単一板ばね支点の変形[†]

——理論(第1近似)——

西山 卓*・増尾 龍一*・前田 親良*・村岡 茂信*

A Theoretical Analysis on Deformation of Fulcrum of a Single Flat Spring Used in Scale

Taku NISHIYAMA*, Ryuichi MASUO*, Chikayoshi MAEDA* and Shigenobu MURAOKA*

Deformation of a single flat spring in a fulcrum is analyzed. Two fundamental differential equations are solved using the first order approximation in the angle θ between a tangent at an arbitrary point P on the spring and a vertical line.

It is found that the problems on the deformation of the single flat spring can be evaluated algebraically using only the addition theorem for hyperbolic functions, and that the deformation curve of the flat spring is expressed by a part of hyperbolic or exponential curve.

Application of the fulcrum of a single flat spring to a scale is presented in comparison with the knife-edge fulcrum.

て $\sin \theta$ を θ と近似し、微分方程式の一般解を求めた。その結果、変形についての必要な値は、双曲線関数の加法定理を用いるだけで、代数的に容易に求められることがわかった。 $\sin \theta$ について、 θ のもっと高次の項まで計算を行えば、てこの傾き角がもっと大きい場合についても求まるが、これらは、別に報告するつもりである。

解析結果の応用例として、はかりの支点や重点に用いた場合の具体的な計算例を、ナイフエッジ支点との対比によって示し、ナイフエッジの刃先の曲率中心に相当する位置やてこの回転中心、四すみの誤差などが明らかとなった。

1. ま え が き

はかりに用いられる板ばね支点は、支点位置の再現性が良く、機械加工した部品を組み立てるだけでかなりの精度のものが期待できるので大量生産に適し、各種の分野のはかりに利用されている^{1), 2)}。実用されている支点には、いくつかの種類³⁾があるが、この論文で取上げた単一板ばね支点は、取付金具の構造が簡単で経済性にすぐれ、無理な変形を起こさないで、実用度の最も高い板ばね支点である。しかしながら、従来は、板ばねの変形についての解明が不十分であったので、主として零位法に限定して使用されており⁴⁾、偏位法によるはかりにもこの支点を活用するには、その変形について解明することを必要としていた。

この論文は、てこの傾き角が小さい場合の単一板ばね支点の変形を解析したものである。まず、基本の微分方程式を無次元化し、板ばねの法線の傾き θ につい

2. 理 論

2.1 基礎方程式

Fig. 1 (a) に示すように曲げ剛性 EI 、長さ l の板ばねの上端 A を、角 φ 傾けて固定し、下端 B に荷重 W 、曲げモーメント $M_B = x_B W$ をかけた状態を考える。

板ばね上の任意の点 P における法線の傾きを θ 、その曲率半径を ρ 、荷重 W の作用線と P 点の距離を x 、B 点から P 点までの板ばねの長さを l' とし、符号は、Fig. 1 に示すものをすべて正にとる。すなわち、 x_A , x_B , x は、荷重の作用点 D を通る鉛直線の右側にあるものを正、板ばねの法線の傾き φ , ϕ , θ は、その法線が右下りのときを正と約束する。すると簡単な幾何学的考察と Euler-Bernoulli の定理 $xW = EI/\rho$ からつぎの関係が得られる。

$$dl' = \rho d\theta = \frac{EI}{xW} d\theta \quad (1)$$

$$dx = \rho d\theta \sin \theta = \frac{EI}{xW} d\theta \sin \theta \quad (2)$$

ここで、長さの次元をもつ量 λ を

$$\lambda = \sqrt{EI/W} \quad (3)$$

と定義し、本論文では、長さの次元をもつ量 λ をすべてこの λ で割って無次元化し、その無次元量をもとの

[†] 第 22 回応用物理学関係連合講演会で発表 (昭 50・4)
第 7 回計測制御に関する北海道研究集会で発表 (昭 49・12)

* 大阪工業大学 大阪市旭区大宮 5-16-1

* Osaka Institute of Technology, Osaka
(Received May 30, 1975)

Fig. 1 Detailed representation for fulcrum of single flat spring and relation between notations and non-dimensional notations

量に一を付して表わすことにする。すなわち、 $x = \bar{x}\lambda$ 、 $l = \bar{l}\lambda$ のごとくである。Fig. 1 (b) は、この無次元量で表わしてあり、(1)、(2)式をこれにより書きかえるつぎのようになる。

$$d\bar{l}' = d\theta/\bar{x} \quad (1')$$

$$\bar{x}d\bar{x} = \sin\theta d\theta \quad (2')$$

この二つの式が、板ばねの変形を考える基礎方程式である。

2.2 近似解

上述の基礎方程式を一般的に解くことは別報にゆずることとし、ここでは、 θ が小さいとして、 $\sin\theta$ を θ と近似して解く。本論文では、以下すべてこの近似のもとに議論を進める。このとき、(2)' 式は、 $\bar{x}d\bar{x} = \theta d\theta$ となり、その解は、

$$\bar{x}^2 - \theta^2 = C \quad (4)$$

となる。ここに、 C は積分定数で、 C の正、負、零により、(1)' 式の解を三つに分類できる。

まず、 $C > 0$ の場合について述べる。 $C = c^2$ とおくと、(4)式は、

$$\left(\frac{\bar{x}}{c}\right)^2 - \left(\frac{\theta}{c}\right)^2 = 1 \quad (4')$$

となるから

$$\theta = c \sinh m \quad (\bar{x} = c \cosh m) \quad (5)$$

により、 m を定義することができる。この m を P 点の偏角と呼ぶこととする。 $d\theta = c \cosh m dm$ であるから、これを (1)' 式に代入すると、

$$d\bar{l} = dm \quad (6)$$

が得られる。これは容易に積分でき、A 点における偏角を m_A 、B 点のそれを m_B とすると、 m_A と m_B の関係は、

$$m_A = m_B + \bar{l} \quad (7)$$

となる。この基礎方程式の解を用いて具体的に、 ϕ 、 ψ 、 $\bar{x}_A$ 、 $\bar{x}_B$ の間の関係を求めておく。(5)、(7)式より、 ϕ は次式のような。

$$\phi = c \sinh m_A = c \sinh (m_B + \bar{l}) \quad (8)$$

ここで双曲線関数の加法定理を使って右辺を展開すると、

$$\phi = c \sinh m_B \cosh \bar{l} + c \cosh m_B \sinh \bar{l} \quad (9)$$

となり、(5)式を使えば、

$$\phi = \psi \cosh \bar{l} + \bar{x}_B \sinh \bar{l} \quad (I)$$

となる。同様にして、

$$\psi = \phi \cosh \bar{l} - \bar{x}_A \sinh \bar{l} \quad (II)$$

$$\bar{x}_A = \bar{x}_B \cosh \bar{l} + \psi \sinh \bar{l} \quad (III)$$

$$\bar{x}_B = \bar{x}_A \cosh \bar{l} - \phi \sinh \bar{l} \quad (IV)$$

が得られる。

つぎに、 $C < 0$ の場合については、 $C = -c^2$ とおき、

$$\bar{x} = c \sinh m \quad (\theta = c \cosh m) \quad (10)$$

により、 m を定義すると、上述と同様に、 m_A と m_B に関する式は、(7)式と同じになり、 ϕ 、 ψ 、 $\bar{x}_A$ 、 $\bar{x}_B$ の間の関係も (I)～(IV) 式に示したものとまったく同じとなる。

また、 $C = 0$ のときは、 $\bar{x} = \theta$ であるから、このときは、 m を定義するまでもなく、(1)' 式より、

$$\bar{l}' = \ln \frac{\bar{x}}{\bar{x}_B} \quad (\bar{x} = \bar{x}_B e^{\bar{l}'}) \quad (11)$$

となる。これより、

$$\bar{x}_A = \bar{x}_B e^{\bar{l}} \quad (\phi = \psi e^{\bar{l}}) \quad (12)$$

となり、これは、(I)～(IV) 式で、 $\bar{x}_A = \phi$ 、 $\bar{x}_B = \psi$ としたときに得られる結果と同じである。したがって、(I)～(IV) 式は、 C の値によらず常に成立する。

Fig. 2 Typical curves of single flat spring, (a) $\phi > 0$, (b) $\phi < 0$ and calculated curves (c) expressed by $\bar{x} = c \cosh \bar{y}$

Fig. 3 Typical curves of single flat spring, (a) $\bar{x}_B > 0$, (b) $\bar{x}_B < 0$, and calculated curves (c) expressed by $\bar{x} = c \sinh \bar{y}$

3. 板ばねの形状

板ばねの形状は、前述の C の値により、つぎの三つに分類できる。 $C > 0$ の場合は、Fig. 2 (a), (b) において、荷重 W の作用点 D を通る鉛直線向上きを $\bar{y}$ 軸、水平線右向きを $\bar{x}$ 軸にとり、(5)式の m が 0 となる点が $\bar{x}$ 軸上にくるように原点を選べば、 θ が小さいので、 m が $\bar{y}$ に等しいと考えられる。したがって、板ばねの形状は、この場合、

$$\bar{x} = c \cosh \bar{y} \quad (13)$$

で表わされる曲線の一部として与えられる。

$C < 0$ の場合は、(10)式の m が 0 となる点を座標の原点にとると、板ばねの形状は、

Fig. 4
(a) Typical curve of single flat spring
(b) Calculated curves expressed by $\bar{x} = \bar{x}_B e^{\bar{y}}$

$$\bar{x} = c \sinh \bar{y} \quad (14)$$

の曲線の一部となる (Fig. 3 (a), (b) 参照)。

また、 $C = 0$ の場合、Fig. 4 (a) に示すように座標をとると、(11)式より、その形状は、

$$\bar{x} = \bar{x}_B e^{\bar{y}} \quad (15)$$

の曲線の一部となる。

Fig. 2 (c), Fig. 3 (c) には、 c をパラメータにとって、それぞれ $c \cosh \bar{y}$, $c \sinh \bar{y}$ の曲線群を実線で、この曲線の傾き θ が 0.1 rad, 0.5 rad になる点を破線でむすんで示した。これより、 $\cosh \bar{y}$ では $\theta < 0$ となる領域が、 $c \sinh \bar{y}$ では $\bar{x} < 0$ となる領域があることがわかる。

Fig. 4 (b) には、 $\bar{x}_B$ をパラメータにとって $\bar{x}_B e^{\bar{y}}$ の曲線群を上と同様に示した。

4. はかりへの応用

はかりに用いられるこの支点には、取付け支点 (これを支点部と呼ぶ) のほかに他のてこと連結する連結支点、荷重を加える重点 (これを重点部と呼ぶ) がある。

これらに単一板ばね支点が用いられる場合、Fig. 5 において支点部では板ばねの上端 A で $\varphi = 0$ なるように固定され、板ばねの下端 B にてこが取付けられる。重点部においては、 A 点かてこに固定され、 B 点に荷重つり棒または、はかり皿が取付けられる。いまこれらの問題を一つにまとめて Fig. 5 に示すような力のかけかたをした場合について考えると $\bar{x}_B$ は

$$\bar{x}_B = \bar{a} + \bar{b} \phi \quad (16)$$

となる。ここに、 $\bar{a}$, $\bar{b}$ は B 点に取付けた剛体の力の作用点 D に関する B 点の座標である。この (16) 式を用いて ϕ と $\bar{x}_A$ を φ と $\bar{a}$, $\bar{b}$ で表わすと (I), (III) 式より、

Fig. 5 Fulcrum of single flat spring with load W at the point D

$$\phi = \frac{\varphi \operatorname{cosech} \bar{l} - \bar{a}}{\coth \bar{l} + \bar{b}} \quad (17)$$

$$\bar{x}_A = \frac{(\bar{b} \coth \bar{l} + 1)\varphi + \bar{a} \operatorname{cosech} \bar{l}}{\coth \bar{l} + \bar{b}} \quad (18)$$

が得られる。

4.1 ナイフエッジ支点との対比

てこの支点部、重点部にナイフエッジ支点を用いた場合は、荷重による感度変化を防ぐために刃先の曲率中心の軸線が同一平面内にあるよう製作され、この平面またはそれを代表する直線を刃線と呼んでいる。

Fig. 6, Fig. 7 はてこの支点部、重点部をそれぞれ示したもので、板ばね支点における刃線の位置を求めるために、いずれもナイフエッジ支点の場合と単一板ばね支点の場合を対比させて表わしてある。

まず、Fig. 6 の支点部において、ナイフエッジ支点の刃先の曲率中心 N に相当する板ばね支点の N' 点は荷重の作用点 D を通る鉛直線と B 点での板ばねの接線との交点となり、 $\overline{BN'} = \bar{x}_B / |\phi|$ で与えられるから (I) 式より $\overline{BN'}$ は

$$\overline{BN'} = \coth \bar{l} \quad (19)$$

となる。またてこの回転中心 O' は、A 点を通る鉛直線と B 点での板ばねの接線との交点になり $\overline{BO'} = (\bar{x}_B - \bar{x}_A) / |\phi|$ で与えられ、(I)、(II) 式より

$$\overline{BO'} = \coth \bar{l} - \operatorname{cosech} \bar{l} = \tanh \frac{\bar{l}}{2} \quad (20)$$

となる。

一方、ナイフエッジ支点の刃先の曲率半径 r に相当するものが板ばね支点では $\overline{N'O'}$ にあたり、この $\overline{N'O'}$ は (19)、(20) 式より

$$\overline{N'O'} = \overline{BN'} - \overline{BO'} = \operatorname{cosech} \bar{l} \quad (21)$$

となる。したがって、板ばねの長さに相当する $\bar{l}$ が大きくなると、 $\overline{N'O'}$ は小さくなり、これはナイフエッジ支点の場合の刃先の曲率半径 r を小さくしたものに対応する。

Fig. 6 Explanation of single flat spring compared with knife-edge in fulcrum pivot

Fig. 7 Explanation of single flat spring compared with knife-edge in load pivot

つぎに Fig. 7 は ϕ 傾いたてこの重点部を示したもので、つり棒の先端 D でなめらかなピン接手により荷重をつるしてある。したがって、このときは $\bar{a} = 0$ とみなせる。てこの刃線を決定するに必要な N' 点 (ナイフエッジ支点の N 点に相当する) は、荷重の作用点 D を通る鉛直線と A 点における板ばねの接線との交点となり $\overline{AN'} = \bar{x}_A / \phi$ で与えられるから (18) 式より

$$\overline{AN'} = \frac{\bar{b} \coth \bar{l} + 1}{\coth \bar{l} + \bar{b}} \quad (22)$$

となる。また、てこから見たつり棒の回転中心 O'' (ナイフエッジの O 点に相当する) は、A 点における板ばねの接線と B 点におけるそれとの交点となり、 $\overline{AO''}$ は

$$\overline{AO''} = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B - \bar{l}\phi}{\phi - \phi} = \frac{\bar{b} + \coth \frac{\bar{l}}{2} - \frac{\bar{l}}{2} \operatorname{cosech}^2 \frac{\bar{l}}{2}}{1 + \bar{b} \coth \frac{\bar{l}}{2}} \quad (23)$$

となる。Fig. 8 には $\overline{AN''}$ 、 $\overline{AO''}$ を $\bar{l}$ の関数として $\bar{b}$ をパラメータにとって示してある。 $\overline{AN''}$ 、 $\overline{AO''}$ の値はいずれも $\bar{l}$ がある程度大きくなるとつり棒の長さに相当する $\bar{b}$ にほとんど関係しないことがわかる。

4.2 てこの感度について

単一板ばね支点を用いたてこの感度について考える。いま、Fig. 6 に示す重量 w_b 、重心 G のてこの Q

Fig. 8 Both $\overline{AN''}$ and $\overline{AO''}$ as a function of $\bar{l}$

点に微小荷重 ΔW をかけることにより、てこが ϕ 傾いてつりあつたとする。ここで $W = w_0 + \Delta W$ とおけば、 $\bar{a}, \bar{b}$ は

$$\bar{a} = \frac{\Delta W}{W} \bar{L} \quad \bar{b} = \frac{w_0}{W} \bar{h} \quad (24)$$

となる。てこの感度 S は $|\phi|/\Delta W$ と定義されているから(17)式より

$$S = \frac{|\phi|}{\Delta W} = \frac{\bar{L}}{W \coth \bar{l} + w_0 \bar{h}} \quad (25)$$

となる。(25)式の分母はてこの復元モーメントに相当するものを表わし、第1項が板ばねの弾性によるもので、第2項が重力によるものである。

ここで、前節の(19)式を用いて弾性による復元モーメントに相当する項を重力によるもののように位置エネルギーで表わすと(25)式は

$$S = \frac{\bar{L}}{w_0(BN' + \bar{h})} \quad (25)'$$

と書きかえることができる。これは、ナイフエッジ支点を用いたてこの感度の式とまったく同じであり、ナイフエッジの刃先の曲率中心に相当する N' 点からてこの重心点 G までの距離によって、てこの傾きによる復元モーメントを求めれば、板ばね支点を用いたてこの感度はナイフエッジ支点を用いたものと同じになる。

4.3 四すみの誤差

はかり皿を B 点に固定した場合は Fig. 9 のようになり、皿上の荷重の位置により $\bar{a}$ の値が変化し、 $\bar{x}_A$ も変化する。したがって、はかりの指示値も変化する事となり誤差を生じる。この誤差を四すみの誤差と呼んでいる。

これは(18)式の $\bar{a}$ の変化によって生じるが、 $\operatorname{cosech} \bar{l}$ は $\bar{l}$ が大きくなると急激に小さくなるから、 $\bar{l}$ を大きくするだけでこの誤差をきわめて小さくすることができる。

5. ま と め

単一板ばねの変形について基礎方程式を導き、板ばねの法線の傾き θ について $\sin \theta$ を θ と近似してその解を求めつぎの結論を得た。

① 板ばねの形状は、変形にあずかる力のかかり方や板ばねの固定端の傾きによって、基礎方程式の解である(4)式の積分定数 C が正なら $c \cosh \eta$ で、負なら $c \sinh \eta$ で、零なら $\bar{x}_{Be}$ で表わされる曲線群の一部分となる。

② 板ばねの変形を決定する具体的な量 $\phi, \bar{\phi}, \bar{x}_A, \bar{x}_B$ の間の関係は、①の形状によらずいつでも(I)~(IV)式で表わされる。

③ 上記の解析結果の応用例として、はかりのてこの支点部、重点部に単一板ばね支点を使用した場合、設計に必要なナイフエッジ支点の刃先の曲率中心に相当する位置、回転中心、てこの感度、四すみの誤差を求めた。

④ 単一板ばね支点とナイフエッジ支点との対比は、Fig. 6, Fig. 7 のようになる。

Fig. 9 Shift error

参 考 文 献

- 1) 増尾, 前田: はかりに使われる弾性支点について, 計量管理ジャーナル, 1-2, 10/16 (1968)
- 2) 尾垣, 明間: はかりに用いられる弾性支点, 日本機械学会誌, 71-591, 551/555 (1968)
- 3) R. Masuo and C. Maeda: Performance of Elastic Fulcrum in a Beam Type Balance, ISA, Proceedings, 19, part 1 21 (1964)
- 4) 増尾, 前田: てこの弾性支点について, 日本機械学会論文集, 26-172, 1714/1719 (1960)