線形分散システムにおける外乱の局所化と出力分割

浜野文男*・古田勝久*

Localization of Disturbances and Output Decomposition in Decentralized Linear Systems

Fumio HAMANO* and Katsuhisa FURUTA*

The purpose of this paper is to investigate the structural properties of the decentralized time-invariant linear multivariable systems in connection with the problems of disturbance localization and output decomposition. In the first place, the necessary and sufficient conditions, under which the disturbance localization is possible by applying local state feedback laws, are given. The conditions are also stated for ordinary (centralized) systems with imperfect state measurement and for those with output measurement. Finally, the problems of output decomposition in decentralized linear multivariable systems are proposed, and the necessary and sufficient conditions for the solvability of the problem are derived.

1. 序 論

本論文では、線形定常な多次元分散システム¹⁾における外乱の(指定された状態部分空間内への)局所化、および出力分割という問題を、幾何学的方法で議論する。

分散システムにおける外乱局所化とは、システムに入る外乱の影響が、状態空間内の特定の部分空間のみに限定されるように、適当な局所的制御法則を決めることをいう。この種の問題は、分散していないシステムに対しては、Wonham と Morse²⁾ によって扱われている。しかし、分散システムに関するこの種の研究はまだみられない。本論文における議論の対象は、分散システムおよび不完全な情報をもつ線形システムである。

システムの非干渉化の問題は過去に広く研究されてきた^{2), 3)}、この問題は、多入力多出力をもつシステムがあるとき、それぞれの入力が個々の出力(あるいは

個々の出力集団)を別々に制御できるようにするというものである。これに対応して、分散システムにおいてはつぎのような状況が考えられる。すなわち、 i 番目の制御者は i 番目の出力(一般に多次元)のみを制御し、 j 番目($j \neq i$)の出力にはまったく影響を与えないという状況である。このような状況をつくりだすにはいかなる局所的制御法則を用いればよいかというのが、出力分割の問題である。

第2章では、線形分散システムにおける外乱局所化の問題が解けるための必要十分条件を与える。第3章では、不完全な状態情報あるいは出力情報を用いた外乱局所化の問題を取扱う。最後に第4章では、第3章の結果を適用して、出力分割が可能なための必要十分条件を与える。

本論文においては、以下のような記法を用いる。筆記体 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \dots$ はそれぞれ $x, y, \dots$ というベクトルを要素にもつ実ベクトル空間を表わし、零空間、零ベクトル、 $\dots$ は 0 で表わす。 $d(\mathcal{X})$ は $\mathcal{X}$ の次元であり、 $\mathcal{X}_i^c$ は $\mathcal{X}_i$ の補空間を表わす。 $\mathcal{E}^n$ は n 次元実空間である。また、線形写像と行列は同一視され、どちらも大文字で $A, B, \dots$ のように書かれる。 $M: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{S}$ で $\mathcal{I} \subset \mathcal{R}$ が成り立つとき、 $M|_{\mathcal{I}}$ は制限写像 $\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{S}$, $t \mapsto Mt$ を表わす。 $\mathcal{M}(\overline{M})$ は $M(\overline{M})$ の像を表わし、 $\text{Ker } M$ は M の零空間を表わす。システムが $\dot{x} = Ax + Bu$ で表わされ、 $d(\mathcal{X}) = n$ のとき、 (A, B) の可制御空間 $\langle A | \mathcal{B} \rangle$ は

$$\langle A | \mathcal{B} \rangle = \mathcal{B} + A\mathcal{B} + \dots + A^{n-1}\mathcal{B}$$

で定義される。さらに、 $\mathcal{K} \subset \mathcal{E}^n$ のとき、 $I(A, B; \mathcal{K})$ は $\mathcal{K}$ の中に含まれるすべての (A, B) —不変部分空間の集合を示す。また、 $\underline{n}$ は 1 から n までの整数の集合を表わす。

2. 線形分散システムの外乱局所化

(状態フィード・バックによる)

2 人の制御者と外乱をもつ線形定常システム

* 東京工業大学工学部 東京都目黒区大岡山 2-12-1

* Faculty of Engineering, Tokyo Institute of Technology, Meguro-ku, Tokyo

(Received March 27, 1975)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^2 B_i u_i(t) + Dw(t) \quad (2.1)$$

を考える。ここに、 x は n 次元状態ベクトル、 u_i は m_i 次元入力ベクトル、 w は r 次元外乱ベクトルである。制御法則は、

$$u_i(t) = F_{ip} x_i(t) + v_i(t), \quad i=1, 2 \quad (2.2)$$

で表わされるものとする。ここに、 v_i は m_i 次元入力ベクトル、 x_i は n_i 次元状態ベクトルで i 番目の制御者が得る情報である。(2.1), (2.2)式により

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^2 [B_i F_{ip} x_i(t) + B_i v_i(t)] + Dw(t) \quad (2.3)$$

を得る。

このとき、つぎのような疑問が起る。すなわち、外乱 $w(t)$ があらかじめ定められた部分空間 $\mathcal{K}$ のみにしか影響を与えないように、 F_{ip} を選ぶことが可能であろうかという疑問である。いま、観測方程式が $y(t) = Cx(t)$ で表わされ、 $\mathcal{K} = \text{Ker } C$ であるとする。すると、もし F_{ip} が上述のように選ばれた場合には、 $w(t)$ は出力にまったく影響を与えないことになる。 $w(t)$ の影響がこのように局所化されるということは

$$\langle A + \sum_{i=1}^2 B_i F_{ip} | \mathcal{D} \rangle \subset \mathcal{K} \quad (2.4)$$

が成り立つことと等価である。ここに、 $F_i: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}_i$, $F_i | \mathcal{K}_i = 0$, $\mathcal{X}$ は状態空間、 $\mathcal{U}_i$ は i 番目の入力空間、 $\mathcal{K}_i$ は i 番目の制御者が情報を入手できない状態部分空間である。

そこで、「線形分散システムにおける外乱局所化の問題 (状態フィードバックによる)」(以下 DLPD-S⁴⁾ と略す) をつぎのように設定する。

$$A: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}, B_i: \mathcal{U}_i \rightarrow \mathcal{X}, \mathcal{D} \subset \mathcal{X}, \mathcal{K} \subset \mathcal{X}, \mathcal{K}_i \subset \mathcal{X}$$

が与えられたとき (ただし、 $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2 = 0$ と仮定する) 、

$$\langle A + \sum_{i=1}^2 B_i F_{ip} | \mathcal{D} \rangle \subset \mathcal{K} \quad (2.4)$$

を満たすように写像 $F_i: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}_i$, $F_i | \mathcal{K}_i = 0$ を選べ。

$\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2 = 0$ という仮定の意味は、おのおのの制御者には完全な状態情報がわかっていないが、両方の情報を加えれば全情報が用いられているということである。

本章の目的は、上述の問題に関するシステムの構造的特徴をみいだすことである。これはつぎの定理によって与えられる。

《定理 2.1》 DLPD-S が解けるための必要十分条件は

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{CV} \subset \mathcal{K} \cap A^{-1}(\mathcal{CV} + \mathcal{B}) \quad (2.5)$$

$$A(\mathcal{CV} \subset \mathcal{K}_j) \subset \mathcal{CV} + \mathcal{B}_j \quad (2.6)$$

が同時に成り立つような部分空間 $\mathcal{CV}$ が存在することである。ここに、 $\mathcal{B} \triangleq \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2$; $i, j=1, 2$; $j \neq i$ である。

本章の問題においては、 $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2 = 0$ が仮定されているが、もし $\mathcal{K}_1$ または $\mathcal{K}_2$ のいずれか一方が $\mathcal{X}$ に一致すれば、上のような仮定なしに定理は成り立つ。いま、

$$\mathbf{V} \triangleq \{ \mathcal{CV} : \mathcal{CV} \subset \mathcal{K} \cap A^{-1}(\mathcal{CV} + \mathcal{B}), A(\mathcal{CV} \subset \mathcal{K}_j) \subset \mathcal{CV} + \mathcal{B}_j; i, j=1, 2; j \neq i \}$$

とすると、一般に $\mathbf{V}$ は和に関して閉じていない。したがって、 $\mathbf{V}$ の最大 (supremum) 要素の存在が必ずしも保証されない。しかし、ある種の条件のもとでは supremum が存在する。その場合には、定理 2.1 はつぎのような実用的な表現に書き換えられる。

[系 2.1] $\mathcal{K} \cap \mathcal{K}_i$ が A -不変、すなわち

$$A(\mathcal{K} \cap \mathcal{K}_i) \subset \mathcal{K} \cap \mathcal{K}_i, \quad i=1, 2 \quad (2.7)$$

であるとする。このとき、DLPD-S が解けるための必要十分条件は

$$\mathcal{CV}^* \supset \mathcal{D} \quad (2.8)$$

である。ここに、 $\mathcal{CV}^* \triangleq \sup \{ \mathcal{CV} : \mathcal{CV} \subset \mathcal{K} \cap A^{-1}(\mathcal{CV} + \mathcal{B}) \}$ である。定理 2.1 を証明するために、つぎの補題が必要である。

[補題 2.1]

$$(A + B_i F_i)(\mathcal{CV} \cap \mathcal{K}_j) \subset \mathcal{CV} \quad (2.9)$$

を満たす写像 $F_i: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}_i$ が存在するための必要十分条件は

$$A(\mathcal{CV} \cap \mathcal{K}_j) \subset \mathcal{CV} + \mathcal{B}_j \quad (2.10)$$

($i, j=1, 2$; $j \neq i$) が成り立つことである。

(証明) 必要条件: $v \in \mathcal{CV} \cap \mathcal{K}_j$ とすると、(2.9) 式より

$$(A + B_i F_i)v = v'$$

を満たす $v' \in \mathcal{CV}$ および $F_i: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}_i$ が存在する。したがって、次式を得る。

$$Av = -B_i F_i v + v' \in \mathcal{B}_i + \mathcal{CV}$$

十分条件: $\{v_1^j, \dots, v_{\mu_j}^j\}$ を $\mathcal{CV} \cap \mathcal{K}_j$ の基底とする (ただし $\mu_j = d(\mathcal{CV} \cap \mathcal{K}_j)$)。このとき、

$$Av_k^j = u_k^j + B_i w_k^j$$

を満たす $u_k^j \in \mathcal{CV}$ および $w_k^j \in \mathcal{E}^{m_i}$ が存在する。ただし、 $k=1, 2, \dots, \mu_j$ である。 $v_1^j, v_2^j, \dots, v_{\mu_j}^j$ は線形独立だから

$$w_k^j = -F_i v_k^j$$

を満たす $F_i: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}_i$ が存在する。したがって、

$$(A + B_i F_i)v_k^j = u_k^j \in \mathcal{CV}$$

を得る。

つぎに、定理 2.1 を証明する。

(定理 2.1 の証明) 十分条件: $A\mathcal{C}\mathcal{V} \subset \mathcal{C}\mathcal{V} + \mathcal{B}$ により,

$$(A+B_1F_1'+B_2F_2')\mathcal{C}\mathcal{V} \subset \mathcal{C}\mathcal{V}$$

を満たす $F_i: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}_i$ ($i=1,2$) が存在する。いま,

$$(A+B_iF_i'')(\mathcal{C}\mathcal{V} \cap \mathcal{K}_j) \subset \mathcal{C}\mathcal{V}$$

を満たす $F_i'': \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}_i$ を選ぶ (ただし, $j=1,2$; $j \neq i$)。このような F_i'' が存在することは、補題 2.1 により明らかである。つぎに $\mathcal{C}\hat{\mathcal{V}}$ を

$$\mathcal{C}\mathcal{V} = \mathcal{C}\hat{\mathcal{V}} \oplus (\mathcal{C}\mathcal{V} \cap \mathcal{K}_1) \oplus (\mathcal{C}\mathcal{V} \cap \mathcal{K}_2)$$

により定め、以下のように F_i を定義する。

$$F_1|_{\mathcal{C}\hat{\mathcal{V}}} = F_1'\mathcal{C}\hat{\mathcal{V}}$$

$$F_1|_{(\mathcal{C}\mathcal{V} \cap \mathcal{K}_2)} = F_1''|_{(\mathcal{C}\mathcal{V} \cap \mathcal{K}_2)}$$

$$F_1|_{(\mathcal{C}\mathcal{V} \cap \mathcal{K}_1)} = 0$$

$$F_2|_{\mathcal{C}\hat{\mathcal{V}}} = F_2'\mathcal{C}\hat{\mathcal{V}}$$

$$F_2|_{(\mathcal{C}\mathcal{V} \cap \mathcal{K}_2)} = 0$$

$$F_2|_{(\mathcal{C}\mathcal{V} \cap \mathcal{K}_1)} = F_2''|_{(\mathcal{C}\mathcal{V} \cap \mathcal{K}_1)}.$$

このとき

$$\begin{aligned} & (A+B_1F_1+B_2F_2)\mathcal{C}\mathcal{V} \\ &= (A+B_1F_1+B_2F_2)[\mathcal{C}\hat{\mathcal{V}} \oplus (\mathcal{C}\mathcal{V} \cap \mathcal{K}_1) \oplus (\mathcal{C}\mathcal{V} \cap \mathcal{K}_2)] \\ &= (A+B_1F_1+B_2F_2)\mathcal{C}\hat{\mathcal{V}} \\ & \quad + (A+B_1F_1+B_2F_2)(\mathcal{C}\mathcal{V} \cap \mathcal{K}_1) \\ & \quad + (A+B_1F_1+B_2F_2)(\mathcal{C}\mathcal{V} \cap \mathcal{K}_2) \\ &= (A+B_1F_1+B_2F_2)\mathcal{C}\hat{\mathcal{V}} + (A+B_2F_2)(\mathcal{C}\mathcal{V} \cap \mathcal{K}_1) \\ & \quad + (A+B_1F_1)(\mathcal{C}\mathcal{V} \cap \mathcal{K}_2) \\ &= (A+B_1F_1'+B_2F_2')\mathcal{C}\hat{\mathcal{V}} + (A+B_2F_2'')(\mathcal{C}\mathcal{V} \cap \mathcal{K}_1) \\ & \quad + (A+B_1F_1'')(\mathcal{C}\mathcal{V} \cap \mathcal{K}_2) \subset \mathcal{C}\mathcal{V} \end{aligned}$$

必要条件: $\mathcal{W} \triangleq \langle A+B_1F_1+B_2F_2 | \mathcal{D} \rangle$ とする。ただし, $F_1|_{\mathcal{K}_1}=0$, $F_2|_{\mathcal{K}_2}=0$ である。このとき、明らかに

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{W} \subset \mathcal{K}$$

が成り立つ。定義により,

$$(A+B_1F_1+B_2F_2)\mathcal{W} \subset \mathcal{W}$$

であるから,

$$A\mathcal{W} \subset \mathcal{B} + \mathcal{W}$$

を得る。また、仮定により

$$\begin{aligned} & (A+B_iF_i)(\mathcal{W} \cap \mathcal{K}_j) \quad (i, j=1,2; j \neq i) \\ &= (A+B_1F_1+B_2F_2)(\mathcal{W} \cap \mathcal{K}_j) \\ & \subset (A+B_1F_1+B_2F_2)\mathcal{W} \subset \mathcal{W} \end{aligned}$$

したがって、補題 2.1 より,

$$A(\mathcal{W} \cap \mathcal{K}_i) \subset \mathcal{W} + \mathcal{B}_i$$

が成り立つことがわかる。

(系 2.1 の証明) $\mathcal{K} \cap \mathcal{K}_i$ ($i=1,2$) は A -不変であるので $A(\mathcal{K} \cap \mathcal{K}_i) \subset \mathcal{K} \cap \mathcal{K}_i + \mathcal{B}$ は明らか。ゆえに, $\mathcal{K} \cap \mathcal{K}_i \subset \mathcal{C}\mathcal{V}^*$ 。また, $\mathcal{K} \cap \mathcal{K}_i \subset \mathcal{K}_i$ である。したがって, $\mathcal{K} \cap \mathcal{K}_i \subset \mathcal{C}\mathcal{V}^* \cap \mathcal{K}_i$ が成立する。定義により

$\mathcal{K} \subset \mathcal{C}\mathcal{V}^*$ であるから, $\mathcal{K} \cap \mathcal{K}_i \subset \mathcal{C}\mathcal{V}^* \cap \mathcal{K}_i$ となり, 結局 $\mathcal{K} \cap \mathcal{K}_i = \mathcal{C}\mathcal{V}^* \cap \mathcal{K}_i$ となる。したがって,

$$\begin{aligned} A(\mathcal{C}\mathcal{V}^* \cap \mathcal{K}_i) &= A(\mathcal{K} \cap \mathcal{K}_i) \subset \mathcal{K} \cap \mathcal{K}_i = \mathcal{C}\mathcal{V}^* \cap \mathcal{K}_i \\ &\subset \mathcal{C}\mathcal{V}^* + \mathcal{B}_i \quad (j=1,2; j \neq i) \end{aligned}$$

を得る。すなわち,

$$\mathcal{C}\mathcal{V}^* \in \mathbf{V} \triangleq \{\mathcal{C}\mathcal{V}: \mathcal{C}\mathcal{V} \subset \mathcal{K} \cap A^{-1}(\mathcal{C}\mathcal{V} + \mathcal{B}),$$

$$A(\mathcal{C}\mathcal{V} \cap \mathcal{K}_i) \subset \mathcal{C}\mathcal{V} + \mathcal{B}_i, \quad i, j=1,2; j \neq i\}$$

が証明された。したがって、定理 2.1 により系が成り立つことは明白である。

[例 2.1] 定理 2.1 の例

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{D} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{K} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},$$

$$\mathcal{K}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{K}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad (\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2 = 0)$$

$\mathcal{C}\mathcal{V} = \{[0 \ 0 \ 1]^T\}$ とすると, $\mathcal{C}\mathcal{V}$ が定理 2.1 の条件をすべて満足することは容易に示される。したがって、上記のシステムは外乱局所化可能である。

[例 2.2] 系 2.1 の例

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{D} = \{[0 \ 0 \ 1]^T\}, \quad \mathcal{K} = \{[0 \ 0 \ 1]^T\},$$

$$\mathcal{K}_1 = \{[0 \ 1 \ 0]^T\}, \quad \mathcal{K}_2 = \{[0 \ 0 \ 1]^T\}$$

とする。このとき, $\mathcal{K} \cap \mathcal{K}_1$, $\mathcal{K} \cap \mathcal{K}_2$ が A -不変であることは容易にわかる。 $\mathcal{K}$ に含まれる最大 $(A, [B_1, B_2])$ -不変部分空間は, $\mathcal{C}\mathcal{V}^* = \{[0 \ 0 \ 1]^T\}$ であるので, $\mathcal{C}\mathcal{V}^* \supset \mathcal{D}$ が成り立つことは明らかである。したがって, DLPD-S は解をもつ。

3. 不完全情報による線形システムの外乱局所化

分散システムの特殊な場合として、システム

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Dw(t) \quad (3.1)$$

に、不完全な状態フィードバック

$$u(t) = F_p x_p(t) + v(t) \quad (3.2)$$

を掛けた場合を考えることにする。このとき、「不完全な状態フィードバックによる線形システムの外乱局所化の問題」(以下 DLP-PS と略す) はつぎのように記述される。

$A: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, $B: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$, $\mathcal{D} \subset \mathcal{X}$, $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$, $\mathcal{K}' \subset \mathcal{X}$ が与えられたとき,

$$\langle A+BF|\mathcal{D}\rangle\subset\mathcal{K} \quad (3.3)$$

を満たす写像 $F: \mathcal{X}\rightarrow\mathcal{U}$, $F|_{\mathcal{K}'}=0$ をみつつけよ
(ここで, $\mathcal{K}'$ は $\mathcal{X}_p^c$ に相当する).

《定理 3.1》 DLP-PS が解をもつための必要十分条件は,

$$\mathcal{D}\subset\mathcal{V}\subset\mathcal{K}\cap A^{-1}(\mathcal{B}+\mathcal{V}) \quad (3.4)$$

$$A(\mathcal{V}\cap\mathcal{K}')\subset\mathcal{V} \quad (3.5)$$

を満たす $\mathcal{V}$ が存在することである.

(証明) 定理 2.1 およびその後の記述により, ただちに導かれる.

[系 3.1] $\mathcal{K}\cap\mathcal{K}'$ が A -不変であるとする. このとき,

$$\langle A+BF|\mathcal{D}\rangle\subset\mathcal{K}$$

を満たす $F: \mathcal{X}\rightarrow\mathcal{U}$, $F|_{\mathcal{K}'}=0$ が存在するための必要十分条件は,

$$\mathcal{V}^*\supset\mathcal{D} \quad (3.6)$$

が成立することである. ここに, $\mathcal{V}^*\triangleq\sup I(A, B; \mathcal{K})$ である. (証明略)

Wonham と Morse²⁾ の結果 (完全な状態情報が入手できる場合) は, この系の特殊な場合, すなわち $\mathcal{K}'=0$ の場合である.

出力フィードバック

$$u(t)=Hy(t)+v(t)(y\in\mathcal{E}^*) \quad (3.7)$$

を用いる場合にも, 定理 3.1 および系 3.2 に似た結果が得られる. ただし,

$$y(t)=Cx(t) \quad (3.8)$$

である.

「出力フィードバックによる外乱の局所化 (DLP-O と略す)」とはつぎのことを意味する.

$A: \mathcal{X}\rightarrow\mathcal{X}$, $B: \mathcal{U}\rightarrow\mathcal{X}$, $C: \mathcal{X}\rightarrow\mathcal{Y}$, $\mathcal{D}\subset\mathcal{X}$, $\mathcal{K}\subset\mathcal{X}$ が与えられたとき,

$$\langle A+BHC|\mathcal{D}\rangle\subset\mathcal{K} \quad (3.9)$$

を満たす $H: \mathcal{Y}\rightarrow\mathcal{U}$ を求めよ.

この問題が解をもつ条件は以下に与えられる.

《定理 3.2》 DLP-O が解をもつための必要十分条件は,

$$\mathcal{D}\subset\mathcal{V}\subset\mathcal{K}\cap A^{-1}(\mathcal{B}+\mathcal{V}) \quad (3.10)$$

$$A(\mathcal{V}\cap\mathcal{K}_c)\subset\mathcal{V} \quad (3.11)$$

を満たす $\mathcal{V}$ が存在することである. ここに, $\mathcal{K}_c=\text{Ker } C$ である.

[系 3.2] $\mathcal{K}\cap\mathcal{K}_c$ が A -不変であるとする. このとき, (3.9)式を満足する H が存在するための必要十分条件は,

$$\mathcal{V}^*\supset\mathcal{D}$$

である. ここに, $\mathcal{V}^*=\sup I(A, B; \mathcal{K})$ である.

(定理 3.2 の証明) 十分性: $A\mathcal{V}\subset\mathcal{V}\subset\mathcal{B}$ より,

ある適当な F_0 に対して $(A+BF_0)\mathcal{V}\subset\mathcal{V}$ が成立する. いま, $\mathcal{V}_c$ を $\mathcal{V}=\mathcal{V}_c\oplus(\mathcal{V}\cap\mathcal{V}_c)$ によって定義すると, $(A+BF_0)\mathcal{V}_c\subset\mathcal{V}$ を得る. また, 条件より, $A(\mathcal{V}\cap\mathcal{K}_c)\subset\mathcal{V}$ である. いま, $\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_\mu\}$ を $\mathcal{V}_c$ の基底とすれば, $C\hat{v}_k(k\in\mu)$ は線形独立だから,

$$HC\hat{v}_k=F_0\hat{v}_k \quad k\in\mu$$

$$HC(\mathcal{V}\cap\mathcal{K}_c)=0$$

を満たす $H: \mathcal{Y}\rightarrow\mathcal{U}$ を選ぶことができる. これを用いて $(A+BHC)\mathcal{V}\subset\mathcal{V}$ を示すことができる. したがって, 次式が成立することがわかる.

$$\langle A+BHC|\mathcal{D}\rangle\subset\langle A+BHC|\mathcal{V}\rangle\subset\mathcal{V}\subset\mathcal{K}$$

必要性: ある H に対して, $\mathcal{W}\triangleq\langle A+BHC|\mathcal{D}\rangle$ を定義すると,

$$\mathcal{D}\subset\mathcal{W}\subset\mathcal{K}, \quad A\mathcal{W}\subset\mathcal{W}+\mathcal{B}$$

が成り立つ. また,

$$A(\mathcal{W}\cap\mathcal{K}_c)=(A+BHC)(\mathcal{W}\cap\mathcal{K}_c)\subset\mathcal{W}$$

である. したがって, 必要性が示された.

(系 3.2 の証明) 系 3.1 の証明に類似.

4. 線形分散システムの出力分割

前章の結果は, 線形分散システムの出力分割の問題に直接応用される.

線形システム

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+\sum_{i=1}^2 B_i u_i(t) \quad (4.1)$$

$$y_i(t)=C_i x(t) \quad i=1, 2 \quad (4.2)$$

について考える. ここに, u_i は i 番目の制御者が制御できる入力, y_i は i 番目の制御者が観測する出力である. このシステムに

$$u_i(t)=F_i x_p(t)+v_i(t) \quad (4.3)$$

で表わされる局所状態フィードバックを作用させる.

写像 $F_i: \mathcal{X}\rightarrow\mathcal{U}_i$ を, $F_i|_{\mathcal{X}_i}=F_{ip}$, $F_i|_{\mathcal{K}_i}=0$ (ここに $\mathcal{K}_i\triangleq\mathcal{X}_i^c\subset\mathcal{X}$) により定義すれば, (4.3)式は

$$u_i(t)=F_i x(t)+v_i(t) \quad (4.4)$$

のように書きなおせるので, フィードバックを行った結果できる閉ループシステムは, つぎのように表わされる.

$$\dot{x}(t)=\left(A+\sum_{k=1}^2 B_k F_k\right)x(t)+\sum_{k=1}^2 B_k v_k(t) \quad (4.5)$$

$$y_i(t)=C_i x(t) \quad (i=1, 2) \quad (4.6)$$

このシステムにおいて, i 番目の制御者は i 番目の出力だけを制御でき, ほかの出力にはまったく影響を与えないのは,

$$\left\langle A+\sum_{k=1}^2 B_k F_k \middle| \mathcal{B}_i \right\rangle \subset \text{Ker } C_j \quad (4.7)$$

のとき, かつそのときに限られる ($i, j=1, 2; j\neq i$).

したがって、「線形分散システムにおける出力分割(状態フィードバックによる)」(ODP-S と略称する)は、つぎのように表現される。

$A: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}, B_i: \mathcal{U}_i \rightarrow \mathcal{X}, \mathcal{K}_i \subset \mathcal{X}, \mathcal{K}_{ci} = \text{Ker } C_i$ が与えられたとき、

$$\left\langle A + \sum_{k=1}^2 B_k F_k | \mathcal{B}_i \right\rangle \subset \mathcal{K}_{cj} \quad (4.8)$$

を満たす $F_i: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}_i, F_i|_{\mathcal{K}_i} = 0$ を求めよ。ここに、 $i, j=1, 2; j \neq i$ である。ここでは、 $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2 = 0$ は仮定されていない。

この問題が解をもつためにはシステムがどのような構造をもっていなければならないかを調べるのが本章の目的である。

《定理 4.1》 ODP-S が解をもつための必要十分条件は、

$$\mathcal{B}_i \subset \mathcal{V}_i \subset \mathcal{K}_{cj} \cap A^{-1}(\mathcal{B}_j + \mathcal{V}_i) \quad (4.9)$$

$$A(\mathcal{V}_i \cap \mathcal{K}_i) \subset \mathcal{V}_i \quad (4.10)$$

を満たす $\mathcal{V}_i$ が存在することである ($i, j=1, 2; j \neq i$)。

(証明)

$$\left\langle A + \sum_{k=1}^2 B_k F_k | \mathcal{B}_i \right\rangle = \langle A + B_j F_j | \mathcal{B}_i \rangle$$

($i, j=1, 2; j \neq i$) であるので、定理 3.1 により本定理は証明された。

もし、 $(A, [B_1, B_2])$ が可制御対であるならば、 v_i により、 y_i は完全に制御される。すなわち、

$$C_i \left\langle A + \sum_{k=1}^2 B_k F_k | \mathcal{B}_i \right\rangle = \mathcal{J}_i$$

$$C_j \left\langle A + \sum_{k=1}^2 B_k F_k | \mathcal{B}_i \right\rangle = 0$$

である。

[系 4.1] $\mathcal{K}_{cj} \cap \mathcal{K}_i$ が A -不変であるとする。このとき、ODP-S が解をもつための必要十分条件は、

$$\mathcal{V}_i^* \supset \mathcal{B}_i \quad (4.11)$$

である。ここに、 $\mathcal{V}_i^* \triangleq \sup I(A, B_j; \mathcal{K}_{cj}); i, j=1, 2; j \neq i$ である。

(証明) 系 3.1 より明らか。

つぎに、(4.1)式および(4.2)式で表わされるシステムに、出力フィードバック

$$u_i(t) = H_i y_i(t) + v_i(t) \quad (4.12)$$

を掛けた場合を考察する。このときは、閉ループ系は

$$\dot{x}(t) = \left(A + \sum_{k=1}^2 B_k H_k C_k \right) x(t) + \sum_{k=1}^2 B_k v_k(t) \quad (4.13)$$

となる。そして、「線形分散システムの出力分割問題(出力フィードバックによる)」(以下 ODP-O と略

す)は、つぎのように表現される。

$A: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}, B_i: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}_i, \mathcal{K}_{ci} = \text{Ker } C_i$ が与えられたとき、

$$\left\langle A + \sum_{k=1}^2 B_k H_k C_k | \mathcal{B}_i \right\rangle \subset \mathcal{K}_{cj} \quad (4.14)$$

を満たす $H_i: \mathcal{Y}_i \rightarrow \mathcal{U}_i$ を求めよ。ただし、 $i, j=1, 2; j \neq i$ である。

《定理 4.2》 ODP-O が解けるための必要十分条件は

$$\mathcal{B}_i \subset \mathcal{V}_i \subset \mathcal{K}_{cj} \cap A^{-1}(\mathcal{B}_j + \mathcal{V}_i) \quad (4.15)$$

$$A(\mathcal{V}_i \cap \mathcal{K}_{ci}) \subset \mathcal{V}_i \quad (4.16)$$

を満たす $\mathcal{V}_i$ 存在することである。ここに、 $i, j=1, 2; j \neq i$ である。

(証明)

$$\left\langle A + \sum_{k=1}^2 B_k H_k C_k | \mathcal{B}_i \right\rangle = \langle A + B_j H_j C_j | \mathcal{B}_i \rangle$$

($i, j=1, 2; j \neq i$) であるから、定理 3.2 により、本定理はただちに証明される。

もし、 $(A, [B_1, B_2])$ が可制御対であるならば、

$$C_i \left\langle A + \sum_{k=1}^2 B_k H_k C_k | \mathcal{B}_i \right\rangle = \mathcal{J}_i$$

$$C_j \left\langle A + \sum_{k=1}^2 B_k H_k C_k | \mathcal{B}_i \right\rangle = 0$$

($i, j=1, 2; j \neq i$) である。

[系 4.2] $\mathcal{K}_{ci} \cap \mathcal{K}_{cj}$ が A -不変であるとする。このとき、ODP-O が解をもつために必要かつ十分な条件は、

$$\mathcal{V}_i^* \supset \mathcal{B}_i \quad (4.17)$$

が成り立つことである。ただし、 $\mathcal{V}_i^* \triangleq \sup I(A, B_j; \mathcal{K}_{cj}); i, j=1, 2; j \neq i$ である。

(証明) 系 3.2 によりただちに証明される。

[例 3] 定理 4.1 の例

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{K} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{K}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{K}_{c1} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{K}_{c2} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

の場合を考える。

$$\mathcal{V}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{V}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

が定理 4.1 の条件を満足することは、容易に確かめられる。したがって、ODP-S は解をもつ。

[例 4] 系 4.1 の例

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{K}_{c_1} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{K}_{c_2} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\},$$

$$\mathcal{K}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{K}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

とする。このとき、 $\mathcal{K}_{c_2}$ および $\mathcal{K}_{c_1}$ に含まれる最大 $(A, [B_1, B_2])$ 一不変部分空間は、それぞれ

$$\mathcal{V}_1^* = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{V}_2^* = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

であり、 $\mathcal{V}_1^* \supset \mathcal{B}_1$, $\mathcal{V}_2^* \supset \mathcal{B}_2$ は明らかであるから、ODP-S は解をもつ。

定理 4.2 および系 4.2 の例は省略する。

5. 結 論

本論文では外乱局所化および出力分割の問題に関連する、線形定常分散システムの幾何学的特徴を与えた。これらの特徴は、システムの構造を研究する上で基礎となるものである。まず最初に、部分状態フィードバックを掛けることによって分散システムにおける外乱局所化が可能であるための必要十分条件を与えた。分散システムの特別な場合として、普通のシステムにおいて部分的な状態情報、あるいは、出力情報し

か使えない場合がある。つぎに、このような場合に対する外乱局所化の問題を議論し、その解が存在するための必要十分条件を求めた。最後に、2番目に求めた条件を利用して、分散システムの出力分割が可能であるための必要十分条件を導いた。

最初の問題では、 $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2 = 0$ が仮定されているが、DLPD-S の問題設定のあとに述べたように、この仮定は意味のあるものである。一方、出力分割の問題においては、何らの仮定をおくことなく、一般的議論がなされた。

部分的な状態、あるいは出力しか観測できない場合における外乱局所化問題の、解が存在するための条件は、Wonham と Morse²⁾ の結果の拡張である。

また、本論文では、外乱局所化問題の一つの応用として、出力分割の問題が議論された。

参 考 文 献

- 1) M. Aoki: On Feedback Stabilization of Decentralized Dynamic Systems, *Automatica*, **8**, 161/173 (1972)
- 2) W.M. Wonham and A.S. Morse: Decoupling and Pole Assignment in Linear Multivariable Systems: A Geometric Approach, *SIAM J. Control*, **8**, 1/18, (1970)
- 3) P.L. Falb and W.A. Wolovich: Decoupling in the Design and Synthesis of Multivariable Control Systems, *IEEE Trans. Automatic Control*, **AC-12**-6, 651/659 (1967)
- 4) W.M. Wonham: Linear Multivariable Control: A Geometric Approach, *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, Systems Theory Springer-verlag (1974)
- 5) W.M. Wonham: Tracking and Regulation in Linear Multivariable Systems, *SIAM J. Control*, **11**-3, (1973)