離散値制御システムの制御可能性[†]

宮 道 寿 一*・深 尾 毅*

On Reachability of Quantized Control System

Juichi MIYAMICHI* and Takeshi FUKAO*

Systems whose control inputs are restricted to discrete values are called quantized control systems. Discrete control is usually found in various fields, for example, in socio-economical systems, in ecological systems and in the control problems by digital computers.

Even if a given system is controllable by continuous level controls (an arbitrary small input value is available) it can not be expected that the system is controllable by quantized control inputs. "To what extent can we control the system?" is a fundamental question in quantized control systems.

In this paper, the system structure and reachability of quantized control systems are studied. The systems under discussion here are linear, constant and discrete-time dynamical systems over the field of real numbers whose control inputs are restricted to the integer vectors:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

where $x(k) \in R^n$, $u(k) \in Z^m$ and A and B are real matrices.

Since the cardinality of the set of reachable states is at most countably infinite, the best situation for reachability of the system is that the set of reachable states is dense in the state space R^n , in which case the system is called to be "almost reachable."

The main results are as follows.

(1) The state space is a direct sum of two subspaces: the "almost reachable subspace" in which the reachable states are dense and the "discretely reachable subspace" in which the reachable states are isolated points. The almost reachable subspace is A -invariant.

(2) The "almost reachability" of a system is closely related to the integral properties of the eigenvalues of A .

(3) When A and B are matrices over the field of rational numbers, the "almost reachability" is dominated only by the eigenvalues.

(4) In the general case when A and B are real matrices, the "almost reachability" is influenced also by the input matrix B . However, the almost reachability can be examined through finite procedure.

1. はじめに

制御入力の大さが最小単位をもつようなシステム(離散値制御システム)は広範囲に存在し重要なシステムである。個体数を取扱う生態系システム、交通、物流、生産を扱う社会経済システムはその代表的な例であり、ディジタル計算機による制御問題もこの範囲に入る。

離散値制御システムに対しては、従来の連続量による制御の場合より詳細な考察が必要とされる。たとえばあるシステムが連続的な制御入力で(いくらでも小さい量が制御入力として許される場合に)可制御であっても、システムへの入力が離散的な値しか取り得ない場合、システムがそのまま可制御であることは一般に期待できない。どの程度までシステムの制御が可能かは重要な問題である。

離散値制御に関するこれまでの結果の多くは、ダイナミックプログラミングの手法を用いた最適制御則を求める問題であり^{6)~8)}、システムの離散値制御についての構造あるいは可制御性、可到達性といった性質についての議論は、筆者の知るところ文献 1) だけのようと思われる。本論文は文献 1) で、特別な形をしたシステムに対して取扱われた問題を、一般的なシステムの場合に拡張したものともみることができる。

本論文では離散値制御の最も簡単なモデルとして、実数体上(注1)の定係数、離散時間、線形システムを整

[†] 第19回日本自動制御協会学術講演会で発表(昭50・5)

* 東京工業大学工学部 東京都目黒区大岡山 2-12-1

* Faculty of Engineering, Tokyo Institute of Technology, Meguro-ku, Tokyo

(Received March 20, 1975)

(注1) システムを表現する行列 A, B の要素が実数(有理数、整数)である場合、そのシステムを実数体(有理数体、整数環)上のシステムと呼ぶ。

数値入力で制御することを考え、システムの特性と制御可能性の関係を調べた。整数値制御システムの可到達状態の集合はたかだか可算の濃度しかもたないから、従来の可到達性の概念は意味を失ない、代わりに“ほとんど可到達”であるという概念が必要となる¹⁾。すなわち任意の精度である状態を近似できる場合、その状態は“ほとんど可到達”な状態といわれる。

整数値制御システムにおける可到達状態の分布の様子は、システムの固有値と深い関係にある。制御という立場からはシステムが“ほとんど可到達”か否かは基本的な問題であり、本論文はこの性質と、システムの固有値との関係を考察したものである。

2. 準備

この節に用語、記号、数学的事実をまとめておく。

整数全体の集合を $\mathbf{Z}$ 、有理数体を $\mathbf{Q}$ 、実数体を $\mathbf{R}$ で表わす。 K を $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ のいずれかとし、 K -係数の 1 変数多項式全体の作る環を $K[X]$ で表わす。最高次係数が 1 である多項式をモニック多項式、 $\mathbf{Z}[X]$ のモニック多項式の根を代数的整数と呼ぶ。

[補題 1]⁵⁾ $\mathbf{Z}[X]$ に属するモニック多項式 $f(X)$ が $\mathbf{Q}[X]$ に属するモニック多項式 $g(X), h(X)$ の積に分解されたとする。 $f(X)=g(X) \cdot h(X)$ 。このとき $g(X), h(X)$ は $\mathbf{Z}[X]$ に属する。

n 次元実ベクトル空間 $\mathbf{R}^n$ の部分集合 S から生成される K -部分加群とは、 S の要素の K 係数線形結合全体のことである。線形独立性はその作用域に依存するため、常に作用域を明示して、 $\mathbf{Q}$ -線形独立、 $\mathbf{R}$ -線形独立などの語を用いる。二つの数 1 と $\sqrt{2}$ は $\mathbf{R}$ -線形従属であるが $\mathbf{Q}$ -線形独立である。加群 H の生成元の数が有限である場合、 H は有限生成、そうでないとき無限生成といわれる。実数体 $\mathbf{R}$ は $\mathbf{R}$ -加群としては有限生成であるが、 $\mathbf{Q}$ -加群としては無限生成である。有限生成 $\mathbf{Z}$ -加群に関するつぎの事実に注意する。

[補題 2]⁵⁾ 有限生成 $\mathbf{Z}$ -加群は有限次元の自由加群と束縛加群の直和になる。

(注意) 基底をもつ加群を自由加群と呼び、基底の要素数が有限のとき有限次元という。 $\mathbf{Z}$ -加群 M の元 x が束縛元であるとは、整数 $\alpha \neq 0$ が存在して、 $\alpha x = 0$ となる場合をいう。束縛元のみからなる加群を束縛加群という⁵⁾。

$\mathbf{R}^n$ の点 $x=(x_1, \dots, x_n)'$ に対して、そのノルムを $\|x\|=(x_1^2+\dots+x_n^2)^{1/2}$ で、また行列 A のノルムを $\|A\|=\max_{\|x\|=1} \|Ax\|$ で定義する。

以下の議論では、このノルムのきめ方は本質的ではなく、これと位相的に同値なノルムであれば何を使って

もよい。 $\mathbf{R}^n$ はこのノルムによって自然な位相空間となる。集積点、閉包、孤立点などの言葉は通常の意味で用いられる。つぎの二つの補題は本論文では基本的である。

[補題 3] (有限生成 $\mathbf{Z}$ -加群の集積性) $\mathbf{R}^n$ の l 個の点 $x_1, \dots, x_l$ が $\mathbf{Q}$ -線形独立かつ $\mathbf{R}$ -線形従属とする。このとき $x_1, \dots, x_l$ で生成される $\mathbf{R}^n$ の $\mathbf{Z}$ -部分加群 H は集積点をもつ。

(証明) $x_1, \dots, x_s$ が $\mathbf{R}$ -線形独立、残りはこれらに $\mathbf{R}$ -線形従属とする。 Σ で $i=1$ から $i=s$ までの和を表わそう。原点を中心として、ベクトル $\{x_i\}$, $i=1, \dots, s$ の上に作られた閉平行体を P とする。 $P=\{x|x=\Sigma u_i x_i, |u_i| \leq 1\}$ 。 x_{s+1} は x_i の実係数の線形結合 $\Sigma t_i x_i$ で表わされる。整数 m に対して点 $z_m = mx_{s+1} - \Sigma [mt_i] x_i$ (注 2) は H の要素であって P に入っている。 $m \neq n$ に対して $z_m \neq z_n$ であれば、 P の有界性により集積点の存在が結論される。 $z_m = z_n$ として、 $(m-n)x_{s+1} = \Sigma ([nt_i] - [mt_i]) x_i$ 。各係数は整数であるから、 $\mathbf{Q}$ -線形独立の仮定より $m=n$ 。

(証明終)

[補題 4] (無限生成 $\mathbf{Z}$ -加群の集積性) $\mathbf{R}^n$ の無限生成 $\mathbf{Z}$ -部分加群 H は集積点をもつ。

(証明) 補題 3 と同様。

(証明終)

(注意) 補題 3 および 4 ではさらに強く、原点が集積点の一つ (したがって H に属する任意の点が集積点) になることがいえる。すなわち上のことから任意の正数 ε に対して、 H の要素 x, y が存在して $\|x-y\| < \varepsilon$ となるが、 $x-y$ は再び H の要素であるから。

3. 整数値制御システム

本論文の対象は、次式で表現される実数体上の定係数、線形、離散時間システムで、制御入力 that 整数ベクトルに制限されたものである。

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (1)$$

ここに $k \in \mathbf{Z}$, $x(k) \in \mathbf{R}^n$, $u(k) \in \mathbf{Z}^m$, $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbf{R}^{n \times m}$ 。システムへの制御入力 that 等間隔で量子化されている場合には、常にこのような形で表現できることに注意されたい。(1) 式で表現されるシステムを $\Sigma = (A, B)$ で表わす。本論文を通して、対象とするシステムは実数値入力に対して可到達であるとする。すなわち、

$$\text{rank}_{\mathbf{R}} [B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n \quad (2)$$

状態 0 から t -ステップで到達可能な状態の集合を M_t で、その和集合 (到達可能な状態の集合) を M_∞ で表わす。

(注 2) $[\]$ はガウス記号。

$$M_t = \left\{ x \in \mathbf{R}^n \mid x u(\tau) \in \mathbf{Z}^n, \tau = 0, \dots, t-1 \right\}$$

$$x = \sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-1-\tau} B u(\tau)$$

$$M_\infty = \bigcup_{t \geq 1} M_t$$

整数値制御システムの可到達状態の集合 M_∞ は (一般に無限生成の) $\mathbf{Z}$ -加群となる。この集合は可算の濃度しかもたないから、システムは通常の意味では可到達になりえない。つぎの定義を導入する¹⁾。

【定義 5】 状態 $x \in \mathbf{R}^n$ が “ほとんど可到達” である (almost reachable) とは、その任意の近傍の中に少なくとも一つ可到達な状態が存在する場合をいう。システムが “ほとんど可到達” であるとは、そのすべての状態が “ほとんど可到達” である場合をいう。

(注意) $\bar{M}_\infty$ (M_∞ の閉包) に属する状態が “ほとんど可到達” な状態であり、 $\bar{M}_\infty = \mathbf{R}^n$ の場合、システムは “ほとんど可到達” である。

【例 6】 固有値 1 および 2/3 をもつつぎのシステムの可到達状態の集合 M_∞ は $y = -x$ に平行な直線群の上で稠密であり、直線 $y = -x$ は $\bar{M}_\infty$ に含まれる最大部分空間 ($\mathbf{R}$ -部分空間) である (Fig. 1 参照)。

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} (k+1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} (k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

4. 整数値制御システムの構造

まず、可到達状態の集合 M_∞ の閉包 $\bar{M}_\infty$ を考える。容易にわかる通り、 $\bar{M}_\infty$ も $\mathbf{Z}$ -加群の構造をもつ。すなわち $\bar{M}_\infty$ は $\mathbf{R}^n$ の閉部分加群である。 $\mathbf{R}^n$ の閉部分加群の構造はよく調べられているが²⁾、その結果を、本論文の言葉で述べればつぎのようになる。 $\bar{M}_\infty$ は $\mathbf{R}^n$ の中で、互いに等間隔に並んだ可算無限個 ($\bar{M}_\infty = \mathbf{R}^n$ の場合を除いて) の線形多様体の合併であり、その原点を含む連結成分は $\bar{M}_\infty$ に含まれる最大の部分線

Fig. 1
 M_∞ of the
quantized
control
system
of the
example 6

形空間 ($\mathbf{R}$ -線形空間) である。この部分線形空間を X_D で表わす (Fig. 1 参照)。

【補題 7】 $\bar{M}_\infty$ は互いに平行に、等間隔に並んだ線形多様体の合併であり、その原点を含む成分は A -不変部分空間である。

(証明) 最後の A -不変の部分だけ示せばよい。ある (非常に小さい) 正数 d に対して、半径 d の閉球 $B_d = \{x \mid \|x\| \leq d\}$ と M_∞ の共通部分は X_D に含まれる。 $B_d \cap M_\infty \subset X_D$ 。一方ノルム不等式 $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$ に注意すると、原点に十分近い点 ($\|x\| < d/\|A\|$) は変換 A によって B_d の中に写されることがわかる。特に、 $X_D \cap M_\infty$ の要素で原点に十分近い点は A によって再び $X_D \cap M_\infty$ の中に写される。 $X_D \cap M_\infty$ は X_D の中で稠密であるから、 $X_D \cap M_\infty$ の要素 $x_1, \dots, x_l$ (可到達状態) で X_D の基底を構成し、かつ $\|x_i\| < d/\|A\|$ を満足するものが存在する。 (証明終)

X_D の基底を拡張して状態空間全体の基底とすれば (すなわち空間 X_D が状態空間の直和因子になるような基底の取り方をすると) その基底に関するシステムの式はつぎのようになる。

$$\begin{bmatrix} x_L \\ x_D \end{bmatrix} (k+1) = \begin{bmatrix} A_L & 0 \\ * & A_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_L \\ x_D \end{bmatrix} (k) + \begin{bmatrix} B_L \\ B_D \end{bmatrix} u(k) \quad (3)$$

全体のシステムが実数値入力に対して可到達であるから、部分システム $\Sigma_L = (A_L, B_L)$ も実数値入力に対して可到達である。 Σ_L の整数値入力に対する可到達状態の集合は孤立点だけからなる。以後 x_L の部分を “離散部分空間”， x_D の部分を “ほとんど可到達な部分空間” と呼ぶことにする。

【例 6 の続き】 例 6 のシステムを、直線 $y = -x$ が第 2 座標軸になるように T で座標変換すると、つぎのようになる。

$$T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x^*(k+1) = A^* x(k) + B^* u(k)$$

$$A^* = T A T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2/3 \end{bmatrix}, \quad B^* = T B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

システムを “離散部分空間” に制限した部分システム $\Sigma = (1, 1)$ は整数環上のシステムで、その可到達状態は $\mathbf{R}$ 中の $\mathbf{Z}$ -部分加群 $\mathbf{Z}$ である (定理 9 参照のこと)。 A^* の表示からもわかる通り、直線 $y = -x$ は A -不変であり、さらに 2/3 のベキ乗の効果により可到達状態はその上で稠密。 (例 6 終)

可到達状態の集合 M_∞ の集積性とシステム行列 A の固有値の間には密接な関係があるが、その中でつぎの

ものは基本的である(1入力かつシステム行列が対角化可能な場合を安西¹⁾が証明している)。

【補題8】システム行列 A が代数的整数でない固有値をもてば、任意の $x \in M_\infty$ は M_∞ 内の集積点である。

(証明) M_∞ が無限生成の $\mathbf{Z}$ -加群であることを示せば、補題4を用いることができる。 λ を代数的整数でない A の固有値とし、 λ の $\mathbf{R}[X]$ における最小多項式(λ を根とする $\mathbf{R}[X]$ の既約多項式)を $f(X)$ とする。入力行列 B を構成する列ベクトルを $b_1, \dots, b_m$ とし、 $g_i(X)$ で A を b_i で生成される $\mathbf{R}$ -部分空間に制限したものの最小多項式($g_i(A)b_i=0$ なる $\mathbf{R}[X]$ の既約多項式)を表わす。システムは $\mathbf{R}$ -入力に対して可到達であるから、少なくとも一つの i に対して g_i は f で割りきれれる。 $f|g_i$ としよう。 g_i は $\mathbf{Z}[X]$ のモニック多項式の因数になり得ないから、部分システム $\Sigma_1=(A, b_1)$ の可到達状態の集合(システムへの入力を第1端子だけになった場合の可到達状態の集合)は無限生成の $\mathbf{Z}$ -加群である。(証明終)

【系1】(3)式において行列 A_L の固有値はすべて代数的整数である。

【系2】システム行列 A の固有値に代数的整数が含まれないならば、システムは“ほとんど可到達”である。

つぎに“離散部分空間”の構造、すなわち M_∞ が孤立点だけからなるシステムの構造について考察する。

《定理9》(1)式で表現されるシステムの整数値入力に対する可到達状態の集合 M_∞ が孤立点だけからなるとする。このとき適当な座標変換 T (実数体上の正則行列)によって A, B は $\mathbf{Z}$ 上の行列となる。

$$TAT^{-1} \in \mathbf{Z}^{n \times n}, TB \in \mathbf{Z}^{n \times m}$$

(証明) M_∞ が孤立点だけからなるという仮定および補題8により、 A の固有値はすべて代数的整数、したがってあるモニック多項式 $f(X) \in \mathbf{Z}[X]$ に対して、 $f(A)=0$ となる。すなわち M_∞ は有限生成の $\mathbf{Z}$ -加群である。 M_∞ は明らかに束縛部分をもたないから、補題2により、 M_∞ は有限次元の $\mathbf{Z}$ -自由加群となる。 $M_\infty \cong \mathbf{Z}^l$ 。システムは実数入力に対して可到達であるから $l \geq n$ 。 $l \geq n$ とすると補題3により M_∞ は集積点をもつことになるから $l=n$ 。結局 $M_\infty \cong \mathbf{Z}^n$ 。この基底に関するシステム行列、入力行列は $\mathbf{Z}$ 上の行列となる。(証明終)

(注意) 補題2(単因子定理)を行列の形で用いれば、与えられたシステムを実際に、整数上のシステムに変換できる。整数上のシステムについては文献3)参照。

(注意) “ほとんど可到達な部分空間”をもつ一般のシステムの表現式(3)において、 A_L, B_L が $\mathbf{Z}$ 上の行列になるようにすることができる。

【系1】システム行列 A の特性多項式が $\mathbf{Z}[X]$ のモニック多項式を因数として含まないならば、システムは“ほとんど可到達”である。

【系2】 A の固有値が非零でその絶対値がすべて1未満ならば、システムは“ほとんど可到達”である。

(注意) 系の1はシステム行列の固有値に代数的整数が含まれていても、それがすべての共役要素と同時に現われないかぎり、システムの制御に対して不都合をおこさないことを示している。代数的整数で実数であるものは通常の整数を除いて無理数になるという事実がこの本質である。

5. 有理数体上のシステム

A が有理数体上の行列の場合、 A の固有値 λ が代数的整数であれば、 λ に共役な代数的整数(λ の満足する $\mathbf{Z}$ -係数の最低次モニック多項式の根)がすべて A の固有値になる。このため有理数体上のシステムに対してはきれいな結果が得られる。

【補題10】 A を有理数体上の行列とする。このときつぎの条件は互いに同値である。

(i) A の固有値はすべて代数的整数。

(ii) A は整数上の行列に相似。

(証明) (ii) $\Rightarrow$ (i) 明らか。

(i) $\Rightarrow$ (ii) A の固有値はすべて代数的整数であるから A の特性多項式 $\phi_A(X)$ は $\mathbf{Z}[X]$ のあるモニック多項式 $P(X)$ の因数である。 ϕ_A が $\mathbf{Q}[X]$ に属するモニック多項式であることに注意すれば、補題1により ϕ_A は $\mathbf{Z}[X]$ のモニック多項式となる($P=\phi_A \cdot h$ なる因数 $h(X)$ が $\mathbf{Q}[X]$ に属することは、 P を ϕ_A で割る計算が有理数体内で実行できることによる)。行列 A の有理数体上の行列としての単因子を $d_1(X), \dots, d_n(X)$ とすると、各単因子は $\mathbf{Q}[X]$ に属するモニック多項式で、しかも $d_1 \cdots d_n = \phi_A \in \mathbf{Z}[X]$ 。補題1により $d_i \in \mathbf{Z}[X]$ 。したがって A は $\mathbf{Z}$ 上の行列に相似である。(証明終)

《定理11》(1)式のシステムにおいて A, B がともに $\mathbf{Q}$ 上の行列であるとする。このとき A の固有値がすべて代数的整数ならば、 M_∞ は孤立点のみからなる。

(証明) 補題10により適当な $\mathbf{Q}$ 上の正則行列 T による座標変換によって、 A は整数環上の行列に、 B は有理数体上の行列に書きかえられる。(証明終)

(注意) 定理11の場合 M_∞ は有限生成の $\mathbf{Z}$ -自由加群で、その次元は n である。 M_∞ の基底に関するシステ

ムの表現を考えれば、 A, B は整数環上の行列となる。

《定理12》 有理数体上のシステム(1)が“ほとんど可到達”であるための必要十分条件は、 A の固有値に代数的整数が含まれないことである。

(証明) 十分性は補題 8, 系 2

必要性: A の固有値に代数的整数が含まれれば、行列 A は代数的整数だけを固有値とする行列 A_1 と代数的整数を固有値として含まない行列 A_2 の直和の形に (Q 上の正則行列によって) 変換される。 A_1 に対応する部分空間は前定理により離散部分空間である。したがって全体のシステムの可到達状態の集合も、 R^n の中で稠密になることはできない。 (証明終)

本節の議論では、有理数体上のシステムということが本質的である。 A の固有値 λ が代数的整数であるとき、その共役要素がすべて A の固有値になるという都合のよい性質は、実数体上のシステムでは成立しない。代数的整数が単独で固有値になる可能性があるためである。安西¹⁾によるつぎの例はこのことを示している。

$$x(k+1) = \sqrt{2}x(k) + u(k) \quad u(k) \in Z$$

有理数体上のシステムでは M_∞ の集積性はシステム行列の固有値だけに依存するからシステムの構造も、固有値だけできまる。たとえば、 A の固有値のうち代数的整数が重複もこめて n_1 個、そうでないものが n_2 個 ($n_1 + n_2 = n$) とすると、状態空間の“離散部分空間”の R -次元は n_1 であり、“ほとんど可到達な部分空間”の R -次元は n_2 である。

6. 実数体上のシステム

——ほとんど可到達か否かの判定——

R 上のシステムでは、前節の Q 上のシステムと異なり、システムが“ほとんど可到達”か否かに対して、入力行列の影響が大きく単にシステム行列の性質だけを論ずるわけにはいかない。本節ではシステムが“ほとんど可到達”か否かを判定する方法について考察する。まず古典位相群におけるクロネッカの結果を、ここに適した形に拡張することが必要である。

【補題13】 (クロネッカの近似定理)²⁾ H を R^n の自然な基 $e_1 = (1, 0, \dots, 0)'$, $\dots$, $e_n = (0, \dots, 1)'$ と $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ から生成される R^n の Z -部分加群とする。このとき H が R^n で稠密であるための必要十分条件は、 $\theta_1, \dots, \theta_n, 1$ が Q -線形独立であること。

【補題14】 (近似定理の拡張) H を R^n の自然な基 $e_1, \dots, e_n$ と $a = (a_1, \dots, a_n)'$, $b = (b_1, \dots, b_n)'$, $\dots$, $c = (c_1, \dots, c_n)'$ から生成される R^n の有限生成 Z -部分加群とする。このとき H が R^n で稠密であるための必要

十分条件は、 Q 上の正則行列 T, S が存在して、行列 $F = [e_1, \dots, e_n, a, b, \dots, c]$ がつぎの形に変形されることである。

$$TFS = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & * & * \\ & 0 & \beta & * \\ & & 0 & \gamma \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

ここに $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_i)'$, $\beta = (\beta_{i+1}, \dots, \beta_j)'$, $\dots$, $\gamma = (\gamma_i, \dots, \gamma_n)'$ はそれぞれ補題 13 の θ の条件を満足するベクトルである。たとえば $\alpha_1, \dots, \alpha_i, 1$ は Q -線形独立である。

(注意) 異なるベクトル (たとえば α と β) の要素は互に Q -線形従属でもいい。

(補題 14 の証明) 十分性: S が Q 上の行列でその要素は有限個であること、 T が位相同型写像であること、およびクロネッカの定理より明らか。

必要性: 行列 F を (4) 式の形に変換できることを示す。ベクトル a の要素のうちの i 個, $a_{n_1}, \dots, a_{n_i}$ が Q -線形独立、ほかの要素はこれらに Q -線形従属とする。 $\alpha = (a_{n_1}, \dots, a_{n_i})'$ とおくと、行列 F は行と列の基本変換によって (Q 上の正則行列 T, S によって) つぎの形になる。

$$TFS = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \tilde{b}_1 \\ & 1 & \tilde{b}_2 \\ & & 0 & \tilde{b}_2 \\ & & & 1 \end{bmatrix} *$$

ベクトル $\tilde{b}_2$ の要素が有理数のみから成れば、 $\tilde{b}_2$ に相当する部分に無理数を含む列と入替える (列変換)。 $\tilde{b}_2$ が 1 次元以上のベクトルであれば稠密性の仮定により常にこのような列は存在する。 $\tilde{b}_2$ に対して上記の操作を繰返す。 (証明終)

(注意) R^n の Z -部分加群 H が有限生成であれば、(座標変換した後) 上の方法によって H の稠密性の判定ができる。

つぎに、上の補題を用いてシステムが“ほとんど可到達”か否かが判定できることを示そう。システムがつぎの形に表現されているものとする。

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} (k+1) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} (k) + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(k) \quad (5)$$

ここに A_1, A_2 はそれぞれ代数的整数だけを固有値とする行列、代数的整数でない数を固有値とする行列である。システム行列 A の単因子の系を調べることにより、この形への変換は常に可能である。

《定理15》 (5) 式で表現されているシステムが“ほとんど可到達”であるための必要十分条件は、部分システム $\Sigma = (A_1, B_1)$ が“ほとんど可到達”であること。

(証明) 必要性は明らか。十分性を示す。全体のシステムの可到達状態のつくる Z -加群を H とする。シ

システムが離散部分空間をもてば、あるベクトル $y = (a', b')' \neq 0$ に対して、 H の任意の要素 $x = (x_1', x_2')'$ との内積 $\langle y | x \rangle = \langle a | x_1 \rangle + \langle b | x_2 \rangle$ が整数になる。

ここに $x_1 \in H_1 = \mathbf{Z}[B_1, A_1 B_1, \dots]$ (注 3), $x_2 \in H_2 = \mathbf{Z}[B_2, A_2 B_2, \dots]$ (注 3). H_1 が有限生成の $\mathbf{Z}$ -加群であるから、集合 $\{\langle b | x_2 \rangle | x_2 \in H_2\}$ の中で $\mathbf{Z}$ -線形独立なもののは数は有限個であることがわかる。

行列 B_2 の第 i 列を b_i とする。 A_2 の仮定により、 $\mathbf{Z}$ -加群 $\mathbf{Z}[b_i, A_2 b_i, \dots]$ は $\mathbf{R}$ -部分空間 $(A_2, b_i)_{\mathbf{R}}$ の中で稠密、したがって上のこと (有限個であること) が成り立つためにはベクトル b が空間 $(A_2, b_i)_{\mathbf{R}}$ に直交していなければならない。結局 b は空間 $(A_2, B_2)_{\mathbf{R}}$ と直交するから $b = 0$ 。部分システム $\Sigma = (A_1, B_1)$ は“ほとんど可到達”であるから $\langle y | x \rangle = \langle a | x_1 \rangle$ が整数になるためには $a = 0$ 。矛盾。(証明終)

行列 A_1 の固有値はすべて代数的整数であるから、部分システム $\Sigma = (A_1, B_1)$ の可到達状態の集合は有限生成の $\mathbf{Z}$ -加群となる。したがって $\Sigma = (A_1, B_1)$ が“ほとんど可到達”可否かの判定は補題 14 によることができる。具体的には、可到達行列

$$G_1 = [B_1, A_1 B_1, \dots, A_1^{l-1} B_1]$$

に対して補題 14 を適用すればよい。ここに l は固有値の次数 (= 固有値の最小多項式の次数) のすべての固有値 (もちろん A_1 の固有値) にわたる和である。

7. あとがき

制御入力等間隔に量子化されたシステムの構造と制御可能性について考察した。すなわち、実数体上の定係数、離散時間、線形システム

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

において、制御入力 $u(k)$ を整数ベクトルに限った場合、どの程度まで制御可能かを問題とした。ただしシステムは実数値入力に対して可制御であるとした。

整数値制御システムで特徴的な事柄を要約するとつぎようになる。

i) システムの状態空間は二つの部分空間——可到達状態が格子点だけからなる“離散部分空間”と可到達状態が稠密に分布する“ほとんど可到達な部分空間”——の直和となり、後者は A -不変である。

ii) 可到達状態空間の中で稠密に分布するか、格子

点になるかは A の固有値が代数的整数であるかどうか大きく依存し、特に有理数体上のシステムの場合には、 A の固有値の性質だけでできる。

iii) 実数体上のシステムでは、入力行列の性質も問題となるが、可到達状態が稠密に分布しているか否かの判定は有限の手続きでできる。

本論文は整数値制御の可能性について、いいかえれば、“できる”“できない”について論じたもので、この結果を実際の制御に適用するには、まだ多くの問題が残る。たとえば、整数値制御システムにおいては、“小さい状態量”を作る機構が 2 通りあり、その一つは状態ベクトルが時間の経過とともに縮小していく機構で、ほかの一つは大きな二つの量の差として微量量を実現する方法であるが、前者は制御時間の長さを考える場合において、また後者は制御の入力安定性を考える場合において重要な問題になるものと思われる。

最後に、本研究を進めるにあたりご討論下さった、東京工業大学深尾研究室の諸氏ならびに慶応義塾大学安西祐一郎氏に深く感謝する次第である。

参考文献

- 1) Y. Anzai: A Note on Reachability of Discrete-time Quantized Control System, IEEE, Trans. Automatic Control, **AC-19**, 575/577 (1974)
- 2) ブルバキ: 数学原論, 位相, 第 7 章.
- 3) 宮道, 深尾: 単項イデアル環上のシステムの構造と実現, 計測自動制御学会論文集, **10-5**, 631/636 (1974)
- 4) R. E. Kalman, R. L. Falb and M. A. Arbib: Topics in Mathematical System Theory, McGraw Hill, New York (1969)
- 5) 弥永, 小平: 現代数学概説 I, 岩波書店.
- 6) J. B. Lewis and J. T. Tou: Optimum sampled-date systems with quantized control signals, IEEE Trans. Appl. Ind., **64**, 229/233 (1963)
- 7) M. Kim and K. Djadiuri: Optimum sampled-date control systems with quantized control function, ISA Trans., **6**, 65/73 (1967)
- 8) R. M. Havira and J. B. Lewis: Computation of quantized controls using differential dynamic programming, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-17**, 191/196 (1972)
- 9) 宮道, 深尾: 離散値制御におけるシステムの構造と制御可能性について, 第 19 期 JAACE 学術講演会予稿集, 91/92 (1975)
- 10) 宮道, 深尾: 離散値によるシステムの制御可能性について, システムシンポジウム講演論文集, 207/212 (1975)

(注 3) 列ベクトルの整係数 1 次結合全体のなす $\mathbf{Z}$ -加群.