不規則欠損観測データをもつ非線形力学系の確率的可観測性[†]

砂 原 善 文*・相 原 伸 一**

Stochastic Observability for Nonlinear Dynamical Systems under Randomly Interrupted Observations

Yoshifumi SUNAHARA* and Shin-ichi AIHARA**

The purpose of this paper is to present sufficient conditions for the stochastic observability of nonlinear systems under randomly interrupted observations.

First, the observation mechanism with interrupted data is modeled by introducing the Poisson process. Then both the finite time stochastic observability and the asymptotically stochastic observability are defined. Finally, by using a Lyapunov-type function, theorems giving sufficient conditions are presented and the stochastic convergence of the estimator is examined.

For the purpose of supporting the theoretical development here, results of simulation studies are also given.

1. 緒 言

一般に、確率系に対する可観測性の概念を、ごく直観的に表現すれば、観測雑音の介在する観測値をもとにして、システムの状態ある確率的な意味で知り得るかどうかということである。すなわち、

- (1) 観測された出力が系の状態を記述するに十分な情報量を有するかどうか。
- (2) 観測雑音のもとで、系の真の状態量に収束する推定機構を構成することができるかどうか。
- (3) 観測雑音のもとで、その誤差が十分に小さくなるような系の状態推定が可能かどうか。

という3種類の問題に帰着できる。

上述の解答として、著者らがすでに、非線形離散時

間系^{1),2)}および非線形連続時間系³⁾に対する十分条件を求めている。上述の研究においては、観測値は、時間的に連続に得られるか、あるいは離散的な観測値であっても、サンプル周期は十分に短いものであった。しかしながら最近では、観測値の伝送を行う場合が多く、その伝送費用の高騰から、伝送観測値の数を極端に少なくする傾向にある。あるいはまた、観測器の故障などにより連続観測を行いながらも、観測データが予期せぬ時間に欠損する場合もある。

本論文はこういう非常に実際的な場合に対する非線形確率システムの確率的可観測性を議論する。まずデータが欠損する観測機構を、ポアソン過程によって記述する。このようなポアソン過程^{4),5)}の導入によりモデル化された観測機構に対し、すでに確立された最適濾波器⁶⁾⁻⁸⁾を参考にし、あらかじめ推定機構を仮定し、その出力であるところの状態推定値と、真の状態との誤差過程に注目し、これに拡張された確率的安定定理⁹⁾を適用することにより、確率的可観測性の十分条件を求めようとするものである。

本論文で用いられる主な記号はつぎの通りである。
 $x(t)$: n 次元状態ベクトル (特に x_0 はシステムの未知な初期値を表わす), $\hat{x}(t)$: 状態ベクトル $x(t)$ の推定値, $y(t)$: m 次元観測値ベクトル ($m \leq n$), $f(t, \cdot)$, $h(t, \cdot)$: それぞれ n 次元, m 次元非線形ベクトル値関数, $A(t)$, $H(t)$: それぞれ $n \times n$, $m \times n$ パラメータマトリクス, $\int_0^t \int_{R^1} g(s, u) p(ds \times du)$: スカラーポアソン過程, $\lambda(t)$: ポアソン過程の推移率

2. 観測機構の数学的記述

観測データは、Fig. 1(a)のように、時刻 $t_1, t_2, t_3, \dots$ において、“.”印のように、得られるものとする。このような点列データに対する数学モデルの構成は、以下のように行うのが妥当である。すなわち Fig. 1のように、階段状見本過程をつくり、これにポアソン

[†] 制御理論シンポジウムで発表 (昭 49・6)

* 京都工芸繊維大学工芸学部 京都市左京区松ヶ崎御所海道町

** 京都大学工学部 京都市左京区吉田本町

* Faculty of Polytechnic Sciences, Kyoto Institute of Technology, Kyoto

** Faculty of Engineering, Kyoto University, Kyoto
(Received May 16, 1975)

Fig. 1 Point data and poisson process

過程の考え方をあてはめると、このような見本過程を出力とする観測機構は

$$dy(t) = \int_{R^1} h(t, x) g(t, u) p(dt \times du) \quad (2.1)$$

と表現される. (2.1)式の説明のために, Fig. 1(b)をみる. いま $\int_{R^1} g(t, u) p(dt \times du)$ は, 高さ1のみの跳躍をもつポアソン過程の数学モデルであるから⁴⁾, (2.1)式はポアソン過程が高さ1の跳躍を起すときに $h(t, x)$ なる信号が入ることを示している.

(2.1)式は以下のように書きなおせる⁴⁾.

$$dy(t) = \int_{R^1} h(t, x) g(t, u) \frac{du}{|u|^2} dt + \int_{R^1} h(t, x) g(t, u) q(dt \times du) \quad (2.2)$$

ただし, ここで測度 $q(dt \times du)$ は

$$q(dt \times du) = p(dt \times du) - E\{p(dt \times du)\} \quad (2.3)$$

であり, $E\{\cdot\}$ は期待値を表わす, また

$$g(t, u) = \begin{cases} +1, & u \in A_t \\ 0, & u \notin A_t \end{cases} \quad (2.4)$$

ただし $A_t \subset R^1$ である. (2.2)式の右辺第1項の積分は, 推移率といわれるもので表記できる. これはポアソン過程を用いると必然的に導入されてくるものであり, 推移率 $\lambda(t)$ は

$$\int_{A_t} g(t, u) \frac{du}{|u|^2} = \int_{A_t} \frac{du}{|u|^2} = \lambda(t) \quad (2.5)$$

と定義される⁷⁾. ゆえに(2.2)式は

$$dy(t) = h(t, x) \lambda(t) dt + \int_{R^1} h(t, x) g(t, u) q(dt \times du) \quad (2.6)$$

となる. (2.6)式において, 右辺第1項が偏位項を表わし, 第2項は拡散項と考えられる. 信号の欠損する時刻が推移率 $\lambda(t)$ のみで表現されるときは, 右辺第2項は, 関数 $h(t, x)$ をポアソン測度で平均したものと同みなせるから, これを観測誤差とみなせば, 従来の推定理論の展開に沿って最適濾波器を導くことができる⁶⁾.

3. 確率的可観測性の定義

本論文では, 確率的可観測性をつぎのように定義する.

【定義 1】 (有限時間可観測)

与えられた $\delta(t_f, \varepsilon, c)$ と ε に対して, 以下の不等式を満たす $\hat{x}(t_f)$ が存在すれば, システムは, 誤差領域 δ に対し, 確率 $1 - \varepsilon$ で有限時間可観測であるという.

$$\Pr \{ \|\hat{x}(t_f) - x(t_f)\|^2 \geq \delta \mid \hat{x}(t_0) - x(t_0) = \hat{x}_0 - x_0 \} \leq \varepsilon \quad (3.1)$$

ただし $0 < \varepsilon < 1$, c は既知定数で, 以下のようなシステムの初期領域を表わす.

$$\mathcal{D} = \{x_0; x_0 \in R^n, \|x_0\|^2 \leq c/4\} \quad (3.2)$$

【定義 2】 (漸近可観測)

以下の不等式を満たす $\hat{x}(t_f)$ が存在すればシステムは確率 1 で, 漸近可観測であるという.

$$\Pr \{ \lim_{t_f \rightarrow \infty} \|\hat{x}(t_f) - x(t_f)\|^2 = 0 \mid \hat{x}(t_0) - x(t_0) = \hat{x}_0 - x_0 \} = 1 \quad (3.3)$$

ただし, この定義の場合システムの初期値 $x(t_0)$ は, $\|x(t_0)\|^2 < \infty$ であればよい.

4. 確率的可観測性の定理

本節では, まず一般的な非線形システムの確率的可観測性に対する十分条件を求め, つぎに具体的条件を特定のシステムに関して導出する.

ここで考える力学系は, Σ_1 によって表わされるものとする. すなわち

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x), & x_0 \in \mathcal{D} \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\Sigma_1 \begin{cases} dy(t) = \int_{R^1} h(t, x) g(t, u) p(dt \times du) \end{cases} \quad (4.2)$$

ここで未知状態 $x(t)$ を推定する機構を

$$\begin{aligned} d\hat{x}(t) &= f(t, \hat{x}) dt \\ &\quad + P(t) H'(t) (dy(t) - h(t, \hat{x}) \lambda(t) dt) \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\hat{x}(t_0) = \hat{x}_0$$

と仮定し, 上述の可観測性の定義を満たす十分条件を導くことにする. ただし, ここで $P(t)$ および $H(t)$ は, それぞれ $n \times n, m \times n$ マトリクスであり, これはいずれものちに決定される.

推定機構を(4.3)式で仮定することにより, 確率的可観測性の十分条件を与えるつぎの定理が成立する.

《定理 1》 もし以下の条件を満たす $V(t, e(t))$ なる関数が存在すれば, システム Σ_1 は誤差 δ に対し確率 $1 - \varepsilon$ で有限時間可観測である.

(C.1) 時間区間 $[t_0, t_f]$ において, 非負なスカラー関数 $V(t, e(t))$ が定義され (ただし $e(t) \neq 0$ で, $e(t) = 0$ のときのみ $V(t, e(t)) = 0$ である), これは $e(t)$ に関して1階, 2階連続微分可能, t に関して1階微分可能である. ただしここで $e(t) \triangleq \hat{x}(t) - x(t)$ である.

(C.2) $V(t, e(t))$ は以下の初期および終端条件を満たす.

$$V(t_0, e(t_0)) \leq \|\beta\|_{\max}^2 e'(t_0) e(t_0) \quad (4.4)$$

$$V(t_f, e(t_f)) \geq \|\alpha(t_f)\|_{\min}^2 e'(t_f) e(t_f) \quad (4.5)$$

ただしここで, $\alpha(t_f)$ と β は $n \times n$ の正定な定数マトリクスであり, $\|\beta\|_{\max}, \|\alpha(t_f)\|_{\min}$ は, それぞれ $\beta' \beta, \alpha'(t_f) \alpha(t_f)$ の最大, 最小固有値を示す.

(C.3) 以下の式を満足するマトリクス $P(t)H'(t)$ が存在する.

$$\mathcal{L}V(t, e(t)) \leq -M_1 V(t, e(t)) + \tilde{V}(t, x(t)) \quad (4.6)$$

ただし

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V(t, e(t)) \triangleq & \frac{\partial V(t, e(t))}{\partial t} + F'(t, e(t)) \frac{\partial V(t, e(t))}{\partial e(t)} \\ & + \int_{R^1} \left[V(t, e(t) + P(t)H'(t)h(t, x)) \right. \\ & \quad \left. g(t, u) - V(t, e(t)) - g(t, u)h'(t, x) \right. \\ & \quad \left. H(t)P(t) \frac{\partial V(t, e(t))}{\partial e(t)} \right] \frac{du}{|u|^2} \quad (4.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(t, e(t)) \triangleq & f(t, \hat{x}(t)) - f(t, x(t)) \\ & + P(t)H'(t)[h(t, x) - h(t, \hat{x})]\lambda(t) \quad (4.8) \end{aligned}$$

である.

(C.4) (4.6)式における $\tilde{V}(t, x(t))$ は以下の条件を満足する.

$$\frac{d\tilde{V}(t, x(t))}{dt} \leq -\dot{M}(t)\tilde{V}(t, x(t)) \quad (4.9)$$

$$\tilde{V}(t_0, x(t_0)) \leq \gamma x'(t_0)x(t_0) \quad (4.10)$$

(C.5) 既知定数 $c, M_1, \alpha(t_f), \beta, \gamma, t_f$, および既知関数 $\dot{M}(t)$ は前もって与えられた $\delta \cdot \varepsilon$ に対し

$$\delta \cdot \varepsilon \geq \varepsilon^*(t_f)$$

を満足する. ただし

$$\begin{aligned} \varepsilon^*(t_f) \triangleq & \frac{c}{\|\alpha(t_f)\|_{\min}^2} \left[e^{-M_1(t_f - t_0)} \left(\|\beta\|_{\max}^2 + \frac{\gamma}{4M_1} \right. \right. \\ & \left. \left. \int_{t_0}^{t_f} e^{M_1(t - t_0)} \dot{M}(t) e^{-(M(t) - M(t_0))} dt \right) \right. \\ & \left. + \frac{\gamma}{4M_1} e^{-(M(t_f) - M(t_0))} \right] \quad (4.11) \end{aligned}$$

である.

(証明) スカラー関数 $\tilde{W}(t, x(t))$ を

$$\tilde{W}(t, x(t)) \triangleq e^{(M(t) - M(t_0))} \tilde{V}(t, x(t)) \quad (4.12)$$

と定義する. 条件(C.4)より

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{W}}(t, x(t)) = & e^{(M(t) - M(t_0))} [\dot{M}(t) \tilde{V}(t, x(t)) \\ & + \dot{\tilde{V}}(t, x(t))] \leq 0 \quad (4.13) \end{aligned}$$

となり, ゆえに(4.10)式を使用すれば

$$\begin{aligned} \tilde{V}(t, x(t)) \leq & e^{-(M(t) - M(t_0))} \gamma x'(t_0) x(t_0) \\ \leq & e^{-(M(t) - M(t_0))} \gamma c / 4 \quad (4.14) \end{aligned}$$

を得る. いまスカラー関数 $W(t, e(t))$ を

$$W(t, e(t)) \triangleq e^{M_1(t - t_0)} \left(V(t, e(t)) - \frac{\gamma c}{4M_1} e^{-(M(t) - M(t_0))} \right) \quad (4.15)$$

と定義する. 条件(C.3)より,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}W(t, e(t)) = & e^{M_1(t - t_0)} \left[M_1 V(t, e(t)) \right. \\ & \left. - \frac{\gamma c}{4} e^{-(M(t) - M(t_0))} + \frac{\gamma c}{4M_1} \dot{M}(t) e^{-(M(t) - M(t_0))} \right. \\ & \left. + \mathcal{L}V(t, e(t)) \right] \\ \leq & e^{M_1(t - t_0)} \left[\tilde{V}(t, x(t)) - \frac{\gamma c}{4} e^{-(M(t) - M(t_0))} \right. \\ & \left. + \frac{\gamma c}{4M_1} \dot{M}(t) e^{-(M(t) - M(t_0))} \right] \quad (4.16) \end{aligned}$$

となり, (4.14)式より

$$\mathcal{L}W(t, e(t)) \leq \frac{\gamma c}{4M_1} \dot{M}(t) e^{M_1(t - t_0)} e^{-(M(t) - M(t_0))} \quad (4.17)$$

を得る. ポアソン過程が加わった場合の Itô-Dynkin の公式⁹⁾より,

$$\begin{aligned} E\{W(t_f, e(t_f)) | e(t_0) = e_0\} - W(t_0, e_0) \\ \leq \frac{\gamma c}{4M_1} \int_{t_0}^{t_f} e^{M_1(t - t_0)} \dot{M}(t) e^{-(M(t) - M(t_0))} dt \quad (4.18) \end{aligned}$$

となる. また(4.18)式は, 条件(C.2), (C.5)より

$$\begin{aligned} E\{\|\hat{x}(t_f) - x(t_f)\|^2 | \hat{x}(t_0) - x(t_0) = \hat{x}_0 - x_0\} \\ \leq \frac{c}{\|\alpha(t_f)\|_{\min}^2} \left[e^{-M_1(t_f - t_0)} \left(\|\beta\|_{\max}^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\gamma}{4M_1} \int_{t_0}^{t_f} e^{M_1(t - t_0)} \dot{M}(t) e^{-(M(t) - M(t_0))} dt \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\gamma}{4M_1} e^{-(M(t_f) - M(t_0))} \right] = \varepsilon^* \leq \delta \cdot \varepsilon \quad (4.19) \end{aligned}$$

を得る. ゆえに

$$\Pr\{\|\hat{x}(t_f) - x(t_f)\|^2 \geq \delta | \hat{x}(t_0) - x(t_0) = \hat{x}_0 - x_0\} \leq \varepsilon \quad (4.20)$$

なる結果が得られる.

つぎにシステム Σ_1 が, 漸近可観測であるための十分条件を導出する.

《定理2》 定理1における条件(C.1)~(C.4)に加えて, つぎの条件(C.6)および(C.7)が満たされれば, システム Σ_1 は漸近可観測である.

(C. 6)

$$\lim_{t_f \rightarrow \infty} \|\alpha(t_f)\|_{\min}^2 > 0 \quad (4.21)$$

(C. 7) 以下のような, ある定数 $\tilde{c}$ が存在する.

$$\sup_{t_f \in [t_0, \infty]} \int_{t_0}^{t_f} e^{M_1(t-t_0)} \dot{M}(t) e^{-(M(t)-M(t_0))} dt \leq \tilde{c} < \infty \quad (4.22)$$

$$\lim_{t_f \rightarrow \infty} e^{-(M(t_f)-M(t_0))} = 0 \quad (4.23)$$

$$M_1 > 0 \quad (4.24)$$

(証明) 定理 1 と同様の手法により (4.18) 式が得られる. ゆえに (4.22) 式より,

$$\begin{aligned} E\{\|x(t_f) - x(t_f)\|^2 | \hat{x}(t_0) - x(t_0) = \hat{x}_0 - x_0\} \\ \leq \frac{4\max(\|\alpha(t_f)\|^2, \|\alpha(t_0)\|^2)}{\|\alpha(t_f)\|_{\min}^2} \left[e^{-M_1(t_f-t_0)} \left(\|\beta\|_{\max}^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\gamma\tilde{c}}{4M_1} \right) + \frac{\gamma}{4M_1} e^{-(M(t_f)-M(t_0))} \right] \end{aligned} \quad (4.25)$$

となり, 条件 (C. 6) および (C. 7) より

$$\begin{aligned} \lim_{t_f \rightarrow \infty} E\{\|\hat{x}(t_f) - x(t_f)\|^2 | \hat{x}(t_0) - x(t_0) = \hat{x}_0 - x_0\} \\ = 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

を得る. ゆえに

$$\begin{aligned} \Pr\{\lim_{t_f \rightarrow \infty} \|x(t_f) - x(t_f)\|^2 = 0 | \hat{x}(t_0) - x(t_0) \\ = \hat{x}_0 - x_0\} = 1 \end{aligned} \quad (4.27)$$

となる.

定理 1 および 2 で得られた十分条件を, より具体的な条件で示すために, 以下のようなシステムを, 考え

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t, x), x_0 \in \mathcal{D} \\ \Sigma_2 \left\{ \begin{aligned} dy(t) &= \int_{R^1} H(t)x(t)g(t, u)p(dt \times du) \end{aligned} \right. \end{cases} \quad (4.28)$$

この場合推定機構は

$$\begin{aligned} d\hat{x}(t) &= A(t)\hat{x}(t)dt + f(t, \hat{x})dt \\ &\quad + P(t)H'(t)\{dy(t) - H(t)\hat{x}(t)\lambda(t)dt\} \\ \hat{x}(t_0) &= \hat{x}_0 \in \mathcal{D} \end{aligned} \quad (4.30)$$

とする.

《定理 3》 もし以下の (C. 8), (C. 9), (C. 10) の条件が満たされれば, システム Σ_2 は誤差領域 δ に対し確率 $1-\varepsilon$ で有限時間可観測である.

(C. 8) 任意の正定なマトリクス $S(t)$ に対して, 非線形関数 $f(t, \cdot)$ は, 以下の不等式を満足する.

$$\begin{aligned} [f(t, \hat{x}) - f(t, x)]' S(t) (\hat{x}(t) - x(t)) \\ + (\hat{x}(t) - x(t))' S(t) [f(t, \hat{x}) - f(t, x)] \\ \leq (\hat{x}(t) - x(t))' (K_1'(t)S(t) + S(t)K_1(t)) \\ (\hat{x}(t) - x(t)) \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} f(t, x)'x(t) + x'(t)f(t, x) \\ \leq x'(t)[K_2'(t) + K_2(t)]x(t) \end{aligned} \quad (4.32)$$

(C. 9)

$$\begin{aligned} P^{-1}(t) &= \Phi'(t_0, t)\beta\Phi(t_0, t) \\ &\quad + \int_{t_0}^t \Phi'(s, t)H'(s)\lambda(s)IH(s)\Phi(s, t)ds \end{aligned} \quad (4.33)$$

なる有界, 対称, 正定マトリクス $P^{-1}(t)$ が存在する. ただしここで,

$$\frac{\partial \Phi(s, t)}{\partial t} = -\Phi(s, t)(A(t) + K_1(t) + \sigma(t)) \quad (4.34)$$

$$\Phi(t, t) = I \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} \sigma(t) \triangleq \frac{1}{4}(M_1 + \| -A(t) - A'(t) \\ - K_1(t) - K_1'(t) \|_{\max})I \end{aligned} \quad (4.36)$$

であり M_1 は正の微小な定数を与え, また $\|\cdot\|_{\max}$ はマトリクスの最大固有値を示す.

(C. 10) 前もって与えられた $\delta \cdot \varepsilon$ に対し, 既知定数 $c, M_1, P^{-1}(t_f), \beta, \gamma, t_f$, と既知関数 $\dot{M}(t)$ は

$$\delta \cdot \varepsilon \geq \varepsilon^*$$

を満足する. ただし,

$$\begin{aligned} \varepsilon^* \triangleq \frac{c}{\|P^{-1}(t_f)\|_{\min}^2} \left[e^{-M_1(t_f-t_0)} \left(\|\beta\|_{\max}^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\lambda(t_0)\dot{k}(t_0)}{4M_1} \int_{t_0}^{t_f} e^{M_1(t-t_0)} \dot{M}(t) e^{-(M(t)-M(t_0))} dt \right) \right. \\ \left. + \frac{\lambda(t_0)\dot{k}(t_0)}{4M_1} e^{-(M(t_f)-M(t_0))} \right] \end{aligned} \quad (4.37)$$

であり, また

$$k(t) = \|H'(t)H(t)\|_{\max}^2 \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} \dot{M}(t) &= - \left[\|A(t) + A'(t) + K_2(t) + K_2'(t)\|_{\max} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda(t)}{\lambda(t)} + \frac{\dot{k}(t)}{k(t)} \right] \end{aligned} \quad (4.39)$$

とする.

(証明) システム Σ_2 と (4.30) 式の推定機構より, 誤差過程 $e(t)$ は

$$\begin{aligned} de(t) &= A(t)e(t)dt + \tilde{F}(t, e)dt \\ &\quad - P(t)H'(t)\lambda(t)IH(t)e(t)dt \\ &\quad + \int_{R^1} P(t)H'(t)H(t)x(t)g(t, u)q(dt \times du) \end{aligned} \quad (4.40)$$

となる. ただし,

$$\tilde{F}(t, e) \triangleq f(t, \hat{x}) - f(t, x) \quad (4.41)$$

である. またこの場合微分作用素 $\mathcal{L}(\cdot)$ は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V(t, e) \triangleq \frac{\partial V(t, e)}{\partial t} + \left[\tilde{F}(t, e) - P(t)H'(t)\lambda(t) \right. \\ \left. IH(t)e(t) \right]' \frac{\partial V(t, e)}{\partial e(t)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{R^1} \left[V(t, e + P(t)H'(t)H(t)x(t)g(t, u)) \right. \\
& \left. - V(t, e) - g(t, u)x'(t)H'(t)P(t) \frac{\partial V(t, e)}{\partial e(t)} \right] \frac{du}{|u|^2}
\end{aligned} \quad (4.42)$$

となる。いま、スカラー関数 $V(t, e)$ を

$$V(t, e) = e'(t)P^{-1}(t)P^{-1}(t)e(t) \quad (4.43)$$

と定義すれば、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}V(t, e) & \leq e'(t) \left[\frac{dP^{-1}(t)}{dt}P^{-1}(t) + P^{-1}(t) \frac{dP^{-1}(t)}{dt} \right. \\
& + A'(t)P^{-1}(t)P^{-1}(t) + P^{-1}(t)P^{-1}(t)A(t) \\
& - H'(t)\lambda(t)IH(t)P^{-1}(t) \\
& - P^{-1}(t)H'(t)\lambda(t)IH(t) \left. \right] e(t) \\
& + \tilde{F}(t, e)'P^{-1}(t)P^{-1}(t)e(t) \\
& + e'(t)P^{-1}(t)P^{-1}(t)\tilde{F}(t, e) \\
& + \int_{R^1} g^2(t, u) \|H'(t)H(t)\|_{\max}^2 x'(t)x(t) \frac{du}{|u|^2}
\end{aligned} \quad (4.44)$$

となり、条件(C.8)、(4.31)式より

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}V(t, e) & \leq e'(t) \left[\frac{dP^{-1}(t)}{dt}P^{-1}(t) + P^{-1}(t) \frac{dP^{-1}(t)}{dt} \right. \\
& + A'(t)P^{-1}(t)P^{-1}(t) + P^{-1}(t)P^{-1}(t)A(t) \\
& - H'(t)\lambda(t)IH(t)P^{-1}(t) \\
& - P^{-1}(t)H'(t)\lambda(t)IH(t) \left. \right] e(t) \\
& + e'(t)[K_1'(t)P^{-1}(t)P^{-1}(t) \\
& + P^{-1}(t)P^{-1}(t)K_1(t)]e(t) \\
& + \lambda(t) \|H'(t)H(t)\|_{\max}^2 x'(t)x(t)
\end{aligned} \quad (4.45)$$

を得る。一方条件(C.9)より $P^{-1}(t)$ は

$$\begin{aligned}
\frac{dP^{-1}(t)}{dt} & + (A(t) + K_1(t) + \sigma(t))'P^{-1}(t) \\
& + P^{-1}(t)(A(t) + K_1(t) + \sigma(t)) - H'(t)\lambda(t)IH(t) = 0 \\
P^{-1}(t_0) & = \beta
\end{aligned} \quad (4.46)$$

を満足するので、(4.46)式を、(4.45)式に代入することにより、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}V(t, e) & \leq -M_1V(t, e) \\
& + \lambda(t) \|H'(t)H(t)\|_{\max}^2 x'(t)x(t)
\end{aligned} \quad (4.47)$$

が成立する。また、 $\tilde{V}(t, x)$ を

$$\tilde{V}(t, x) = \lambda(t) \|H'(t)H(t)\|_{\max}^2 x'(t)x(t) \quad (4.48)$$

と定義すれば、(4.28)式および(4.32)式より

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{V}(t, x)}{dt} & \leq x'(t)(A(t) + A'(t) + K_2(t) \\
& + K_2'(t))x(t)k(t)\lambda(t) \\
& + x'(t) \left(\frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} + \frac{\dot{k}(t)}{k(t)} \right) Ix(t)k(t)\lambda(t) \\
& \leq -\dot{M}(t)\tilde{V}(t, x)
\end{aligned} \quad (4.49)$$

を得る。ただし、(4.38)、(4.39)式をも用いた。ゆえに

$$V(t_0, e(t_0)) \leq \|\beta\|_{\max}^2 e'(t_0)e(t_0) \quad (4.50)$$

$$V(t_0, e(t_f)) \geq \|P^{-1}(t_f)\|_{\min}^2 e'(t_f)e(t_f) \quad (4.51)$$

となるので、条件(C.10)より、本定理は、定理1に帰着する。(4.37)式における確率評価 ϵ^* は、

$\int_{t_0}^{t_f} \Phi'(s, t_f)H'(s)\lambda(s)IH(s)\Phi(s, t_f)ds > 0$ ならば、第1項は任意に小さくすることができる³⁾。すなわち第3, 4項がデータ欠損による誤差であるが、これは $\|P^{-1}(t_f)\|_{\min}$ と $\dot{M}(t)$ に依存している。具体的に例えば、グラムマトリクス $\int_{t_0}^{t_f} \Phi'(s, t_f)H'(s)\lambda(s)IH(s)\Phi(s, t_f)ds$ の最小固有値の大きさが $\|P^{-1}(t_f)\|_{\min}$ を決定し、また $\dot{M}(t)$ は力学系の発散度と観測ゲインおよび推移率の関数である。 $\dot{M}(t)$ の特性による確率評価の収束性を具体的に論ずるために、システム Σ_2 が漸近可観測であるための十分条件を示す。

《定理4》 もしつぎの条件(C.11)および(C.12)が、満足されればシステム Σ_2 は漸近可観測である。(C.11)

$$\int_{t_0}^t \Phi'(s, t)H'(s)\lambda(s)IH(s)\Phi(s, t)ds > 0 \quad (4.52)$$

なる正定なグラムマトリクスが存在する。ただし、 $\Phi(s, t)$ は(4.34)式で表わされるものであり、 t は (t_0, ∞) の任意な時間である。

(C.12) (4.39)式で定義された $\dot{M}(t)$ は、 $t > t_0$ に対し

$$\int_{t_0}^t \dot{M}(\tau)d\tau > M_1(t - t_0) \quad (4.53)$$

を満足する (ただし $M_1 > 0$ である)。

(証明) 定理3において、(4.37)式が $t_f \rightarrow \infty$ において零に収束すればよい、(4.33)式のように、 $P^{-1}(t)$ を定め、 $\beta > 0$ なる初期値を与えると、条件(C.11)より

$$\lim_{t_f \rightarrow \infty} P^{-1}(t_f) > 0 \quad (4.54)$$

となる。ゆえに条件(C.12)より、定理2の(C.7)の条件が満足されることになる。

5. 数 値 例

[例1] つぎのような非線形システムを考える。

$$\dot{x}(t) = -x(t) + 0.4 \tan^{-1}(x(t)), \quad x_0 \in \mathcal{D} \quad (5.1)$$

$$\Sigma_N \left\{ dy(t) = \frac{3}{20} \int_{R^1} x(t)g(t, u)p(dt \times du) \right. \quad (5.2)$$

ただしここで、

$$\lambda(t) = 70e^{-0.5t} + 1 \quad (5.3)$$

であり、初期値の領域は

$$\mathcal{D} = \{x_0; x_0 \in R^1, \|x_0\|^2 \leq 16\} \quad (5.4)$$

とする。定理3における K_1, K_2 は以下ようになる。

$$0.4[\text{Tan}^{-1}\hat{x} - \text{Tan}^{-1}x]Q(t)(\hat{x} - x) \\ \leq \frac{0.4}{\xi^2 + 1} Q(t)(\hat{x} - x)^2 \leq 0.4Q(t)(\hat{x} - x)^2 \quad (5.5)$$

ただし、 $\min(\hat{x}, x) \leq \xi \leq \max(\hat{x}, x)$ である。

$$0.8\text{Tan}^{-1}(x)x(t) \leq 0.8x^2(t)$$

となり、 $K_1=0.4, K_2=0.4$ である。いま、 $M_1=0.3$ と与えると

$$\frac{dP^{-1}(t)}{dt} - 0.45P^{-1}(t) - \frac{9}{400}(70e^{-0.5t} + 1) = 0 \quad (5.6)$$

を得る。また(4.39)式より $\dot{M}(t)$ は

$$\dot{M}(t) = 1.2 + \frac{35e^{-0.5t}}{70e^{-0.5t} + 1} \quad (5.7)$$

となる。いま、 $P^{-1}(t_0)=0.1$ とすれば(4.37)および(5.6)式より $\varepsilon^*(0.9_{\text{sec}})=0.13$ となる。ゆえに前もって与えられた、 $\delta \cdot \varepsilon$ が 0.13 より大きければ、有限時間可観測となる。また本例題では

$$\int_{t_0}^t \dot{M}(\tau) d\tau \geq 1.2(t-t_0) > M_1(t-t_0) = 0.3(t-t_0) \quad (5.8)$$

$$\lim_{t_f \rightarrow \infty} P^{-1}(t_f) = \infty > 0 \quad (5.9)$$

となるので、漸近可観測となる。

$\hat{x}_0=0$ とし、Fig. 2 にデジタルシミュレーションの結果を示す。

【例2】 つぎのような、線形システムを考える。

$$\Sigma_L \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \\ dy(t) = \frac{3}{20} \int_{R^1} [1 \ 1] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} g(t, u) p(dt \times du) \end{cases} \quad (5.10)$$

$$(5.11)$$

ただし、ここで

$$\lambda(t) = 140e^{-2t}$$

であり、初期値の領域は、

$$\mathcal{D} = \{x_0; x_0 \in R^2, \|x_0\|^2 \leq 32\}$$

とする。 $M_1=1.4$ とすれば、定理3より

$$\frac{dP^{-1}(t)}{dt} + \begin{bmatrix} 0.35 & -1 \\ 1 & 0.45 \end{bmatrix} P^{-1}(t) + P^{-1}(t) \begin{bmatrix} 0.35 & 1 \\ -1 & 0.45 \end{bmatrix} \\ - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{49}{20} e^{-2t} = 0 \\ P^{-1}(t_0) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.01 \\ 0.01 & 0.1 \end{bmatrix}$$

と初期値を定めると、(4.37)式より $\varepsilon^*(5_{\text{sec}})=0.256$ となり、前もって与えられた $\delta \cdot \varepsilon$ が、0.256 以上で

あれば、 $t=5_{\text{sec}}$ で有限時間可観測である。

Fig. 3 に $\hat{x}_0=[0 \ 0]'$ の場合の、デジタルシミュレーションの結果を示す。

6. 結 言

拡張された確率的リアプノフ関数を適用することにより、データが不規則に欠損する力学系の確率的可観測性を考察した。観測機構をポアソン過程でモデル化し、あらかじめ推定機構を仮定することにより、可観測性の十分条件が導出されている。

本論文における十分条件は、推定機構に依存することは明らかであるが、考察する力学系は非線形系でありその最適推定機構の構成は不可能であるので、実用的見地より、最も妥当であると思われる推定機構を仮定してある。確率的可観測性を定義するにあたって、データが不規則欠損を有するので、真の状態と推定値との誤差過程の確率的な収束を論ずる必要がある。この点を考慮に入れて、有限時間可観測性を、初期値の条件付確率の評価を導入して定義し、また同時に強い収束を要求される漸近可観測性を定義した。特に例1のごとく、漸近可観測ではシステムが、かなり限定され、また特に推移率 $\lambda(t)$ に強く依存する。推移

Fig. 2 Sample runs of the true and estimated processes of the system in Example 1

Fig. 3 Sample runs of the true and estimated processes of the system in Example 2

率 $\lambda(t)$ の特性によっては、仮定した推定機構のゲインを、たとえば $P(t)H'(t)/q(t)$ のように時間関数 $q(t)$ を加えることによって、その特性を改善する必要がある場合もある。

不規則欠損データの推定および可観測性を論ずるには、特に観測機構の推移率を把握する必要がある、その同定問題は、以後の課題である。推移率同定の一手法としては、文献 6) を参照されたい。

参 考 文 献

- 1) M. Aoki: Optimization of Stochastic Systems, Academic Press, New York (1967)
- 2) Y. Sunahara, K. Kishino and Sh. Aihara: On Stochastic Observability of Nonlinear Discrete-Time Dynamical Systems, Int. J. Control, **19**-4, 719/742 (1974)
- 3) Y. Sunahara, Sh. Aihara and K. Kishino: On the Stochastic Observability and Controllability for Nonlinear Dynamical Systems, Int. J. Control, **22**-1, 65/82 (1975)
- 4) A. V. Skorokhod: Studies in the Theory of Random Processes, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1965)
- 5) S. Watanabe: On Discontinuous Additive Functionals and Levy Measures of a Markov Process, Japanese J. Math., **36**, 53/70 (1964)
- 6) Y. Sunahara, Sh. Aihara and Y. Ikeda: On a Method for Parameter Identification of Stochastic Systems under Scanty Observations (in preparation)
- 7) A. I. Yasin: Filtering of Jump Processes, Avtomat. i. Telemekh., **5**, 52/58 (1970)
- 8) D. L. Snyder: Information Processing for Observed Jump Processes, Information and Control, **22**, 78/88 (1973)
- 9) I. I. Gihman and A. Ja. Dorogovcev: On Stability of Solutions of Stochastic Differential Equations, Ukr. Math. Zh., **17**-6, 229/250 (1965)