むだ時間系の最適制御問題への Galerkin 法の適用[†]

藤 川 英 司*・示 村 悦二郎**

The Application of the Galerkin Method to the Optimal Control Problems of the System with Time-Delay

Hideji FUJIKAWA* and Etsujiro SHIMEMURA**

In this paper, an approximate method of solving the optimal control problems of the system with time-delay is discussed. The mathematical model of the system with time-delay is formulated as the special case of the coupled systems of the lumped parameter subsystem and the distributed parameter subsystem. The state variables of this coupled system are infinite dimensional and some of the control variables are distributed in space. Therefore it is necessary in practice to implement the control system with a finite number of observers and a finite number of controllers. That is, one should design the practical control system for the approximated finite dimensional system. In this paper the Galerkin method is applied to obtain the approximated system. The characteristic features of this method and the results of the simulation are described.

From the computational experience, it is shown that the proposed method requires in many cases a smaller number of observers and controllers compared with the conventional finite difference method to achieve the same degree of control performance.

1. ま え が き

むだ時間要素を含む自動制御系の最適制御問題はこれまで多数論議されている。その多くは、むだ時間要素を含まない集中定数サブシステム（常微分方程式で記述される）と、偏微分方程式で記述されるむだ時間要素を含む分布定数サブシステムの結合系として定式化を行い、最大原理、あるいは動的計画法により最

適制御則を求めている¹⁾。この結合系理論は、状態の概念がとらえやすいことと、純粹のむだ時間要素を含む系以外に、もっと広範囲の一般的なむだ時間系を扱える可能性があることなどの理由から、むだ時間系の最適制御問題の議論によく用いられる。

一方、この結合系理論を利用して、具体的に最適制御を実行するためには、実際のむだ時間系の最適制御問題は、有限個の状態観測器からのデータにより無限次元の状態量を推定し、また有限個の制御装置によって空間的に分布した制御関数を実現することを前提として構成されなくてはならない。

この問題に対するひとつの接近法は、本来、無限次元の状態空間における最適制御問題を、何らかの方法で有限次元、すなわち集中定数系の最適制御問題に近似的に変換することである。たとえば、有限次元差分近似法の適用は、その最も単純な方法であろう。少し複雑な例としては MWR (Method of Weighted Residuals) などを適用する方法がある。いずれの方法を取り入れるとしても、新たに状態観測器と制御装置の最適な個数と最適な位置の決定という問題が提起される。

このうち最適状態値推定問題については、有限差分近似法²⁾、最尤推定法³⁾、微係数法⁴⁾などにより検討が加えられている。これらは分布定数系を対象としているが、むだ時間系への適用は比較的容易である。また、分布定数系の制御装置の最適位置の決定問題については久村らが報告している⁵⁾。さらに、Prabhu らは Galerkin 法を利用して分布定数系（熱伝導系）の最短時間制御問題を扱っている⁶⁾。この Galerkin 法は、従来から微分方程式の初期値問題や固有値問題の近似解法にしばしば用いられている。最近、状態値推定問題や最適制御問題にときどき利用されている。

先の Prabhu らを初めとして、集中定数系の最適制御問題に適用した Neuman らの報告⁷⁾、相良ら⁸⁾の状態推定値問題、嘉納⁹⁾、古荘¹⁰⁾の熱交換器の解析につ

[†] 第 13 回計測自動制御学会学術講演会で発表（昭 49・8）

* 武蔵工業大学 東京都世田谷区玉堤 1-28

** 早稲田大学理工学部 東京都新宿区西大久保 4-170

* Musashi Institute of Technology, Setagaya-ku, Tokyo

** School of Science and Engineering, Waseda University, Shinjuku-ku, Tokyo

(Received February 17, 1975)

いての報告がある。しかし、むだ時間系の制御問題に適用した例はないようである。

最近各方面で頻繁に利用されている電子計算機を、実際の制御系に使用する場合を考えても、状態観測器と制御装置の数と位置を決定する問題は十分な考慮が払われなければならない。

このような観点から、本論文では、集中定数サブシステム—分布定数サブシステムの結合系として表わされたむだ時間系の最適制御問題に、Galerkin 法を適用して、有限個の状態観測器と制御装置から構成される集中定数系の最適制御問題に、近似的に変換する方法を考察した。さらに、状態観測器と制御装置の個数の選択という点から、Galerkin 法を適用した場合の得失を、電子計算機によるシミュレーションの結果から検討した。それらをあわせて報告する。

2. Galerkin 法

Galerkin 法は選点法と共に、MWR の中で最もよく知られた方法であり、微分方程式の初期値問題、固有値問題の近似解法によく使われている。本章では、むだ時間系の制御問題への適用を明確にするため、Galerkin 法の概略を述べる。

つぎの偏微分方程式で記述される分布定数系を考える。

$$N(y(t, s)) = F(t, s) \quad (1)$$

境界条件

$$L_i(y(t, s)) = f_i(t, s), \quad (s \in \Omega_b, \quad i=1, \dots, r) \quad (2)$$

初期条件

$$\left. \frac{\partial^i y(t, s)}{\partial t^i} \right|_{t=0} = y_0^i(s), \quad (i=1, \dots, q-1) \quad (3)$$

ここで、 $y(t, s)$ は m 次元状態ベクトル、 N は m 次元偏微分演算子、 $F(t, s)$ は m 次元強制入力関数、 L_i, f_i はそれぞれ s の境界 Ω_b 上で定義された偏微分演算子、ならびに強制入力関数、 r, q はそれぞれ、 N の空間微分ならびに時間微分の最高次数とする。

まず、(2)、(3) 式の条件の下で、(4) 式の解 $y(t, s)$ を次式で仮定する。

$$\begin{aligned} y_j(t, s) &\equiv y_j^*(t, s) \\ &= Q_j(f_1, \dots, f_r, t, s) \\ &\quad + \sum_{k=1}^l a_{jk}(t) \phi_k(s), \quad j=1, \dots, m \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 $\phi_k(s)$ は 1 次独立な重み関数、 $a_{jk}(t)$ は決定される未知係数、そして $\phi_k(s)$ と Q_j は Ω_b 上で (2) 式を満たすように選ばれる。すなわち

$$L_i(\phi_k(s)) = 0, \quad (i=1, \dots, r) \quad (5)$$

$$L_i(Q_j(f_1, \dots, f_r, t, s)) = f_i(t, s), \quad (i=1, \dots, r) \quad (6)$$

未知係数 $a_{jk}(t)$ はつぎに述べる方法で決定される。

(1) 式ならびに (3) 式の残差をつぎのように定義する。

$$R_j(y^*(t, s)) = N_j(y^*(t, s)) - F_j(t, s), \quad j=1, \dots, m \quad (7)$$

$$\begin{aligned} R_{0j}^k(y^*(t, s)) &= y_{0j}^k(s) - \left. \frac{\partial^k}{\partial t^k} \{y^*(t, s)\} \right|_{t=0}, \\ j &= 1, \dots, m, \quad k=0, \dots, q-1 \end{aligned} \quad (8)$$

ここで

$$\left. \frac{\partial^0}{\partial t^0} y_j^*(t, s) \right|_{t=0} \triangleq y_j^*(0, s)$$

残差と $\phi_k(s)$ とを直交化させる。

$$\langle \phi_k(s), R_j(y^*(t, s)) \rangle = 0 \quad (9)$$

$$\langle \phi_k(s), R_{0j}^k(y^*(t, s)) \rangle = 0 \quad (10)$$

ここで、

$$k=1, \dots, l, \quad j=1, \dots, m, \quad h=0, \dots, q-1,$$

$$\langle w, v \rangle = \int_{\Omega} w \cdot v d\Omega$$

(9) 式から未知係数 $a_{jk}(t)$ ($j=1, \dots, m, k=1, \dots, l$) に関する q 次 $m \times l$ 連立常微分方程式、あるいは $m \times l \times q$ 連立一階常微分方程式ができる。そして (10) 式から初期条件 $a_{jk}(0)$ が与えられる。

(4) 式で l を増加させると共に $y^*(t, s)$ は $y(t, s)$ に近づき、 $l \rightarrow \infty$ で $y(t, s)$ に一致する。

3. 結合モデルで表わしたむだ時間系の最適制御問題への Galerkin 法の適用

この章では、結合モデルで表わされたむだ時間要素を含む系の最適制御問題を、Galerkin 法を用いて、分布定数サブシステムの状態を有限個の状態に、空間的に分布した制御装置を有限個の制御装置にて近似して、有限個の状態観測器と制御装置とから構成される多変数集中定数系の最適制御問題に、近似的に変換する方法を述べる。

つぎの状態方程式で記述されるむだ時間系を考える。

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t), \eta(t), u(t), t) \quad (11)$$

$$\frac{\partial \xi(t, s)}{\partial t} + N(t, s) \frac{\partial \xi(t, s)}{\partial s} = \Psi(\xi(t, s), v(t, s), s, t) \quad (12)$$

$$0 \leq t \leq T, \quad 0 < s < 1$$

$$\xi(t, 0) = L(t)x(t) + M(t)u(t) \quad (13)$$

$$\eta(t) = \xi(t, 1) \quad (14)$$

初期条件

$$x(0)=x_0 \quad (15)$$

$$\xi(0, s)=\xi_0(s) \quad (16)$$

ここで, $x(t)$ は集中定数サブシステムの n 次元状態ベクトル, $\xi(t, s)$ は分布定数サブシステムの m 次元状態ベクトル値関数, $u(t)$ は p 次元制御ベクトル, $v(t, s)$ は r 次元分布制御ベクトル, $N(t, s)$ は m 次元対角正値行列とする.

(11)~(16)式で定式化した系の評価関数を

$$\begin{aligned} J = & G_1(x(T), T) + \int_0^1 G_2(\xi(T, s), T, s) ds \\ & + \int_0^T G_3(x(t), u(t), t) dt \\ & + \int_0^T \int_0^1 G_4(\xi(t, s), v(t, s), t, s) ds dt \quad (17) \end{aligned}$$

と定義して, J を最小とするような $\{u(t), v(t, s)\}$ をみつける最適制御問題とする.

まず, 空間的に分布した制御ベクトル $v(t, s)$ は実用上実現不可能であるから, これを有限個の制御装置にて制御 $v^*(t, s)$ を行わせる.

$$v^*(t, s) = \sum_{j=0}^{m_c} v_j(t) \delta(s-s_j) \quad (18)$$

ここで, $v_j(t)$ は r 次元ベクトル, δ はデルタ関数である. この $v^*(t, s)$ は制御装置数を増加させたとき, $v(t, s)$ と必ずしも一致するとは限らない.

つぎに, 分布定数サブシステムの状態 $\xi(t, s)$ を次式のように近似する.

$$\begin{aligned} \xi(t, s) & \cong \xi^*(t, s) \\ & = Q(\phi_1, \dots, \phi_m, t, s) + \sum_{k=1}^{m_s} a_k(t) \phi_k(s) \quad (19) \end{aligned}$$

ここで, $Q, a_k(t), (k=1, \dots, m_s)$ は m 次元ベクトルである. $\xi^*(t, s)$ は, m_s, m_c を増せば $\xi(t, s)$ に近づく. (19)式は境界条件 ((13)式) を満たさねばならない.

つぎに, 残差を求める.

$$\begin{aligned} R(\xi^*(t, s)) & = \frac{\partial \xi^*(t, s)}{\partial t} + N(t, s) \frac{\partial \xi^*(t, s)}{\partial s} \\ & \quad - \mathcal{T}(\xi^*(t, s), v^*(t, s), t, s) \quad (20) \end{aligned}$$

$$R_0(\xi^*(t, s)) = \xi^*(0, s) - \xi_0(s) \quad (21)$$

ここで, R と R_0 は, それぞれ m 次元ベクトルである. (9)および(10)式のように, $\phi_k(s)$ と $R(\xi^*)$ および $R_0(\xi^*)$ との内積をとると, $a_j(t), (j=1, \dots, m_s)$ に関する常微分方程式が得られ, $\xi(t, s)$ は $a_1(t), \dots, a_{m_s}(t)$ の線形結合で近似される.

新しく

$$\begin{aligned} X & \triangleq (x^T, a_1^T, \dots, a_{m_s}^T)^T, \\ U & \triangleq (u^T, v_0^T, \dots, v_{m_c}^T)^T \quad (22) \end{aligned}$$

Fig. 1 Composition of systems

と定義すると, 元の系の最適制御問題は

$$\frac{dX}{dt} = \bar{A}X + \bar{B}U \quad (23)$$

$$X(0) = X_0 \quad (24)$$

$$J = \bar{G}_1(X(T), T) + \int_0^T \bar{G}_2(X(t), U(t), t) dt \quad (25)$$

と書き表われ, 多変数集中定数系の最適制御問題に変換された. 集中定数系の最適制御を決定する計算法は, すでに十分研究されている.

実際のシステムについては, Fig. 1 に示す構成になる. 任意の時刻における系の状態 $\{x, \xi\}$ から, (19)および(22)式によって変換された集中定数系の状態 $\{X\}$ が求められる. オブザーバのようなほかの補助装置を用いることなく, 任意の時刻における状態 $a_k(t), k=1, \dots, m_s$ を, 一意的に知るためには, 観測器の数は m_s と同じか, またはより多いことが必要である. 集中定数系の最適制御則により決定された

$$U \triangleq \{u^T, v^{*T}\}^T$$

なる制御がむだ時間要素を含む系に加えられる.

システムが線形なむだ時間系 ((26)~(30)式) の場合, (23)式の係数 $\bar{A}$, および $\bar{B}$ はつぎようになる.

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + B\xi(t, 1) + Cu(t) \quad (26)$$

$$\frac{\partial \xi(t, s)}{\partial t} + N \frac{\partial \xi(t, s)}{\partial s} = H\xi(t, s) + Ev(t, s),$$

$$0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq s \leq 1 \quad (27)$$

$$\xi(t, 0) = x(t) \quad (28)$$

$$x(0) = x_0 \quad (29)$$

$$\xi(0, s) = \xi_0(s) \quad (30)$$

ここで, x と ξ はスカラーとする.

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A+B & B\Phi(1) \\ \bar{A}^{-1}\bar{C}(A+B-H) & \bar{A}^{-1}(\bar{B}+B\bar{C}\Phi(1)) \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ \bar{A}^{-1}\bar{C}C & \bar{A}^{-1}\bar{D}1 \end{bmatrix}$$

ここで, $\Phi(1) = [\phi_1(1), \dots, \phi_{m_s}(1)]$, $0 = [0, \dots, 0]$
 $1 = [1, \dots, 1]$

$$\bar{A} = [\langle \phi_i(s), \phi_j(s) \rangle] \quad m_s \times m_s \text{ マトリクス}$$

$$\bar{B} = [\langle \phi_i(s), H\phi_j(s) \rangle]$$

$$-\langle \phi_i(s), N \frac{d\phi_j(s)}{ds} \rangle] \quad m_s \times m_s \text{ マトリクス}$$

$$\bar{C} = [-\langle \phi_i(s), 1 \rangle]$$

$$\bar{D} = [\langle \phi_i(s), 1 \rangle]$$

もし、 $\phi_k(s)$ ($k=1, \dots, m_s$) を正規直交関数に選べば、 $\bar{A}$ は $m_s \times m_s$ 次単位行列となり、むだ時間系を集中定数系に近似的に変換するとき、逆マトリクス $\bar{A}^{-1}$ の計算が省略される。

4. 例 題

前章において、Galerkin 法を適用して分布定数サブシステムの状態と分布制御関数を、有限個の状態と制御に近似することにより、結合系モデルで表わされたむだ時間要素を含む自動制御系を、集中定数系に変換する方法について述べた。

最も簡単な近似法としては、空間座標の関数として表わされる分布定数サブシステムの状態変数と制御関数を、おのおの有限個に差分近似する有限次元差分近似法があげられる（以下この論文では「差分法」と略記する）。本章では、Galerkin 法により近似した場合の得失を、差分法近似と比較して考え、電子計算機を用いて、例題についてのシミュレーションより確めた結果を述べる。

[例題 1]

最も簡単なむだ時間系として、つぎの状態方程式で表わされる系を考える。

$$\frac{dx}{dt} = x + y(t, 1) + u$$

$$\frac{\partial y(t, s)}{\partial t} + \frac{\partial y(t, s)}{\partial s} = 0, \quad 0 \leq t < 2, \quad 0 \leq s \leq 1$$

$$y(t, 0) = x(t)$$

$$x(0) = x_0 = 1$$

$$y(0, s) = 1$$

$$J = \int_0^2 (x^2 + u^2) dt$$

この問題は、すでに差分法などで扱われている¹¹⁾。Galerkin 法により近似解を求めるとき、解が求め得られるかどうかは、1 次独立な関数 $\phi_k(s)$ の選び方に影響される。この例題では

$$\phi_k(s) = s^k$$

なる関数を、グラム・シュミットの定理により直交化した関数 $\phi_k(s)$ を用いた。その結果、もとのシステム、および評価関数は

$$\frac{dX(t)}{dt} = \bar{A}X(t) + \bar{B}u(t)$$

$$J = \int_0^2 (X^T P X + u^2) dt$$

となり、2 次形式評価関数の最適フィードバック制御が得られる。ただし、

$$X \triangleq \{x, a_1, \dots, a_{m_s}\}^T$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 2 & \Phi(1) \\ 2\bar{C} & \bar{B} + \bar{C}\Phi(1) \end{bmatrix} \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{C} \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} -\langle \phi_i, \frac{d\phi_j}{ds} \rangle \end{bmatrix} \quad \bar{C} = [-\langle \phi_i, 1 \rangle] \quad i, j = 1, \dots, m_s$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

である。

電子計算機によるシミュレーションの結果の一例を Fig. 2 に、Fig. 3 には m_s と評価関数値のグラフを示した。差分法による近似において、分布定数サブシステムの状態の近似個数 21 のデータから決定された制御による状態 $\{x\}$ の時間的変化と得られた評価関数の値を、Galerkin 法による近似の場合と比べると、Galerkin 法では、6 個の近似によって、目標値と最終状態の誤差および評価関数の値がほぼ同等の制御を行わせることができる。このことは、最適フィードバック制御のための状態値を推定するさい、観測器の個数が少なくてすむことを意味している。電子計算機を制御装置の一部に用いた場合、計算機の記憶容量の節約が期待できる。

Fig. 2
Results of
simulation of
example 1

Fig. 3
Values of
performance
index of
example 1

Fig. 4 Values of performance index of example 2

【例題 2】

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) + y(t, 1) + u(t, s)$$

$$\frac{\partial y(t, s)}{\partial t} + \frac{\partial y(t, s)}{\partial s} + y(t, s) = v(t, s)$$

$$y(t, 0) = x(t)$$

$$x(0) = 1$$

$$y(0, s) = 1$$

$$J = \int_0^2 \left\{ x^2 + u^2 + \int_0^1 v^2 ds \right\} dt$$

例題 1 の結果をふまえて、この問題では分布定数サブシステムの状態の近似個数を 5 個と固定して、分布制御関数の近似個数、すなわち制御装置の数を変化させた。1 次独立な関数は例題 1 と同じく $\phi_k(s)$ を用いた。変換された集中定数系の評価関数は 2 次形式である。シミュレーションの結果として、制御装置数に対する評価関数の変化を Fig. 4 に示した。評価関数の値からみれば、制御装置数 9 で差分法による 21 に、制御装置数 7 で差分法による 11 に匹敵する制御を行わせることができる。この結果より、空間的に分布した制御装置を、有限個の制御装置にて近似して制御するさい、差分法によるより少ない制御装置で制御可能であることがわかる。

また、この方法によれば、状態観測器と制御装置の適当な数を別々に求めることができる。一方、重み関数 $\phi_k(s)$ に正規直交関数を用いれば、むだ時間系を多変数集中定数系に近似的に変換するさい、逆マトリクスの計算が省略できるが、実際のシステムに適用する場合に、重み関数の選択には慎重な考慮が必要となる。

5. む す び

本論文では、結合系モデルで表わされたむだ時間要素を含む系の最適制御問題に、Galerkin 法を適用し

て、多変数集中定数系の最適制御問題に近似的に変換する方法、ならびに電子計算機によるシミュレーションの結果の検討について述べた。

この方法は、有限個の観測器で状態を推定して、空間的に分布した制御関数を有限個の制御装置から構成することにより、むだ時間系を多変数集中定数系とみなして、集中定数系の最適制御則を利用するものである。

最も簡単な有限差分近似による方法に比べて、本論文で用いた方法は、1) 目標状態と最終状態との誤差、および達成される評価関数の値がほぼ同等の制御を行わせるためには、近似の個数、すなわち状態観測器、制御装置が少なくてもよい、2) 状態観測器と制御装置の数を、おのおの別々に、適当な値に選べる利点を有している。これらは、化学プラントのような大規模な分布定数システムの、電子計算機を用いる制御において、計算機の記憶容量の節約が可能であることをも意味している。また、非線形系への適用もきわめて簡単であることを考えあわせると、計算機制御に適したアルゴリズムを得ることができよう。

参 考 文 献

- 1) 示村悦二郎：むだ時間を含む系の最適問題、計測と制御、8-8, 528/536 (1969)
- 2) J. H. Seinfeld, G. R. Gavalas and M. Hwang: Non-Linear Filtering in Distributed Parameter Systems, J. of Dynamic System, Measurement, and Control, Trans. ASME, **93 G**, 157/163 (1971)
- 3) S. G. Tzafestas and J. M. Nightingale: Maximum Likelihood Approach to the Optimal Filtering of Distributed Parameter Systems, Proc. IEE, **116**, 1085/1093 (1969)
- 4) 砂原善文, 大住 晃, 今村真明：非線形分布定数系の状態値推定に対する一手法、計測自動制御学会論文集, 9-4, 446/455 (1973)
- 5) 高橋三起夫, 久村富持：可動操作端をもつ分布定数系の制御, 第 13 回 SICE 学術講演会予稿集 (1974)
- 6) S. S. Prabhu and I. McCausland: Time-Optimal Control of Linear Diffusion Processes Using Galerkin's Method, Proc. IEE, **117-7**, 1398/1404 (1970)
- 7) C. P. Neuman and A. Sen: Weighted Residual Methods in Optimal Control, IEEE, Trans. on Automatic Control, **AC-19-1**, 67/69 (1974)
- 8) 相良節夫, 中谷千歳, 秀島啓治：Galerkin 法による線形分布定数系の状態値推定, 第 16 回自動制御連合講演会前刷 (1973)
- 9) 嘉納秀明：ガレルキン法による熱交換器動特性の近似, 第 13 回 SICE 学術講演会予稿集 (1974)
- 10) 古荘純次, 嘉納秀明：ガレルキン法を使った並流・向流熱交換器の最適調整, 第 13 回 SICE 学術講演会予稿集 (1974)
- 11) 藤川英司, 示村悦二郎：一般化されたむだ時間要素を含む線形系の 2 次評価関数に対する最適制御, 計測自動制御学会論文集, **11-2**, 199/205 (1975)