金属ダイヤフラムの塑性加工の解析

衣 笠 晨 策*

Analysis of Plastic Working of Metal Diaphragm

Shinsaku KINUGASA*

The general technics to analyze the plastic working of the pressure sensing elements were already reported in previous transactions. In this paper the processes and the results of the analysis of the metal diaphragm based on the general technics are reported.

There are several conditions in the press working of the diaphragm. The analysis is easy under the conditions that one or both of the inside or outside edges of the diaphragm are free. The circular elongation $\epsilon_c(r)$ and the radial elongation $\epsilon_r(r)$ are connected with the inclination angle θ of the wave, the inside-to-outside radiuses ratio ρ . The maximum calculated elongation ϵ_{cm} is shown in the graphs.

The problem about the buckling on the outside of the diaphragm is complicated under the condition that the inside edge is fixed and the outside edge is free. The analysis concerning this problem is described.

The method of transformation by means of centrifugal force is adopted in order to solve the non-linear problem under the condition that the both inside and outside edges are fixed. The result of the analysis is clear and elegant.

The experiments to measure the elongation ϵ_c were done. The result of the experiments shows the mixture of the conditions that the edges are fixed and free.

1. はじめに

18-8 系不銹鋼を素材とした同心円波形ダイヤフラムは、差圧伝送器や圧力伝送器の受圧素子としてきわめて広く用いられている。本研究は 18-8 系不銹鋼のダイヤフラムを、プレス加工によって作る場合の加工可能条件を、解析的手法によって求めることを目的とする。一般に平板の素材をダイヤフラムに加工すると、内周部は円周方向に伸び、外周部は圧縮される。

したがって内周部に放射状のき裂、外周部に放射状のしわが発生しやすい。また、素材周辺の拘束条件によっては、円周方向のき裂が発生することもある。

筆者はかつてこの種の事故に遭遇したさい、波形を三角波に近似することにより、ダイヤフラム加工を円錐加工に変換する手法を考案し、これによって素子各部のひずみを算出し、事故を回避することに成功し、その結果を本論文集に発表した¹⁾。

しかしながら、同論文は加工解析における変換の可否に関する基礎的検討には触れておらず、また素材の応力—ひずみ特性についても粘性仮定をおくなど、種々不備な点があった。一方 18-8 不銹鋼を素材として、各種の圧力検出素子を作る場合の、加工解析の基本的な手法については、すでに本論文集に報告した²⁾。

本論文はこの二つの研究を基礎として、ダイヤフラム加工の解析に関する基本理論を固め、未検討のままで残されていた諸問題、すなわち圧縮応力による座屈しわ発生機構の解析を行い、さらに内外周固定条件における非線形問題を、均等遠心力加工への変換手法によって解析し、きわめて簡潔な解をうることができた。また、実際に加工されたダイヤフラムのひずみの実測値と計算値との対比を行い、周辺固定条件の混在が起ることをみいだした。

本研究によって得られた加工可能条件は、ダイヤフラム加工における最も厳しい条件であり、これにより塑性加工を対象としたダイヤフラムの設計基準は確立したといえよう。

2. 加工解析の基本

ダイヤフラムのような複雑な形状の素子を塑性加工する場合の、各部のひずみ量を直接計算することは、ほとんど不可能である。このために加工の分解・変換という手法を導入する。その基本は塑性加工の途中で任意に入りうる過程が可逆的、すなわちエネルギーの消費を伴わないものであるならば、素子各部が受ける塑性ひずみ量は、可逆過程の有無にかかわらず等しいと

* (株)北辰電機製作所 東京都大田区下丸子 3-30-1

* Hokushin Electric Works Ltd., Ota-ku, Tokyo

(Received September 24, 1974)

Fig. 1 Diaphragm is formed from the cone by only bending works

Fig. 2 Maximum calculated circular elongation ε_{cm} (%) under the condition that the outside edge of the diaphragm is fixed and the inside edge is free

いうこと、すなわち加工として等価であるという仮定による²⁾。これによって複雑な加工を概念的に、単純な加圧の組合わせに変換することができる。

Fig. 1 において a に示す円錐台を折り返すと、b のような形を経て c の三角波ダイヤフラムになる。この場合折り返しに何らの加工エネルギーを必要としないならば、ダイヤフラムの加工は、平板の素材から円錐を作る加工と等価になるわけである。

円錐を折り返す途中の過程ではエネルギーの消費があるが、あらかじめ折り返された形で加工が進行するので、三角波ダイヤフラムと円錐とは、加工として等価である。以上の事項を基本として解析を試みる。

3. 内周または外周自由の解

ダイヤフラムの素材としては、円板または環状平板が用いられる。プレスによって波形を成形するのにきき立ち、まず外周を型でおさえつける外周固定加工と、内周をおさえる内周固定加工、さらに内外周自由加工、内外周固定加工などがある。円板を素材とするときは、当然少なくとも内周は固定になる。ただしこれらの固定条件が適度に混合した加工も多く、むしろ大半は混合形である。

これらの固定条件のうち、内外周固定条件以外の場

合には、ダイヤフラム各部のひずみは素材の応力-ひずみ特性に関係しない。その理由は内周または外周の一方または双方が自由であると、素子の半径方向応力が 0 となり、基本式から応力の項が消去されるためである。したがってひずみは形状のみに依存する¹⁾。

内周または外周自由の場合のダイヤフラム各部のひずみを解析する手法については、すでに報告したので¹⁾、ここでは計算過程を省略し、結果だけ示す。

諸元を下記のように定める。

R : ダイヤフラム波形部外周半径

ρR : ダイヤフラム波形部内周半径

ρ : 同上半径比

r : ダイヤフラム波形部任意半径

θ : ダイヤフラム波傾角 (=円錐底角)

ε_c : r における円周方向ひずみ(伸びを正とする)

ε_r : r における半径方向ひずみ(伸びを正とする)

ε_{cm} : 円周方向最大ひずみ

ρ_0 : 中立半径比 ($\varepsilon_c=0$ となる半径での r/R)

1) 外周固定の場合

$$\varepsilon_c = (-2 \log \cos \theta) \left(\sqrt{\frac{R}{r}} - 1 \right) > 0 \quad (3.1)$$

$$\varepsilon_r = (\log \cos \theta) \left(\sqrt{\frac{R}{r}} - 1 \right) < 0 \quad (3.2)$$

$$\varepsilon_{cm} = \varepsilon_{c, r=\rho R} = (-2 \log \cos \theta) \left(\sqrt{\frac{1}{\rho}} - 1 \right) \quad (3.3)$$

材料は主として円周方向に伸び、内周で最大値をとる。したがって内周で放射状のき裂が入りやすい。 ρ , θ の各値に対する ε_{cm} の計算値を Fig. 2 に示す。

2) 内周固定の場合

$$\varepsilon_c = (-2 \log \cos \theta) \left(\sqrt{\frac{\rho R}{r}} - 1 \right) < 0 \quad (3.4)$$

$$\varepsilon_r = (-\log \cos \theta) \left(1 - \sqrt{\frac{\rho R}{r}} \right) > 0 \quad (3.5)$$

$$\varepsilon_{cm} = \varepsilon_{c, r=R} = (-2 \log \cos \theta) (\sqrt{\rho} - 1) \quad (3.6)$$

材料は主として円周方向に圧縮を受け、外周で最大圧縮値をとる。したがって外周で放射状の座屈しわがでるが、座屈問題は後述する。 ρ , θ の各値に対する ε_{cm} の計算値を Fig. 3 に示す。

3) 内外周自由の場合

$$\varepsilon_c = (-2 \log \cos \theta) \left(\sqrt{\frac{\rho_0 R}{r}} - 1 \right) \quad (3.7)$$

$$\varepsilon_r = (\log \cos \theta) \left(\sqrt{\frac{\rho_0 R}{r}} - 1 \right) \quad (3.8)$$

$$\sqrt{\rho_0} = \frac{1-\rho}{2(1-\sqrt{\rho})} \quad (3.9)$$

4. 内周固定の場合の座屈しわ

厚さ h なる板が $-\sigma$ なる一方向応力のもとで起す座屈を考える。座標を x , 板の撓みを ξ とすると,

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} + \frac{12\sigma}{Eh^2}\xi = 0 \quad (4.1)$$

$$\therefore \xi = a \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) + b \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

ただし a, b は定数, E はヤング率, λ はしわの波長で

$$\lambda = 2\pi h \sqrt{\frac{E}{12\sigma}} \quad (4.2)$$

Fig. 4 の a は材料が型の波形部に接触しはじめた状態で, このときの型のすきまを η_0 とする。 b は型が $\eta_0 - \eta$ だけ動き, すきまが η に減少した状態である。ここで,

l : 波形の半径方向の半波長

ϕ : 加工中の波形角度

θ : 加工終了時の波形角度

とすると, $\tan \theta = \eta_0/l$, $\tan \phi = (\eta_0 - \eta)/l$ から

$$\frac{\eta_0 - \eta}{\eta_0} = \frac{\tan \phi}{\tan \theta} = \frac{\phi}{\theta}$$

$$\therefore \eta = \frac{\theta - \phi}{\theta} \eta_0 \quad (4.3)$$

Fig. 5 はダイヤフラム外周の円を直線に展開したもので, 外周長 $2\pi R$ の区間内で, 型のすきま η に対して, 板が座屈していく過程を示す。圧縮応力 $-\sigma$ は外周において最大値をとり, 座屈に対しては外周が支配的な影響をもつので, 1次元問題として扱う。板は **Fig. 5** の a から $b, c, \dots e$ と波数を増す。 ξ に関する解の基本形を

$$\xi = b \sin \frac{2\pi}{\lambda} x$$

とすると, 振幅 b は $\eta/2$ を超えられないから, 近似的に,

$$b = \frac{\eta}{2}$$

また, 座屈しわにそった真の伸び ε_t は

$$\varepsilon_t = \frac{2}{\pi} E(k^2) \sqrt{1 + \left(\frac{4\pi b}{\lambda}\right)^2} - 1 + \varepsilon_{cm} < 0$$

ここに $E(k^2)$ は第 2 種完全だ円積分で

$$k^2 = \frac{4\pi^2 b^2}{\lambda^2 + 4\pi^2 b^2} \quad (4.4)$$

ここで新しい未知数として

$$X = \frac{4\pi b}{\lambda} = \frac{2\pi \eta}{\lambda} \quad (4.5)$$

とおくと,

$$\varepsilon_t = \frac{2}{\pi} E\left\{\frac{X^2}{1+X^2}\right\} \sqrt{1+X^2} - 1 + \varepsilon_{cm}$$

となる。さらに X の関数として

$$F(X) = \frac{2}{\pi} E\left\{\frac{X^2}{1+X^2}\right\} \sqrt{1+X^2} - 1 \quad (4.6)$$

とおくと, X に関するつぎの方程式を得る。

$$\frac{E}{12} \left\{ \frac{\theta h X}{\eta_0 (\theta - \phi)} \right\}^2 = -\sigma \{ F(X) - 2(\sqrt{\rho} - 1) \log \cos \phi \} \quad (4.7)$$

上式の $\sigma\{\}$ はかつて内のひずみに対する応力を表わし, 材料の $\sigma-\varepsilon$ 特性に従う。**Table 1** は X に対する $F(X)$ の計算値を示す。この値および 18-8 不銹鋼の標準 $\sigma-\varepsilon$ 特性から, (4.7) 式が解ける。

一例として, $\theta = 30^\circ$, $\rho = 0.6$, $\eta_0 = 4 \text{ mm}$, $h = 0.05 \text{ mm}$

Fig. 3
Maximum circular elongation ε_{cm} under the condition that the inside edge is fixed and the outside edge is free

Fig. 4 Clearance of the dies under the condition that the inside edge is fixed and the outside edge is free

Fig. 5
Process of the growing-up of the wrinkles

Table 1 Calculated value of $F(X)$

X	$F(X)$	X	$F(X)$	X	$F(X)$
0	0				
0.1005	0.00254	0.3692	0.03329	1.2	0.2967
1429	507	4035	3954	1.4	3844
1759	766	4364	4601	1.6	4762
2041	0.01036	4685	5279	1.8	5744
2294	1305	5000	5982	2.0	6783
2526	1580	5774	7877	2.2	7815
2744	1854	6547	9981	2.4	8903
2949	2140	7338	0.12340	2.6	1.0004
3145	2426	8165	15013	2.8	1.1105
3333	2725	1.0	21630	3.0	1.2246

Table 2 Example of the calculation about the buckling on the outside of the diaphragm

ϕ (°)	η (mm)	X	λ (mm)	$-\sigma$ (MPa)	inclination of the wrinkle (°)
0	4	0	∞	0	0
15	2	0.25	50.27	0.65	7.12
20	1.33	0.34	24.58	2.72	9.65
25	0.667	0.42	9.98	16.52	11.86
28	0.267	0.47	3.57	129.1	13.22
29	0.133	0.44	1.899	456.1	12.40
29.5	0.0667	0.32	1.309	960	9.01
30	0	0	—	1000*	0

* 1000 MPa=100 kgf/mm²

の場合の数値解を Table 2 に示す。表中の右端は、しわの山の傾角を示す。この例では傾角は比較的小さく、しわの山が倒れることはなく、最後は型に押されて平坦になることがわかる。

上記の数値解はかなり面倒であるが、さいわい板は圧延により面方向に伸びを受けているから、圧縮に対しては弾性限が低く、

$$\sigma = K\varepsilon$$

なる近似が許される。ここに K は加工硬化係数である。18-8 不銹鋼の場合、 $E/K=8$ であるから、

$$X = \sqrt{\frac{75(\sqrt{\rho}-1) \log \cos \phi}{9 + 25 \left\{ \frac{\theta h}{\eta_0(\theta - \phi)} \right\}^2}} \quad (4.8)$$

X は ϕ が 0、 θ で 0 となり、その中間で最大値をとる。 $X_{\max}$ を与える ϕ はつぎの方程式の根である。

$$(\theta - \phi)^3 + 2 \left(\frac{50h}{3\eta_0} \right)^2 (\theta - \phi) - \theta \left(\frac{50h}{3\eta_0} \right)^2 = 0 \quad (4.9)$$

上式はただ一つの実根をもち、(4.8)式によって $X_{\max}$ を求めれば、しわの最大傾角は、 $\tan^{-1}(X_{\max}/2)$ として得られる。およその目安として、これが 30°、最高

でも 45° を超えないように設計すべきであろう。

5. 内外周固定の非線形解

内外周固定の場合の線形近似解については、すでに報告した¹⁾。しかしこれは計算の面倒なわりには近似精度も低く、ことに省略算によるときは、 ρ が小さいほど ε_{rm} が減少するという不合理な結果がでる。本稿では均等遠心力加工に変換する手法を報告する。

Fig. 6 は内外周固定の場合の円錐台加工過程を示す。 x は素材、 y は円錐台である。このとき、 $x \rightarrow y$ なる加工を行う代わりに、素材の内周を固定して外周に均等遠心力をかけ、外半径 R' なる環状板 z を作る。これを内周固定条件で円錐台に仕上げ、外周が R になるように R' を定めれば、 $z \rightarrow y$ の加工は容易に計算できるから、 $x \rightarrow z$ なる加工がわかれば、解析はできたことになる。

さて $z \rightarrow y$ なる加工の条件から、

$$R' = R \{1 - 2(1 - \sqrt{\rho}) \log \cos \theta\} \quad (5.1)$$

つぎに $x \rightarrow z$ の過程で、外周にかかる遠心力を、中心角 $d\phi$ あたり $Fd\phi$ とすると、Fig. 7 に示す斜線部の外半径が R から R' になり、角度 $d\phi$ が不変という条件から、つぎの方程式が誘導される。ただし c は積分常数であり、(5.3)式の初期条件で定められる。

$$r = c \exp \left\{ -\frac{4}{3} \int \frac{\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \sigma \left\{ \frac{4}{3} \varepsilon_r \right\}}{\sigma \left\{ \frac{4}{3} \varepsilon_r \right\}} d\varepsilon_r \right\} \quad (5.2)$$

$$\int_{\rho R}^R \varepsilon_r dr = -2R(1 - \sqrt{\rho}) \log \cos \theta \quad (5.3)$$

最終的な解はこれに $z \rightarrow y$ なる加工の解を加えて得られるが、内周固定における内周付近での ε_r は小さく、後述するように内外周固定においては、内周付近での ε_r が圧倒的に大きいので無視してよい。また、 ε_e も内外周固定では微小なので、結局(5.2)、(5.3)式の解が、そのまま内外周固定の解となる。

演算過程はかなり面倒なので、要点だけ述べる。 ε_r は正(引張)だけであり、弾性区間、加工硬化区間、塑性流動区間の3区間に応じて、積分を行い、 c を決

Fig. 6
Breakdown
of the
working
under the
condition
that the
both of
inside and
outside
edges are
fixed

Fig. 7
Working
of the fan
part of the
material by
means of
centrifugal
force $Fd\phi$

定すればよい。その場合積分区間に塑性流動区間が含まれると、 ϵ_r が発散してしまう。これは具体的には r が最小の点、すなわち内周において、伸びが無限に大きくなり、破壊にいたることを意味する。したがって解は加工可能条件という形で与えられる。塑性流動区間が含まれないためには、積分常数 c に関して、

$$\begin{aligned} c \left(\frac{E}{K} - 1 \right) \log \frac{c}{\epsilon_e} - c \left(\frac{E}{K} \log \rho + \frac{E}{K} - 1 \right) \\ + \left(\frac{E}{K} - 1 \right) \epsilon_e \rho \\ = -2(1 - \sqrt{\rho}) \log \cos \theta \end{aligned} \quad (5.4)$$

が、 $c > 0$ の範囲で c について根をもち、かつ

$$\frac{E}{K} \frac{c}{\rho} < \epsilon_y + \left(\frac{E}{K} - 1 \right) \epsilon_e \quad (5.5)$$

でなければならない。ここに ϵ_e, ϵ_y は弾性限、降伏点に应ずる伸びである。18-8 不銹鋼の標準 σ - ϵ 特性に基づく加工可能条件は、次式で与えられる。

$$-\log \cos \theta < \frac{\rho}{2(1 - \sqrt{\rho})} (5.62 - 3 \log \rho) \times 10^{-2} \quad (5.6)$$

θ の各値に対する ρ の加工可能条件の計算値をFig. 8に示す。加工可能範囲内では、 $\epsilon_e \doteq 0$ であり、

ϵ_r は内周において最大値 ϵ_{rm} をとる。(5.6)式から計算した $\epsilon_{rm}, \rho, \theta$ の関係をTable 3に示す。以上のように正攻法では手のつけようがなかった内外周固定の非線形解が、加工過程の分解、変換という手法により、省略算を含みながらも解析できたわけである。

ダイヤフラムの加工解析については、上記のほか、外周フランジ部の影響、型と材料の摩擦の問題など論ずべきことは多々あるが、これは問題の性格上簡潔な解は得られず、定性的傾向として認識するにとどまった。また、前述したように、周辺固定条件の混在、すなわち固定したはずのものが滑ることによって起る問題については、つぎの実験例によって報告する。

6. 伸びの実験例

以上の解析が実際のダイヤフラムにあてはまるかどうかを確認するため、2~3の実験を行ったが、そのなかから、内外周固定の例を報告する。実験の方法は素材としての環状平板上に、直径にそっていくつかの点を打刻し、プレス加工後点間隔を測長機で測り、素材の点間距離と比較する方法をとった。すなわちピンが二つついた打点工具を、ピン間隔に応じて多数作り、数枚の素材に同時に打点し、2枚は素材のまま残し、加工品と比較できるようにした。したがって原則として、打刻や温度による測長誤差は消去される。

各点における ϵ_r を測るために、幅1mmの平行線を刻印する工具も作り、同様に準備し加工後測定した。ただこの平行線方式は、線の幅が20~30 μ mもあり、1%前後の ϵ_r を測るには精度的に不足であった。

Fig. 9に打点間隔による ϵ_e 実測値の一例を示す。圧延方向に対する伸びと、直角方向では多少の差がみられる。なお平行線刻印による ϵ_r の実測データは、ばらつきがはなはだしく、有意性が認められなかったので省略する。Fig. 10はいくつかのサンプルの平均

Table 3 Maximum calculated radial elongation $\epsilon_{r\max}^c$ under the condition that the inside and outside edges are fixed

$\epsilon_{r\max}$ (%)	ρ	$\theta(^{\circ})$							
		0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2
2.25		56.3	39.9	31.4	25.7	21.4	17.9	14.6	11.5
2		51.8	36.7	28.9	23.7	19.8	16.5	13.6	10.7
1.75		50.0	35.3	27.8	22.8	19.0	15.9	13.1	10.3
1.5		48.2	33.9	26.6	21.9	18.3	15.3	12.6	9.9
1.25		46.3	32.4	25.5	20.9	17.5	14.6	12.0	9.5
1		44.3	31.0	24.3	20.0	16.7	13.9	11.5	9.0
0.75		42.2	29.4	23.7	19.0	15.8	13.2	10.9	8.6
0.5		40.1	28.0	21.9	17.9	15.0	12.5	10.3	8.1
0.25		38.0	26.3	20.6	16.9	14.1	11.8	9.7	7.7

値としての ϵ_c の実測値と、 $\theta=0\sim10^{\circ}$ まで内外周自由で、以後内外周固定加工が行われたとしたときの計算値を示す。

このダイヤフラムは、設計上からはまず内外周が直角近く折り曲げられ、それから波形加工が始まる形になっている。しかし現実には両周の固定が不完全で、 $\theta=10^{\circ}$ までは滑り込みが起るものと思われる。そして最終的には $\theta=16^{\circ}$ まで加工される。

7. おわりに

金属ダイヤフラムの塑性加工問題について、概略を報告した。紙数の関係もあって、内外周固定の場合の非線形解については、式の誘導を大幅に省略したため、18-8 不銹鋼以外の材料についてまで適用可能な計算手法は、割愛せざるをえなかった。

一般に塑性加工の解析は、複雑な非線形問題に帰着する。したがって与えられた条件のもとで、計算機などによって数値解を求めることは不可能ではない。しかし圧力検出素子を設計する段階で、加工の可否まで含めて条件を設定するためには、設計段階にフィードバックできる簡潔な数式解を求めねばならない。そのような意味で、本研究が今後の圧力検出素子設計の基準として、活用されることを期待する。

最後に本研究の推進にあたり、終始ご懇切なご指導をいただいた東京大学名誉教授、磯部孝先生はじめ、諸先生に深甚の謝意を表する次第である。

参考文献

- 1) 衣笠：金属ダイヤフラムの成形特性の解析，計測自動制御学会論文集，1-4，349/354 (1965)
- 2) 衣笠：圧力検出素子の塑性加工の解析，計測自動制御学会論文集，11-6，702/708 (1975)

Fig. 9 Measured value of circular elongation ϵ_c according to the experiment

Fig. 10 Comparison of measured value and calculated value.