているが、部分空間の概念を用いることができない点に注意する必要がある。

【例題】

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

このとき、

$$B^* = \begin{bmatrix} c_1 B \\ c_2 A B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

であるから、 $\det B^* = -1$ となり、定理3から、無干渉制御系を構成することは可能である。制御則は

$$F = \begin{bmatrix} 2l_1 - 2 & l_{22} - 7 & l_{22} - 9 \\ -l_1 + 1 & -l_{21} + 6 & -l_{22} + 9 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

によって与えられ、構成系は

$$x_1(k+1) = l_1 x_1(k) + v_1(k)$$

$$y_1(k) = x_1(k)$$

$$\begin{bmatrix} x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{21} - 3 & l_{22} - 9 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} v_2(k)$$

$$y_2(k) = x_3(k)$$

となる。

6. あとがき

格子群上の線形系においては、一変数系であっても、pointwise reproducibility の条件と sequential reproducibility の条件が一致しないことを示し、 y_i が v_i によって $(\bar{d}_i + 1)$ -delay sequentially reproducible であるような無干渉制御系を定義した。sequential reproducibility は pointwise reproducibility より強い条件であるが、サーボ問題などを考えるときにはむしろ自然な条件である。 $r=m$ の場合には、無干渉制御可能のための必要十分条件を得たが、 $r \neq m$ の場合には、十分条件しか得られなかった。ベクトル空間上の線形系の場合と同様、 $r \neq m$ の場合の必要十分条件を得ることは今後に残された問題である。

終りに、有益な議論をしていただいた名古屋大学細江講師に深謝する。

参考文献

- 1) P.L. Falb and W.A. Wolovich: Decoupling in the Design and Synthesis of Multivariable Control

- Systems, IEEE Trans., **AC-12-6**, 651/659 (1967)
- 2) E.G. Gilbert: The Decoupling of Multivariable Systems by State Feedback, J. of SIAM Control, **7-1**, 50/63 (1969)
- 3) L.M. Silverman and H.J. Payne: Input-Output Structure of Linear Systems with Application to the Decoupling Problem, J. of SIAM Control, **9-2**, 199/233 (1971)
- 4) A.S. Morse and W.M. Wonham: Status of Non-interacting Control, IEEE Trans., **AC-16-6**, 568/581 (1971)
- 5) 須田信英: 分離制御系の一構成法, 日本自動制御協会第17期通常総会学術講演会予稿集, 1/2 (1973)
- 6) 河野, 杉浦: 無干渉制御の一般化, 計測自動制御学会論文集, **10-5**, 589/593 (1974)
- 7) V. Sankaran and M.D. Srinath: Decoupling of Linear Discrete Time Systems by State Variable Feedback, J. of Mathematical Analysis and Applications, **39**, 338/345 (1972)
- 8) 佐野, 池田: 離散値システムについて一格子群上の準同形システムー, 日本自動制御協会第3回ダイナミカル・システム・シンポジウム資料, 5/6 (1973)
- 9) Y. Rouchaleau and B.F. Wyman: Linear Dynamical Systems Over Integral Domains, J. of Computer and System Sciences, **9**, 129/142 (1974)
- 10) R.W. Brockett and M.D. Mesarović: The Reproducibility of Multivariable Systems, J. of Mathematical Analysis and Applications, **11**, 548/563 (1965)
- 11) J.L. Massey and M.K. Sain: Inverses of Linear Sequential Circuits, IEEE Trans., **C-17**, 330/337 (1968)
- 12) 宮道, 深尾: 単項イデアル環上のシステムの構造と実現, 計測自動制御学会論文集, **10-5**, 631/636 (1974)
- 13) 須田: 線形系の入出力構造についての考察, 制御理論シンポジウム資料, 1/6 (1974)