分布定数系の同定における正則化の方法[†]

宮 本 定 明*・池 田 三 郎*・榎 木 義 一*

The Regularization Method for Identification of Distributed Parameter Systems

Sadaaki MIYAMOTO*, Saburo IKEDA* and Yoshikazu SAWARAGI*

The problem of finding unknown parameters in distributed parameter systems from the observations can be formulated as the equations of the first kind, whose solutions are not continuously dependent on the data. These problems are called non well-posed. The regularization or Tihonov's regularization is known as one of the stabilizing algorithms to solve non well-posed problems. In this paper we consider the regularization method for identification of distributed systems. Several approximation theorems are given for finding the solutions of equations of the first kind. Then, the identification problems are reduced to the minimization of a kind of quadratic functionals by using these theorems. On the other hand, it is known that the statistical methods for identification such as the method of maximum likelihood lead to minimization problems of certain specified quadratic functionals. Comparing these quadratic functionals, the relations between the regularization and the statistical methods are discussed.

1. 序 言

分布定数系の同定問題の研究は、まず、Balakrishnan and Lions¹⁾ や Tzafestas and Nightingale²⁾ らによる状態推定問題の考察から始められた。また、Falb³⁾ は Wiener 過程を Hilbert 空間に拡張して、最適 Filter を導出した。さらに、Kushner⁴⁾ は確率偏微分方程式を考えて、厳密な解析を行っている。ほかの取扱いとしては、Tzafestas and Nightingale⁵⁾ による最尤法、Phillipson⁶⁾ による、2 次評価関数の最適化問題を解く方法などがある。また、パラメータ推定問題が Tzafestas⁷⁾ らによって考察されている。これらの研究の多くは、集中定数系におけるカルマンフィルタの拡張であり、確率的議論に基づいているため、本

論文では、これらを統計的方法と呼ぶことにしよう。

これに対して、ここでは、正則化、あるいは Tihonov の正則化として知られている方法を用いて同定問題を考察する。正則化の方法は、主として、ソビエトの学者 (A. N. Tihonov, V. A. Morozov ら) によって、数値解析の方法として研究されており、すでにいくつかの制御理論への応用例がある⁸⁾。著者らも、先にこの方法によって河川汚染源の同定問題を考察した¹³⁾。

同定問題、すなわち系の未知パラメータを、観測から求める問題の多くは、第 1 種の方程式に帰着させることができる。第 1 種の方程式は一般に、Hadamard の意味で不適切 (non well-posed) であって、解の一意性や data への連続性が成り立たないことが多い。正則化はこのような問題の解の安定化法であって、data に連続に依存する近似解を与える。特に問題が線形の場合、解の一意性が成立しない場合にも、これらの近似解の極限としてこの方程式の Pseudo-Solution が得られる。

正則化の方法によれば、同定問題の、あるいは状態推定問題の決定論的な定式化が可能となる。また一方、形式的な類似から、最尤法、最小 2 乗法などの統計的手法との関連を論ずることができる。

2. 正則化の概念と基本定理

本節では、正則化の概念について簡単に述べ、その基本となる定理を証明する。

2.1 正則化の概念

正則化の方法は、1960 年代前半に A. N. Tihonov によって、第 1 種の方程式の解法として考察された。初期の論文¹⁰⁾では、積分方程式

$$(Tu)(x) = \int_a^b K(x, y)u(y)dy = z(x) \quad (c \leq x \leq d) \quad (1)$$

の解法が研究されている。

いま、正則化の意味を明らかにするため、上式の性質を調べてみよう。まず基本的な仮定として、 T が

[†] 第 17 回自動制御連合講演会で発表 (昭 50・2)

* 京都大学工学部 京都市左京区吉田本町

* Faculty of Engineering, Kyoto University, Kyoto
(Received February 19, 1975)

1-1 写像, すなわち方程式(1)の解の一意性が成立するとする。ところが, 一般に任意の与えられたデータ $z(x)$ に対して(1)式の解 u は存在するとは限らない。また, データ $z(x)$ に対する解の連続性が成立しない。すなわちデータの微小な誤差が, 解 u に大きな誤差をひき起し, あるいは解を発散させることが多い(注1)。このような問題を non well-posed であるという。

不適切な問題には, 直接的な数値解法は適用できない。たとえば(1)式をつぎのように差分近似すれば,

$$A_n u_n = z_n \quad (2)$$

ここに

$$A_n = (a_{ij}^n): n \times n \text{ 行列}$$

$$a_{ij}^n = K\left(\left(i - \frac{1}{2}\right)\Delta x, \left(j - \frac{1}{2}\right)\Delta y\right)\Delta y$$

$$u_n = (u_{1n}, u_{2n}, \dots, u_{nn})', \quad u_{jn} = u\left(\left(j - \frac{1}{2}\right)\Delta y\right)$$

$$z_n = (z_{1n}, z_{2n}, \dots, z_{nn})', \quad z_{in} = z\left(\left(i - \frac{1}{2}\right)\Delta x\right)$$

$$\Delta x = \frac{(d-c)}{n}, \quad \Delta y = \frac{(b-a)}{n}$$

このとき, $\det A_n$ は, n を固定したときは, 必ずしも 0 に等しいとは限らないが, $n \rightarrow \infty$ とするとき, 0 に収束する傾向がある。ゆえに n を大きくとれば, 行列 A_n は ill-condition となるから, 上の差分近似は意味をもたない。

Tihonov は, 上の問題点を考慮して, つぎの汎関数 M^α を導入した。

$$M^\alpha(z; u) = \int_c^d \left\{ \int_a^b K(x, y) u(y) dy - z(x) \right\}^2 dx + \alpha \int_a^b \left\{ u^2 + \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \right\} dy \quad (\alpha > 0) \quad (3)$$

上式で特徴的なのは第2項である。直観的に述べると項 $\int u^2 dy$ は u の発散を抑え, $\int (du/dy)^2 dy$ は, u を滑らかにする作用をもつ。

α をデータの誤差に応じて適当に定め, (3)式を最小化すれば, u の近似解が得られること, および(3)式のオイラー方程式の差分近似によって(1)式を解くアルゴリズムが得られることが証明されている¹⁰⁾。

2.2 正則化の基本定理

Tihonov の方法では, 方程式の解の一意性および, (3)式からわかるように, 解 u の微分可能性が仮定されていた。しかしながら, 問題によっては, 一意性や微分可能性の仮定が妥当でない場合や, 証明困難な場

合も多いので, われわれは, これらの条件を除くことを考える。

いま, U, E を実数体上の Hilbert 空間, U_{ad} を U の閉凸集合としよう。 T を U から E への連続線形作用素とする。いま, ある $z \in E$ に対して, 要素 $u_1 \in U_{ad}$ を選んで

$$z = T u_1 \quad (4)$$

とできたとする。

そこでつぎの問題を考えよう。

【問題】 z の近似データ z_n が与えられたとき, 方程式

$$T u = z_n \quad (5)$$

を U_{ad} において解け。

(注意) 後では, 主として $U_{ad} = U$ の場合を扱うことが多いが, 本節の定理は $U_{ad} \neq U$ の場合にも成立する。よってここでは, 特に $U_{ad} = U$ とは仮定しない。

ここで, 定理を述べるさいに必要な汎関数を次式で定義しておこう。

$$\left. \begin{aligned} J(v) &= \|T v - z\|_E^2 \\ M(v) &= \|v - u_0\|_U^2, \quad u_0 \in U \\ J^n(v) &= \|T v - z_n\|_E^2 \\ J_\alpha(v) &= J(v) + \alpha M(v) \\ J_{\alpha^n}(v) &= J^n(v) + \alpha M(v) \end{aligned} \right\} \quad (\alpha > 0)$$

(5)式において, T が 1-1 写像とは仮定していないため, 解の一意性が成立するとは限らないこと, および 2.1 節に述べたように, 解の一意性が成立する場合でも, z に対して, 解が連続でないため, z の誤差が u を発散させやすいことに注意しよう。

ここで, 集合 X を

$$X = \{u | T u = z, u \in U_{ad}\}$$

で定義しよう。このとき,

【補題 1】 X は U の閉凸集合。

(証明) T が連続ゆえ, 集合 $\{u | T u = z, u \in U\}$ は U の閉部分空間である。ゆえに $X = U_{ad} \cap \{u | T u = z, u \in U\}$ は U_{ad} に対する仮定から明らかに閉凸集合である。

(注意) 仮定により $X \neq \emptyset$ であることに注意しよう。また, U_{ad} が全空間 U に等しいとき, X は真の解 u_1 を含む affine 空間になる。

もし, 観測 z_n が誤差を含まない ($z_n = z$) とすれば(5)式は, 汎関数 $J_\alpha(v)$ を最小化することによって近似的に解くことができる。すなわち,

《定理 2》 任意の $\alpha > 0$ に対し,

(注1) 文献10)にはこのような“解の不安定性”が生じる具体例が示されている。

$$\begin{aligned} \inf_{v \in U_{ad}} J_{\alpha}(v) &= \inf_{v \in U_{ad}} \{ \|Tv - z\|_E^2 + \alpha \|v - u_0\|_U^2 \} \\ &= J_{\alpha}(u_{\alpha}) \end{aligned}$$

を満たす最適解 u_{α} が一意に存在して、 $\alpha \rightarrow 0$ のとき $u_{\alpha} \rightarrow \bar{u}_0$ が成立する。ここで $\bar{u}_0$ は

$$\inf_{u \in X} \|u - u_0\|_U = \|\bar{u}_0 - u_0\|_U$$

を満足する。

証明は Lions¹²⁾ 第1章の定理5.3を適用すれば容易であるので、ここでは省略する(注2)。

(注意1) 汎関数 $J_{\alpha}(v)$ において要素 u_0 には真の解 u_1 の先験的推定値を選ぶのが妥当である。もし、このような推定値が存在しなければ、任意に(たとえば $u_0=0$) 選べばよい。このとき $\bar{u}_0$ は u_0 の閉凸集合 X 上への射影 (projection) として一意に定まる (Lions¹²⁾ 第1章5.2節, 例, 5.1参照)。

(注意2) $U_{ad}=U$ のとき上の解法は“Pseudo-Solution”⁹⁾ の近似を与える。仮に、空間 U, E が有限次元と仮定すれば、 T は行列を表わす。このとき、 $u_0=0$ とすれば、定理の $\bar{u}_0$ は擬逆行列 (pseudo inverse matrix) T' を用いて

$$\bar{u}_0 = T'z$$

と表わされる。このように、上の定理によって擬逆行列の無限次元への拡張が可能である。

(注意3) T が1-1写像ならば、 $X=\{u_1\}$ であるから $\alpha \rightarrow 0$ になるとき $u_{\alpha} \rightarrow u_1$ 。

つぎに、 z_n に誤差が含まれる ($z_n \neq z$) 場合の近似解法を考えよう。われわれは、データの誤差が微小なとき、 u_1 あるいは Pseudo-Solution $\bar{u}_0$ の近似となる解を求めたい。いいかえれば z_n が z_1 に収束するとき、 u_1 (あるいは $\bar{u}_0$) に収束する解が求まればよい。ところで、一般に、 $J^{\alpha}(v) = \|Tv - z_n\|_E^2$ の最適解は存在するとは限らないから、 $J_{\alpha}^{\alpha}(v)$ の最適解 u_{α} は $\alpha \rightarrow 0$ のとき発散する傾向がある。しかし、つぎの定理によって、誤差のオーダーに応じて α を適当に選んで $J_{\alpha}^{\alpha}(v)$ を最適化すれば u_1 (あるいは $\bar{u}_0$) の近似解が得られることがわかる。

《定理3》 例 $\{z_n\}$ が $z_n \rightarrow z$ in E を満足すると仮定する。このとき、正の実数列 $\{\alpha_n\}$ を

$$(I) \quad \alpha_n \rightarrow 0$$

$$(II) \quad \|z_n - z\|_E^2 / \alpha_n \rightarrow 0$$

なるようにとれば

$$\inf_{v \in U_{ad}} J_{\alpha_n}^{\alpha_n}(v)$$

(注2) 後述の定理3において $z_n = z$ とおいても定理2が得られる。

$$\begin{aligned} &= \inf_{v \in U_{ad}} \{ \|Tv - z_n\|_E^2 + \alpha_n \|v - u_0\|_U^2 \} \\ &= J_{\alpha_n}^{\alpha_n}(u_{\alpha_n}) \end{aligned}$$

なる u_{α_n} は前定理の $\bar{u}_0$ に収束する。

証明は付録を参照されたい。

3. 分布定数系の同定問題

本節では、第2節で得られた定理を用いて分布定数系の同定問題を定式化する。定理3によって、問題は2次評価汎関数の最適化に帰着する。3.1節では、いくつかの例において正則化による定式化を行い、3.2では正則化の方法と統計的方法とを比較検討する。

3.1 正則化による同定問題の定式化

(記号)

Ω : R^n の有界単連結開領域

Γ : Ω の境界 $\Gamma = \partial\Omega$

$Q = (0, T) \times \Omega$ ($T > 0$)

$\Sigma = (0, T) \times \Gamma$

A : 2階の楕円形作用素

$$Ay = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_i} \right) + a_0 y$$

$$\left(\sum_{i,j} a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \alpha (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2) \quad \xi_i \in R, \quad \alpha > 0 \right)$$

$L^2(Q), L^2(\Omega)$: おおの Q, Ω 上の2乗可積分関数のクラス

$L^{\infty}(Q)$: Q において本質的に有界な関数のクラス

U : 解空間

E : 観測空間

C : $L^2(Q)$ から E への連続線形作用素

【例A】 (強制項および初期値の同定 - I) つぎの系を考えよう。

$$\frac{\partial y(t, x)}{\partial t} = Ay(t, x) + f(t, x) \quad (t, x) \in Q \quad (6)$$

$$y|_{\Sigma} = 0$$

$$y(0, x) = y_0(x) \quad x \in \Omega$$

観測:

$$z = Cy(t, x)$$

そこでつぎの問題を考えよう。

【問題】 強制項 f および初期値 y_0 が未知のとき、観測 z からこれらを同定せよ。

この同定問題の解は定理3を用いて近似的に求めることができる。すなわち、解空間を $U = L^2(Q) \times L^2(\Omega)$ で定義し、 $v = (f, y_0)$ とおく。明らかに状態 $y(t, x) \in L^2(Q)$ は v の連続線形関数(注3)であるから、作用素

(注3) 方程式(6)および例2, 例3における方程式の解の存在およびデータに対する連続性に関しては Lions¹²⁾ へ

T を

$$Tv = Cy(v)$$

($y(v)$ は, $v=(f, y_0)$ を与えたときの状態 y を表わす)で定義すれば, 同定問題は方程式

$$Tv = z$$

を解くことにほかならない。ゆえに定理3によって, 最小化すべき汎関数

$$J_{\alpha_1, \alpha_2}(v) = \|Cy - z\|_E^2 + \alpha_1 \|f - f_0\|_{L^2(Q)}^2 + \alpha_2 \|y_0 - y_{00}\|_{L^2(Q)}^2 \quad (f_0, y_{00}) \in U \quad (7)$$

を得る。ここで, f_0, y_{00} は適当に選ばれた f, y_0 の初期推定値である。

(注意) もし, 観測から (f, y_0) への写像が存在すれば, 定理3によって, 観測誤差が微小なとき真の解の近似値が得られる。写像が存在しないならば, ↗

$$\begin{aligned} J_{\alpha_1, \alpha_2}(v) = & \int_0^T \int_Q \int_{\Omega_1} (Cy - z(t, x)) N(t, x, x_1) (Cy - z(t, x_1)) d\Omega d\Omega_1 dt \\ & + \alpha_1 \int_0^T \int_Q \int_{\Omega_1} (f(t, x) - f_0(t, x)) M(t, x, x_1) (f(t, x_1) - f_0(t, x_1)) d\Omega d\Omega_1 dt \\ & + \alpha_2 \int_Q \int_{\Omega_1} (y_0(x) - y_{00}(x)) P(x, x_1) (y_0(x_1) - y_{00}(x_1)) d\Omega d\Omega_1 \end{aligned} \quad (9)$$

をとることができる。ただし, 上式で $M(t, x, x_1)$, $N(t, x, x_1)$, $P(x, x_1)$ はおのおの $Q \times Q$, $Q \times Q$, $Q \times Q$ で連続かつ

$$b_1 \geq M(t, x, x_1) \geq c_1, \quad b_2 \geq N(t, x, x_1) \geq c_2, \\ b_3 \geq P(x, x_1) \geq c_3$$

($b_i, c_i > 0$ かつ b_i, c_i は t, x, x_1 に独立, $i=1, 2, 3$)を満たすとする。

(注意) (9)式の各項はおのおの, $Cy - z$, $f - f_0$, $y_0 - y_{00}$ の L^2 ノルムに同値なノルムを定義していることが, 上の条件より明らかである。よって前節の正則化の定理が適用できる。

【例C】(境界入力同定)系の方程式は

$$\frac{\partial y}{\partial t} = Ay(t, x) \quad (t, x) \in Q \quad (10)$$

$$c_1 \frac{\partial y}{\partial \nu_A} + c_2 y = g \quad (c_1 + c_2 = 1, c_1 \geq 0) \quad \text{on } \Sigma$$

$$y(0, x) = y_0 \quad x \in \Omega$$

ここで

$$\frac{\partial y}{\partial \nu_A} = \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j} \cos(n, x_i) \quad \text{on } \Sigma$$

($\cos(n, x_i)$: Γ における Ω の外向き法線 n の i 番目の方向余弦) ↗

↘第3章定理1.2などを参照。なお, Phillipson⁶⁾第2章にも説明がある。

↘Pseudo-Solutionの近似を得る。

【例B】(強制項および初期値の同定-II)系の方程式は,

$$\frac{\partial y}{\partial t} = Ay + B(t, x)f(t, x) \quad (t, x) \in Q \quad (8)$$

$$y|_{\Sigma} = 0$$

$$y(0, x) = y_0(x) \quad x \in \Omega$$

とし, 観測を

$$z(t, x) = Cy(t, x)$$

とする。ここで, $B(t, x)$: Q で有界連続な関数, また $E = L^2(Q)$ と仮定する。

【問題】 f および y_0 が未知のとき, 観測 $z(t, x)$ からこれらを求めよ。

前例とは少し異なった定式化を考えよう。すなわち, 最適化すべき汎関数として,

↘観測は

$$z = Cy$$

とする。

【問題】($g, y_0 \in L^2(\Sigma) \times L^2(Q)$ が未知のとき, 観測 z からこれを求めよ。

前例と同様に y , したがって z は (g, y_0) の連続線形関数であるから, 定理3によって評価関数

$$J_{\alpha_1, \alpha_2}(v) = \|Cy - z\|_E^2 + \alpha_1 \|g - g_0\|_{L^2(\Sigma)}^2 + \alpha_2 \|y_0 - y_{00}\|_{L^2(Q)}^2 \quad (11)$$

を適当な α_1, α_2 について最適化すればよい。

これらの例において得られた汎関数の最適化問題は随伴方程式系を用いて2点境界値問題, さらにリカッチ方程式¹²⁾に帰着させられる。あるいはこう配法などを用いて直接最小化を行うこともできる⁶⁾。これらについては参考文献に詳しく述べられているのでここでは省略する。

3.2 統計的方法と正則化との比較

例Bで導かれた評価関数の最適化問題と, カルマンフィルタ, 最尤法などの統計的方法を比較してみよう。このために, まず, Tzafestas and Nightingale⁵⁾による最尤法の定式化を引用する。すなわちつぎの系を考える:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = Ay + B(t, x) \cdot w(t, x)$$

$$N \cdot y = 0$$

$$z(t, x) = M_x y(t, x) + v(t, x)$$

ここで, $v(t, x)$: スカラー状態変数

B, M_x : 有界線形作用素

N : 線形境界作用素

また, w, v はたがいに独立な, おのおの平均0, 分散

$$Ew(t, x) \cdot w(\tau, s) = C_w(x, s, t) \delta(t - \tau) \quad \nearrow$$

$$J = \int_{\Omega} \int_{\Omega_1} (y_0(x) - \bar{y}_0(x), P_0^{-1}(x, x_1)(y_0(x_1) - \bar{y}_0(x_1))) d\Omega d\Omega_1 \\ + \int_0^T \int_{\Omega} \int_{\Omega_1} (z - M_x y, C_v^{-1}(z - M_x y)) d\Omega d\Omega_1 d\tau + \int_0^T \int_{\Omega} \int_{\Omega_1} (w(x, \tau), C_w^{-1}w(x_1, \tau)) d\Omega d\Omega_1 d\tau \quad (12)$$

文献5)には,これから得られるフィルタ方程式および共分散方程式はほかの方法,たとえば直交射影²⁾などによって導かれるものと一致することが示されている。

ここで(9)式と(12)式を比較してみよう。5)では, C_w, C_v, P_0 の有界対称正定性が仮定されているが,いま,この仮定をいささか強めて,

$$b_1 \geq C_w^{-1} \geq c_1, \quad b_2 \geq C_v^{-1} \geq c_2, \quad b_3 \geq P_0^{-1} \geq c_3 \quad (13)$$

(b_i, c_i, x, s, t に独立な正定数, $i=1, 2, 3$)

が成立するとする。このとき, (9)式で $C=M_x$ とし,

$$\alpha_1 M = C_w^{-1}, \quad N = C_v^{-1}, \quad \alpha_2 P = P_0^{-1}, \quad f_0 = 0, \\ y_{00} = \bar{y}_0.$$

とおけば(12)式と(9)式はまったく等しい。

このことは,二つの方法が共に2次元関数の最適化に帰着することからくる形式的な相似にすぎないが,一方,統系的方法と正則化がおのおの独自の意味を有することから,つぎのような推論が可能となる。

(1) 系が線形の場合,最尤法による定式化は,正則化関数の最適化問題とみなすことができる。ゆえに,いま,システム雑音が無視できるとすれば,観測から初期値への写像が存在し(可観測性),さらに観測誤差が小さい場合,最尤法による定式化はノルムの意味での状態近似を与える。

(2) 正則化法の本質は解の安定化にある。定理3の条件IIからわかるように,観測誤差の2乗より α を小さく選ぶと解が不安定になる。解の不安定性は数値解析にさいして致命的である。最尤法においても,システム雑音,初期値などの分散が大きいと解が不安定になる(注4)ので注意する必要がある。

(3) 正則化関数は,解が安定である限り系お

(注4) (13)式より, (分散) $\rightarrow$ 大. は $\alpha \rightarrow$ 小. に相当することがわかる。

$$\searrow E v(t, x) \cdot v(\tau, s) = C_v(x, s, t) \delta(t - \tau)$$

のスカラ-白色雑音とする。さらに y の初期値 $y_0(x)$ は平均 $\bar{y}_0$, 分散 $P_0(x, s)$ のガウス分布をしていると仮定する。このときベイズの公式によって状態推定問題はつぎの2次元関数の最適化に帰着することが証明されている。

よび評価関数のパラメータの変動に対して安定である。ゆえに統計的方法による解も,安定性が成立する限り,雑音の統計的性質の微小変化に対して連続である。

4. 結 論

正則化の方法は,決定論的な議論に基づく分布定数系の同定問題の解法である。この方法によって,問題は2次元関数の最適化に帰着させられる。

統計的方法は,いわば,雑音の統計的性質に基づいて最も可能性の大きい解を求める方法であり,一方,正則化は,観測誤差が微小なとき,真の解(あるいはPseudo-Solution)に十分近い近似解を求める方法である。このように解の意味は互いに異なっているが,形式的な類似から解の安定性の重要さが3.2節で論じられた。

状態推定などの問題において,強制項や初期値など未知量の統計的性質が明らかな場合,カルマンフィルタなどの統計的方法は最も有効であろうが,一方,これらの量の統計的性質に対する仮定が必ずしも妥当でない場合や明確でない場合には,観測誤差 $\|z_n - z\|$ のオーダーに関する情報のみに基づいてパラメータ α (定理3参照)を決定して同定を行う,正則化の方法が効力をもつものと思われる。

なお,本論文では線形の系について議論を行ったが,非線形問題に対する正則化の研究がTihonov¹¹⁾らによって行われている。非線形同定問題の取扱いについては稿を改めて論じたい。

終りにあたって,本論文をまとめるさい大変お世話になった京都大学,野木達夫講師に感謝の意を表する。

参 考 文 献

- 1) A. V. Balakrishnan and J. L. Lions: State Estimation for Infinite-Dimensional Systems, J. Comp. Sys. Sci., **1**, 391/403 (1967)
- 2) S. G. Tzafestas and J. M. Nightingale: Optimal

- Filtering, Smoothing and Prediction in Linear Distributed-Parameter Systems, Proc. IEE, **115**-8, 1207/1212 (1968)
- 3) P. L. Falb: Infinite-Dimensional Filtering: The Kalman-Bucy Filter in Hilbert Space, Information and Control, **11**, 102/137 (1967)
 - 4) H. I. Kushner: Filtering for Linear Distributed Parameter Systems, SIAM J. Cont., **8**-3, 346/359 (1970)
 - 5) S. G. Tzafestas and J. M. Nightingale: Maximum-Likelihood Approach to the Optimal Filtering of Distributed Systems, Proc. IEE, **116**-6, 1085/1093 (1969)
 - 6) G. A. Phillipson: Identification of Distributed Systems, American Elsevier (1971)
 - 7) S. G. Tzafestas: On the Identification of Hybrid Distributed Parameter Control Systems, Int. J. Control, **13**-1, 145/155 (1971)
 - 8) L. S. Kirillova and A. A. Piontkovskii: Incorrect Problems in Optimal Control Theory (Survey), Auto. Remote. Cont., **10**, 1553/1563 (1968)
 - 9) V. A. Morozov: Pseudo-Solutions, Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., **9**-6, 1387/1391 (1969)
 - 10) A. N. Tihonov: Solutions of Incorrectly Formulated Problems and the Regularization Method, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **151**, 1035/1038 (1963)
 - 11) A. N. Tihonov: Nonlinear Equations of the First Kind, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, **161**, 559/562 (1965)
 - 12) J. L. Lions: Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations, Springer-Verlag (1971)
 - 13) S. Ikeda, S. Miyamoto, and Y. Sawaragi: Identification Method in Environmental Systems and its Application to Water Pollution, Int. J. Sys. Sci., **5**-8, 707/723 (1974)

《付 録》

(定理 3 の証明)

u_{α_n} は $J_{\alpha_n}(v)$ の最適解ゆえ、任意の $u \in X$ に対し、

$$\alpha_n \|u_{\alpha_n} - u_0\|^2_U \leq J_{\alpha_n}(u_{\alpha_n}) \leq J_{\alpha_n}(u)$$

これより

$$\|u_{\alpha_n} - u_0\|^2_U \leq \frac{\|z - z_n\|^2_E}{\alpha_n} + \|u - u_0\|^2_E \quad (14)$$

すなわち、 α_n を定理の (I), (II) が満足されるように選べば、 $\|u_{\alpha_n}\|^2 \leq \text{Const.}$ である。

ヒルベルト空間の有界閉集合は弱コンパクトゆえ、部分列 $\{u_{\alpha_n}\}$ が存在して、

$$u_{\alpha_n} \longrightarrow w \text{ weakly in } U$$

U_{ad} は弱閉ゆえ、 $w \in U_{ad}$ 。かつ凸連続汎関数の弱下半連続性、および

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \|z_\mu\|_E = \|z\|_E,$$

$$|\lim_{\mu \rightarrow \infty} (Tu_{\alpha_n}, z - z_\mu)_E| \leq \text{Const.} \lim_{\mu \rightarrow \infty} \|z - z_\mu\|_E = 0$$

より

$$\begin{aligned} & \|Tw - z\|_E^2 \\ & \leq \lim_{\mu \rightarrow \infty} \|Tu_{\alpha_n} - z\|_E^2 + \lim_{\mu \rightarrow \infty} \{\|z_\mu\|_E^2 - \|z\|_E^2\} \\ & \quad + 2(Tu_{\alpha_n}, z - z_\mu)_E \\ & \leq \lim_{\mu \rightarrow \infty} \{\|Tu_{\alpha_n}\|_E^2 + 2(Tu_{\alpha_n}, z - z_\mu)_E \\ & \quad - 2(Tu_{\alpha_n}, z)_E + \|z_\mu\|_E^2\} \\ & = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \|Tu_{\alpha_n} - z_\mu\|_E^2 \leq \lim_{\mu \rightarrow \infty} J_{\alpha_n}(u_{\alpha_n}) \\ & \leq \lim_{\mu \rightarrow \infty} J_{\alpha_n}(u) = 0 \end{aligned}$$

ゆえに $\|Tw - z\|_E = 0$ 。すなわち $w \in X$ 。また(14)式の極限をとれば、性質(II)より、

$$\|w - u_0\|^2_U \leq \|u - u_0\|^2_U \text{ for any } u \in X$$

ゆえに $w = \bar{u}_0$ となり、部分列を取り出すことなく

$$u_{\alpha_n} \longrightarrow \bar{u}_0 \text{ weakly in } U.$$

さらに(14)式より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_{\alpha_n} - u_0\|^2_U \leq \|\bar{u}_0 - u_0\|^2_U$$

であるが、一方、凸連続汎関数の弱下半連続性により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_{\alpha_n} - u_0\|^2_U \geq \|\bar{u}_0 - u_0\|^2_U$$

これより、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_{\alpha_n} - u_0\|^2_U = \|\bar{u}_0 - u_0\|^2_U$$

他方、

$$\begin{aligned} \|u_{\alpha_n} - \bar{u}_0\|^2_U &= \|u_{\alpha_n} - u_0\|^2_U + \|\bar{u}_0 - u_0\|^2_U \\ &\quad - 2(u_{\alpha_n} - u_0, \bar{u}_0 - u_0)_U \end{aligned}$$

上式の右辺は $n \rightarrow \infty$ のとき、0 に収束するから、結局

$$u_{\alpha_n} \longrightarrow \bar{u}_0 \text{ strongly in } U$$

(証明終)