負荷絞りをもち空気圧伝送管路のステップ応答†

吉岡 宗之*・森川 敬信*

Step Response of Throat-Terminated Pneumatic Transmission Lines

Muneyuki YOSHIOKA* and Yoshinobu MORIKAWA*

This paper deals with the step response of throat-terminated pneumatic transmission lines. Analytical and experimental results are presented to show the reflection behaviour from a throat at the end of a line, and also to prove the dynamic matching technique.

The analysis is performed in the following steps;

(1) The transfer function of throat-terminated transmission lines is expanded in an infinite series in which the terms consist of the product of the reflection coefficient and the transfer function of semi-infinite line.

(2) With the assumption that the reflection coefficient (m) is constant, the step responses of throat-terminated lines based on the three analytical models of pneumatic transmission line, (i.e. lossless line model, linear friction model and Brown's model), are obtained. Then the model comparison is made on the basis of the calculated pressure waveforms for $m = \pm 1, \pm 0.5, 0$.

(3) The pressure responses to a step input are calculated by using the Brown's model and the approximate reflection coefficients $m_a, m_s = (R_L - R_C)/(R_C + R_L)$, R_C is the characteristic resistance of a line and R_L the linearized load resistance due to the static characteristic of pressure-flowrate of a throat.

The experimental results with a positive pressure input are compared with the analytical results based on the Brown's model and m_a . The agreement between experiment and calculated results is good. Therefore, it may be concluded that the response waveform of throat-terminated lines to a step input can be foretold in the procedure described above and the practical matching condition is $R_L = R_C$.

1. はじめに

フルイディクス回路系をはじめとする空気圧伝送回路系の構成に際しては、誤動作の防止・波形ひずみの低減・伝送効率の向上などがきわめて重要な課題である。ところで、これら回路系においては、管路終端のノズル、絞りまたはオリフィス（以後一括して絞りと呼ぶ）を介して次段へ信号を伝送する方式が広く用いられており、こうした方式を用いた系における上記問題点の検討にあたっては、その基礎となる終端に絞りをもち管路の過渡応答特性全般について十分に知ることが、まず必要である。

この方面の従来の研究をみると、Schaedel らのパルス波のひずみに関する初歩的な考察¹⁾、Reed らの相関法を利用した反射波形の決定法に関する研究²⁾、宮本らの群遅延特性に基づく伝送ひずみについての報告³⁾などの例がある。しかしいずれも過渡特性そのものを直接的な手法では取扱っておらず、その全般的な考察はこれからの課題であると考えられる。

そこで本報では、まず、すでに提案されている多くの空気圧伝送管路の解析モデルのうち、代表的な3種（無損失モデル⁴⁾、線形抵抗モデル⁵⁾、Brown のモデル⁶⁾）を用いて、負荷絞りをもち管路のステップ応答の解析を行う。負荷点における反射係数を導入することで、圧力に関する伝達関数を無限級数形に展開し、これを利用して反射係数のみを未知数として含む形の解を求める。そのうえで反射係数の近似的な算定法を示し、応答波形を計算で求める。

一方、正圧ステップ入力法による実験（長さ 0.3～1.0 m、内径 4～7 mm の管路）を行い、その結果を計算結果と比較することで、解析の手法および反射係数算定法の妥当性を検証する。また、マッチング法についても言及する。なお本報における考察は、Dissipation 数⁴⁾の小さい管路に限る。

本報で用いた主な記号はつぎの通りである。

c : 音速

S_{th} : 絞り断面積

† 第 17 回自動制御連合講演会で発表（昭49・11）

* 大阪大学工学部 吹田市上田上

* Faculty of Engineering, Osaka University, Suita
(Received June 25, 1975)

C : キャパシタンス	t : 時間
d : 管内径	$t_c = l/c$
d_L : 絞り直径	$T = t/t_c$
erfc : 余誤差関数	$T_{n1} = l_{n1}/ct_c$
G : 伝達関数	$T_{n2} = l_{n2}/ct_c$
I_1 : 変形ベッセル関数	u : 単位ステップ関数
l : 管路長	x : 距離
$l_{n1} = 2nl + x$	$X = x/l$
$l_{n2} = 2(n+1)l - x$	Z_c : 特性インピーダンス
L : イナータンス	Z_L : 負荷インピーダンス
$L_{n1} = l_{n1}/l$	α : 定数
$L_{n2} = l_{n2}/l$	β : 定数
m : 反射係数	γ : 伝播定数
n : 0, 1, 2, 3, ...	δ : Dissipation 数
p : 圧力	L : 大気動粘性係数
P : p のラプラス変換形	ρ : 大気密度
R : レジスタンス	添字
$R_c = \sqrt{L/C}$: 特性抵抗	i : 管始端に関する量
R_L : 線形化負荷抵抗	o : 管終端に関する量
s : ラプラス変数	x : 距離 x における量
S_i : 管路断面積	X : 距離 X における量

2. 解 析

2.1 伝達関数

Fig. 1 に示すごとく終端に絞りをもちつ管路を考え、1 次元問題として解析する。入力端からの距離 x における圧力 P_x を出力とし、管路の伝播定数 γ 、特性インピーダンス Z_c 、負荷インピーダンス Z_L を用いて、圧力入力 P_i に対する伝達関数 G_x を求めると、

$$G_x = \frac{Z_L \cosh \gamma(l-x) + Z_c \sinh \gamma(l-x)}{Z_L \cosh \gamma l + Z_c \sinh \gamma l} \quad (1)$$

次式で定義される負荷点における反射係数

$$m = \frac{Z_L - Z_c}{Z_c + Z_L} \quad (2)$$

を導入し、指数関数を用いて (1) 式を変形すると、

$$G_x = \frac{e^{-\gamma x}}{1 + m e^{-2\gamma l}} + \frac{m e^{-\gamma(2l-x)}}{1 + m e^{-2\gamma l}} \quad (3)$$

(3) 式の右辺両項は、ともに無限等比数列の和の形であるから、さらに級数形にかきかえると、

$$G_x = \sum_{n=0}^{\infty} \{(-1)^n (m^n e^{-\gamma l_{n1}} + m^{n+1} e^{-\gamma l_{n2}})\} \quad (4)$$

ただし $l_{n1} = 2nl + x$, $l_{n2} = 2(n+1)l - x$

2.2 ステップ応答

最初に、負荷絞りをもちつ管路のステップ応答を求めるにあたって利用する、半無限長管路におけるステップ応答を示す。単一波に関して、管路内の任意の 2 点

Fig. 1 Throat-terminated transmission line

間（上流点を 1，下流点を 2，距離を l とする）の圧力の関係は次式で与えられる。

$$\frac{P_2}{P_1} = \exp(-\gamma l) \quad (5)$$

また、代表的な 3 種の空気圧伝送管路解析モデルの伝播定数は、それぞれ次式で与えられる。

$$\text{無損失モデル}^{4)}: \gamma = s\sqrt{LC} \quad (6.a)$$

$$\text{線形抵抗モデル}^{5)}: \gamma = \sqrt{(R+sL)sC} \quad (6.b)$$

Brown のモデル⁶⁾:

$$\gamma = \left(s + \frac{2\alpha\sqrt{L}}{d}\sqrt{s} + \frac{4\beta L}{d^2} \right) \sqrt{LC} \quad (6.c)$$

ここで、

$$L = \frac{4\rho}{\pi d^2}, C = \frac{\pi d^2}{4\rho c^2}, R = \frac{128\rho L}{\pi d^4}$$

$$\alpha = 1.48 (\text{注 } 1), \beta = 1.08 (\text{注 } 1)$$

したがって、 P_1 を入力として単位ステップ応答を求め、つぎの変数変換、

$$c = \frac{1}{\sqrt{LC}}, t_c = \frac{l}{c}, T = \frac{t}{t_c}, \delta = \frac{4\gamma t_c}{d^2}$$

を行って表示すれば、それぞれ、

$$\text{無損失モデル: } p_2(T) = u(T-1) \quad (7.a)$$

$$u(T-1) = \begin{cases} 1 & (T > 1) \\ 0 & (T \leq 1) \end{cases}$$

線形抵抗モデル:

$$p_2(T) = e^{-4\delta} u(T-1) + 4\delta \int_1^T \frac{e^{-4\delta\tau}}{\sqrt{\tau^2-1}} I_1(4\delta\sqrt{\tau^2-1}) d\tau \quad (7.b)$$

I_1 : 変形ベッセル関数

Brown のモデル⁶⁾:

$$p_2(T) = e^{-\beta\delta} \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{\delta}{T-1}}\right) \quad (7.c)$$

$$\operatorname{erfc}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_y^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau$$

Dissipation 数 δ をパラメータにして、(7) 式の計算結果を Fig. 2 に示す。

そこで、いま反射係数がラプラス変数の関数でな

(注 1) α, β はプラントル数および比熱比で決まる定数で、上記の値は 20°C, 760 mmHg の空気におけるものである（詳しくは文献 6）参照）。

Fig. 2 Step response of semi-infinite lines

Fig. 3 Step responses of a throat-terminated line based on the three analytical models ($X=0.5$, $\delta=0.01$)

く、かつ一定値で近似できるとすれば（その妥当性および近似的な算定法については後述する。4章参照）、負荷絞りをもつ管路の単位ステップ入力に対する応答は、(5)式と(7)式の関係を考慮することで、半無限長管路の応答の重ね合わせとして容易に求まり、それぞれつぎようになる。

無損失モデル：

$$p_X(T) = \sum_{n=0}^{\infty} [(-1)^n \{m^n u(T-T_{n1}) + m^{n+1} u(T-T_{n2})\}] \quad (8.a)$$

$$X = \frac{x}{l}, T_{n1} = \frac{L_{n1}}{ct_c}, T_{n2} = \frac{L_{n2}}{ct_c}$$

線形抵抗モデル⁷⁾：

$$p_X(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n \left\{ m^n e^{-4\delta L_{n1} u(T-T_{n1})} + m^{n+1} e^{-4\delta L_{n2} u(T-T_{n2})} + 4m^n \delta L_{n1} \int_{T_{n1}}^T \frac{e^{-4\delta \tau}}{\sqrt{\tau^2 - T_{n1}^2}} I_1(4\delta \sqrt{\tau^2 - T_{n1}^2}) d\tau + 4m^{n+1} \delta L_{n2} \int_{T_{n2}}^T \frac{e^{-4\delta \tau}}{\sqrt{\tau^2 - T_{n2}^2}} I_1(4\delta \sqrt{\tau^2 - T_{n2}^2}) d\tau \right\} \right] \quad (8.b)$$

$$L_{n1} = \frac{l_{n1}}{l}, L_{n2} = \frac{l_{n2}}{l}$$

Brown のモデル：

$$p_X(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n \left\{ m^n e^{-\beta L_{n1} \delta} \operatorname{erfc} \left(\frac{\alpha L_{n1}}{2} \sqrt{\frac{\delta}{T-T_{n1}}} \right) + m^{n+1} e^{-\beta L_{n2} \delta} \operatorname{erfc} \left(\frac{\alpha L_{n2}}{2} \sqrt{\frac{\delta}{T-T_{n2}}} \right) \right\} \right] \quad (8.c)$$

3種のモデルを比較するために、反射係数 m を与えて計算した応答波形の例 ($\delta=0.01$ の場合) を示す。

Fig. 3 は点 $X=0.5$ における、また Fig. 4 は $X=1.0$ における波形である。 $|m|=1$ のときには、過渡状態を終らせる要因が、摩擦による波の減衰のみであり、減衰量の評価の仕方が各モデルによって異なるため、時間が経つにつれ3種の応答の差が大きくなる。ところが、 $|m|<1$ であれば、管終端で反射するときにも波は減衰し、 $|m|=0.5$ の場合にはこの要因により過渡状態が急激に収束するので、3種の応答の差は、 $|m|=1$ の場合と比較してよほど少ない。 $|m|$ が小さくなれば、この傾向はいっそう強くなる。したがって、無損失モデルといえども、絞りをもつ管路系の過渡特性の概略を知る目的で用いるなら、取扱いが簡単なだけに、きわめて有効である。

3. 実験装置および方法

Fig. 5 に実験装置の概要を示す。実験には正圧ステップ入力法⁸⁾を用いた。すなわちタンク内の圧力がある値に設定しておき、管始端のゴム隔膜を電氣的な火花で破り、ステップ入力を発生させた。設定圧は U 字管マンメータで測定し、変動圧は小型圧力変換器、直流増幅器、デジタル・メモリ、シンクロスコープを通し、結果を写真撮影した。また絞りの圧力-流量特性を求めるに際して、流量はロータ・メータ、圧力はベッツ形および U 字管マンメータを用いて測定した。

実験には円形断面の黄銅管を用いた。その諸元を Table 1 に示す。そのほかの実験条件はつぎの通りである。

出力圧測定位置： $X=0.5, 1.0$

入力圧：主として $p_i=500\text{mmAq}$ 、絞り比： $0\sim 1$

4. 結果および考察

4.1 反射係数

動的な実験を経ずに反射係数を決定できれば、(8)式によりステップ応答を求めることができ、負荷絞りをもつ回路の構成に際してきわめて有用である。一方、絞りはごく低いステップ入力に対しても非線形特

性を示すと考えられるので、従来の音響学的手法⁹⁾で反射係数を求めることは適当でない。そこでここでは、動的な実験を経ずに、前述のステップ応答を求めるのに適した形の反射係数を算定する方法を示す。

閉塞端では負荷 $Z_L = \infty$ であるから $m=1$ となる。開放端では、放射インピーダンス Z_r を無視⁽²⁾すれば $Z_L=0$ となるから $m=-1$ となる。任意の絞り比 (S_{th}/S_i) の場合はつぎのようにして決定する。まず特性インピーダンスの近似値として特性抵抗を用いる。すなわち、

$$Z_c = R_c = \sqrt{L/C} \quad (9)$$

急激な圧力変動時にはこの近似は可能である。また負荷の近似値としては、つぎのようにして定まる、線形化した負荷抵抗 R_L を用いるものとする。すなわち、実験で求まる絞りの静的な圧力-流量特性 (Fig. 6 の曲線) を、Fig. 6 に示すように原点と曲線上の $p_0 = p_i$ に対する点 (黒点で示す) を結ぶ直線で近似し、この直線の傾きを R_L とする。このようにすれば、反射係数の近似値 m_a は次式で与えられる。

$$m_a = \frac{R_L - R_c}{R_c + R_L} \quad (10)$$

絞り比 (S_{th}/S_i) とこの m_a の関係を Fig. 7 に示す。

Fig. 4 Step responses of a throat-terminated line based on the three analytical models ($X=1$, $\delta=0.01$)

Fig. 5 Schematic diagram of the test setup (1: Valve, 2: Manometer, 3: Tank, 4: Rubber membrane, 5: Al-ribbon, 6: Transducer, 7: Line, 8: DC amp., 9: Digital memory, 10: Synchroscope)

4.2 ステップ応答波形

前節に示した反射係数を用いて計算したステップ応答波形と実験で求めた波形を比較する。Fig. 8~Fig. 12 に (I) $X=0.5$, (II) $X=1.0$ おける波形を、種々の管路系について示す。各図において (a) は計算結果、(b) は実験結果である。なお、3種の解析モデルの比較はすでに2章で行ったので、ここでは Brown のモデルを用いた結果のみを示してある。

反射係数算定時のあらい近似にもかかわらず、いずれの場合にも両波形はほぼ一致しており、前述のステップ応答を求める手法が δ の小さい管路において実用上有効であることを示している。なお、実験による一連の検証は、入力圧 500 mmAq の場合について示してあるが、これより低い入力圧についても、容易に予測できるように同様の結果が得られる。実験的にも確認してある。

4.3 動的マッチングについて

動的な圧力信号に対する、負荷点におけるマッチング条件、すなわち無反射条件は、(2)式の $m=0$ より、 $Z_L=Z_c$ であることは周知の通りである。しかし損失のある管路において、この条件は半無限長管路でしか満たされず、回路系の構成に際しては非現実的である。そこで、容易に実現できる近似的なマッチング条件を求める必要があるが、それは4.2で述べた事実

(注2) Z_r を考慮する簡便な方法として、いわゆる「開口端補正」がある。しかしその補正量は、管直径 d に対して $(0.3 \sim 0.4)d$ 程度で¹⁰⁾あり、ここではこの補正も行わない。

Table 1 Dimension and dissipation number of lines

	$d \times 10^3$ (m)	l (m)	δ^*
Line I	4.0	1.00	1.1×10^{-2}
Line II	5.0	0.30	2.1×10^{-3}
Line III	7.0	0.50	1.8×10^{-3}

* at 20°C and 760mmHg

Fig. 6 Pressure vs. flow rate characteristics of the throat

Fig. 7 Approximate reflection coefficients

Fig. 8 Comparison of calculated pressure waveform (a) with experimental result (b), ($m_a=1$) Fig. 9 Comparison of calculated pressure waveform (a) with experimental result (b), ($m_a \approx 0.5$) Fig. 10 Comparison of calculated pressure waveform (a) With experimental result (b), ($m_a \approx 0$) Fig. 11 Comparison of calculated pressure waveform (a) with experimental result (b), ($m_a = -0.20$) Fig. 12 Comparison of calculated pressure waveform (a) with experimental result (b), ($m_a = -1.0$)

により、ただちに、次式で与えられる。

$$R_L = R_c \quad (11)$$

すなわち、管路の特性抵抗と前述の方法で線形化した負荷抵抗を一致させれば、ほぼ満足すべき結果が得られる。

なお、マッチングのための条件式 $R_L = R_c$ を満たすように絞りを決めれば、数ミリ水柱程度の高入力圧においても近似的にマッチングを取ることができるが、この点については別に詳論する予定である。

6. おわりに

反射係数 m を導入することで、伝達関数を無限級数の形に展開し、 m がラプラス変数の関数でなく一定の値をとるとの仮定のもとに、半無限長管路の応答を利用して、負荷絞りをもち管路のステップ応答を求めた。また、解析時の仮定にかなない、かつ容易に求まる反射係数の算定法を示した。そのうえで、計算で求めた応答波形と正圧ステップ入力法による実験結果（長さ 0.3~1.0 m、内径 4~7 mm の管路）を比較し、これらの手法が Dissipation 数が小さい管路では妥当であることを明らかにした。また、現実的なマッチング法についても明らかにした。

最後に、卒業研究として実験に協力していただいた板野敏久君（現 日本楽器）に謝意を表す。

参考文献

- 1) H. M. Schaedel and G. Zwetkov: A Simple Method for Predicting Pulse Distortion on Fluidic Transmission Lines, Proc. 4th Cranfield Fluidic Conf. E3-42/56 (1970)
- 2) E. W. Reed et al.: Pseudo-random Pressure Pulses Used to Determine the Shape of Reflected

- Waves from an Opening, Measurement and Control, 7, 31/34 (1974)
- 3) 宮本ら：フルイディクス回路系における空気管路の群遅延特性, 第9回フルイディクスシンポジウム講演論文集, 90/96 (1974)
 - 4) R. E. Goodson and R. G. Leonard: A Survey of Modeling Techniques for Fluid Line Transients, Trans. ASME, Ser. D. **94**, 474/482 (1972)
 - 5) C. B. Schuder and R. C. Binder: The Response of Pneumatic Transmission Lines to Step Inputs, Trans. ASME, Ser. D. **81**, 578/584 (1959)
 - 6) F. T. Brown: The Transient Response of Fluid Lines, Trans. ASME, Ser. D. **84**, 547/553 (1962)
 - 7) 山田, 国枝: ラプラス変換・演算子法, 227/228, コロナ社 (1971)
 - 8) 吉岡, 森川: 空気圧伝送管路の過渡応答におよぼす入力圧の影響—負荷容量を持つ管路のステップ応答—, 第13回 SICE 学術講演会予稿集, 199/200 (1974)
 - 9) コールラウシュ: 実験物理学, 第2巻音響学・熱学 (久保田他訳), 43/44, 商工出版 (1956)
 - 10) R. Trendelenburg (Redigiert): Handbuch der Physik, Band 8 Akustik, 254/257, Springer (1927)
-