相関検波による平均周波数および平均電力の測定[†]

小林 正明*・大沢 寿**・森 永規彦***・滑 川 敏彦***

Mean Frequency and Mean Power Measurement Using Correlation Detection

Masaaki KOBAYASHI*, Hisashi OSAWA**, Norihiko MORINAGA*** and Toshihiko NAMEKAWA***

This paper is concerned with the problems of measuring the mean frequency and the mean power of a zero-mean, stationary, narrow-band Gaussian random signal in the presence of additive Gaussian noise.

An experimental mean frequency measurement system using correlation detection is constructed for the purpose of obtaining practical characteristics. The average output and the output signal-to-noise ratio of the system obtained by experiment are compared with the theoretical values.

A new method for measuring the mean power is also described and analyzed. The new method utilizes the mean frequency measurement system, and the mean power of a Gaussian random signal is determined using a reference sine wave. The results of the theoretical analysis on this method are supporting by experiment.

1. ま え が き

雑音状信号の電力スペクトル分布から信号源や信号伝送路の性質を把握するため、電力スペクトル分布の推定あるいは平均周波数、平均電力などそのパラメータの検出が、計測、制御、通信をはじめ工学各分野を通じて重要な問題の一つとなっている。ことに、雑音状信号がガウス分布に従う場合その統計的諸性質は電力スペクトル分布あるいは相関関数に集約されており、このような意味においても電力スペクトル分布やそのパラメータの検出が重要な問題となってくる。

電力スペクトル分布の平均周波数の測定法の一つに零交さカウンタの一種で相関検波による平均周波数測定方式¹⁾があり、Pickard¹⁾、Pawula²⁾、筆者ら³⁾によって理論解析がなされている。一方、平均電力の測定法については、いわゆる Radiometer に関して従来から多くの研究がなされており、レベル交さ数を利用したデジタル形 Radiometer⁴⁾も発表されている。レベル交さ形の平均電力測定法は、雑音状信号のレベル交さ数と平均電力の間にある一定の統計的性質に基づいているが、レベルを設定するかわりに被測定雑音状信号に基準正弦波を加えることにより、上記零交さ形の相関検波による平均周波数測定方式においても平均電力の測定が可能となる。

そこで本稿では、相関検波による平均周波数測定方式に関して筆者らが行った実験結果について報告するとともに、本方式を利用した平均電力測定法を新たに提案しその測定原理と基本特性および実験結果について述べる。

2. 基本構成

本方式の基本構成を Fig. 1 に示す。本稿で扱う被測定雑音状信号すなわち Fig. 1 の入力信号 $S(t)$ は、ある十分高い代表周波数のまわりに狭帯域の連続スペクトルをもつ雑音状信号で、平均値 0 の定常狭帯域ガウス形ランダムプロセスと仮定する。 $S(t)$ は平均周波数(注1)でまとめた狭帯域表示を用いるとつぎのように表現できる²⁾。

$$S(t) = x(t) \cos \{(\omega_0 + \omega_c)t\} - y(t) \sin \{(\omega_0 + \omega_c)t\} \quad (1)$$

ただし、 $x(t), y(t)$ はたがいに統計的に独立な平均値 0 の低周波ガウス形ランダムプロセスで、 ω_0, ω_c は

(注1) $S(t)$ の電力スペクトル分布を $G_s(\omega)$ とすれば、平均周波数 $(\omega_0 + \omega_c) = \int_0^\infty \omega G_s(\omega) d\omega / \int_0^\infty G_s(\omega) d\omega$ で定義される¹⁾。また、角周波数を単に周波数と記す。

† 電子通信学会通信方式研究会で発表 (昭 48・6)

* 三菱電機(株)通信機製作所 尼崎市南清水字中野 80

** 愛媛大学工学部 松山市文京町 3-1

*** 大阪大学工学部 吹田市字山田上

* Communication Equipment Works, Mitsubishi Electric Co., Ltd., Amagasaki

** Faculty of Engineering, Ehime University, Matsuyama

*** Faculty of Engineering, Osaka University, Suita
(Received February 6, 1976)

Fig. 1 Mean frequency and mean power measurement system using correlation detection

それぞれ局発信号の角周波数, ω_0 からの角周波数偏差である。また, 各チャネルの入力雑音 $N_1(t), N_2(t)$ はたがいにおよび信号とも統計的に独立な平均値 0 の定常狭帯域ガウス形ランダムプロセスと仮定する。

平均電力測定の際, チャネル 2 の入力に加えられる一定振幅 Q , 周波数 $\omega_0 + \omega_r$ の基準正弦波を $R_q(t)$ とする。すなわち,

$$R_q(t) = -Q \cos \{(\omega_0 + \omega_r)t\} \quad (2)$$

ただし, 振幅 Q は既知とする。なお, 上式では計算の便宜上, 負号をつけ正弦波を余弦で表現している。平均周波数測定の際は基準正弦波を加えず, $R_q(t) \equiv 0$ とする。

以上の入力各成分は周波数が ω_0 で 90° 位相の異なる二つの局発信号によって周波数変換され差周波数成分がリミッタに加えられる。チャネル 1 および 2 のリミッタ入力をそれぞれ $u(t), v(t)$ とすると

$$u(t) = s_1(t) + n_1(t) \quad (3)$$

$$v(t) = s_2(t) + n_2(t) + Q \sin(\omega_r t + \theta) \quad (4)$$

ただし, ω_r は周波数変換後の基準正弦波の周波数, $s_1(t), s_2(t), n_1(t)$ および $n_2(t)$ はそれぞれ各チャネルのリミッタ入力の信号成分および雑音成分で $S(t), N_1(t), N_2(t)$ が周波数変換されたものである。また, θ は局発信号の位相を表わし, 0 から 2π で一様分布し, 他のすべての確率変数とは統計的に独立である。

ここで各チャネルのリミッタは, その入出力特性がつぎのように符号関数 sgn で与えられる理想リミッタと仮定し,

$$v_{\text{out}} = \text{sgn } v_{\text{in}} = \begin{cases} +1, & v_{\text{in}} \geq 0 \\ -1, & v_{\text{in}} < 0 \end{cases} \quad (5)$$

さらに, 積分器を理想積分器と仮定し, そのインパルスレスポンス $h(t)$ を

$$h(t) = \begin{cases} \pi/2T, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & t < 0, t > T \end{cases} \quad (6)$$

とすれば, 時刻 t における積分器出力, すなわち本方式の出力 $z(t)$ は

$$z(t) = \frac{\pi}{2T} \int_{t-T}^t \text{sgn } v(t) \left\{ \frac{d}{dt} \text{sgn } u(t) \right\} dt \quad (7)$$

と表わされる。ただし, T は積分時間を表わす。

3. 測定原理

3.1 平均周波数の測定原理

相関検波による平均周波数測定方式については文献 1)~3) で解析されており, ここではその結果を用いて測定原理を簡単に説明する。

入力信号 $S(t)$ は周波数変換されてリミッタ入力では平均周波数が ω_c となっており, 以下 ω_c を信号の平均周波数として扱う(注 2)。また, 平均周波数測定の際には基準正弦波は加えないので, $R_q(t) \equiv 0$ とする。

出力の平均値 $E[z(t)]$ は次式で与えられる¹⁾。

$$E[z(t)] = \omega_c A, \quad A \equiv \sqrt{a_1 a_2 / (a_1 + 1)(a_2 + 1)} \quad (8)$$

ただし, $E[\]$ はアンサンブル平均を意味し, a_1, a_2 は各チャネルの入力 SN 比を表わす。すなわち,

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= P_s / P_{N1}, \quad a_2 = P_s / P_{N2} \\ P_s &= E[S^2(t)], \quad P_{N1} = E[N_1^2(t)], \\ P_{N2} &= E[N_2^2(t)] \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

(8) 式に示されるように出力の平均値は $\omega_c A$ となり信号の平均周波数 ω_c に比例している(注 3)。したがって, 積分時間が十分長いとき出力 $z(t)$ はほぼ一定(直流)となり, 出力の直流成分 $\omega_c A$ を読むことにより信号の平均周波数を知ることができる。信号の電力スペクトル分布が特に対称な場合にはその中心周波数と平均周波数は一致し, 信号の中心周波数が測定される。

出力の平均値は入力雑音の影響を受けて真値 ω_c の A 倍 ($0 \leq A \leq 1$) の値をとる。入力雑音がない場合 $A = 1$ となるが, 入力雑音がある場合出力の直流レベルに入力 SN 比 a_1, a_2 によって決まる一定の偏り(バイアス) A が生じ出力の較正が必要となる。ただし, 本方式は相関検波を用いているため入力雑音があたがい統計的に独立であれば入力雑音の平均周波数は出力の平均値に寄与せず, これに関する較正は不要で, 入力 SN 比に関する較正のみを行えばよい。

積分時間 T は有限のため出力には直流分の他に動揺成分が生じてこれが測定誤差の原因となる。直流分を

(注 2) ω_0 は既知であるから, ω_c が測定されれば, もとの平均周波数 $\omega_0 + \omega_c$ が求まる。

(注 3) (1) 式において平均周波数でなく任意の代表周波数でまとめた狭帯表示を用いても (8) 式の結果を得る。

出力の信号成分と定義し、そのまわりのゆらぎを出力の雑音成分と定義すると、本方式の出力 SN 比 $(S/N)_0$ は次式で与えられる。

$$(S/N)_0 = \{E[z(t)]\}^2 / \{E[z^2(t)] - (E[z(t)])^2\} \quad (10)$$

(10) 式の出力 SN 比は出力の正規化平均 2 乗誤差の逆数を表わしており、測定精度の目安となる³⁾。

3.2 平均電力の測定原理

相関検波による平均周波数測定方式を応用し、基準正弦波 $R_q(t)$ を用いて雑音状信号 $S(t)$ の平均電力(注4) P_s を測定することができる。本節では基準正弦波を加えた場合の出力の平均値を求め、本方式の測定原理および基本特性について述べる。

(7) 式および、アンサンブル平均、時間積分、時間微分の順序変更^{5), 6)}により、出力の平均値は

$$E[z(t)] = \frac{\pi}{2T} \int_{t-T}^t \left(-\frac{\partial}{\partial t} E[\text{sgn } v(t) \text{sgn } u(t-\tau)] \right)_{\tau=0} dt \quad (11)$$

となる。いま、

$$\left. \begin{aligned} y_1 &\equiv \{s_1(t-\tau) + n_1(t-\tau)\} / \sqrt{P_s + P_{N1}} \\ y_2 &\equiv \{s_2(t) + n_2(t)\} / \sqrt{P_s + P_{N2}} \\ r_0 &\equiv Q \sin(\omega_c t + \theta) / \sqrt{P_s + P_{N2}} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

とおくと y_1, y_2 もまたガウス分布に従い、(11) 式右辺の平均演算は

$$\begin{aligned} E[\text{sgn } v(t) \text{sgn } u(t-\tau)] &= E[\text{sgn}(y_2 + r_0) \text{sgn } y_1] \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-r_0} \exp\left(-\frac{y_2^2}{2}\right) \cdot \text{erf}\{-\lambda(\tau)y_2/\sqrt{1-\lambda^2(\tau)}\} dy_2 \end{aligned} \quad (13)$$

となる。ただし、

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt, \quad \lambda(\tau) = E[y_1 y_2] \quad (14)$$

(11), (13) 式より

$$\begin{aligned} E[z(t)] &= \frac{\omega_c A}{T} \int_{t-T}^t \exp\left(-\frac{1}{2} r_0^2\right) dt \\ &= \frac{\omega_c A}{2\pi} \int_{\phi-2\pi}^{\phi} \exp\left[-\frac{Q^2}{2(P_s + P_{N2})} \sin^2 \phi\right] d\phi \end{aligned} \quad (15)$$

ただし、 $\phi = \omega_c t + \theta$, $\omega_c T = 2\pi$

となる。(15) 式の積分を行うとつぎのように出力の平均値 $E[z(t)]$ が求まる。

$$\begin{aligned} E[z(t)] &= \omega_c A \exp\left[-\frac{Q^2}{4(P_s + P_{N2})}\right] \cdot I_0\left[\frac{Q^2}{4(P_s + P_{N2})}\right] \\ &= \omega_c A \exp\left[-\frac{a_2}{a_2+1} \frac{q}{2}\right] \cdot I_0\left[\frac{a_2}{a_2+1} \frac{q}{2}\right] \end{aligned} \quad (16)$$

ただし、 $I_0(\cdot)$ は第 1 種 0 次変形 Bessel 関数、 q は基準正弦波電力対被測定信号電力比で、

$$q = Q^2 / 2P_s \quad (17)$$

で定義される。

つぎに本方式の測定原理と基本特性について述べる。まず、入力雑音がなく $a_1 = a_2 = \infty$ ($A=1$) の場合、

$$E[z(t)] = \omega_c \exp(-q/2) \cdot I_0(q/2) \quad (18)$$

となり、 ω_c を既知とすれば出力の平均値すなわち出力の直流レベルから q が求まって、(17) 式と Q の値から被測定信号電力 P_s が得られる。これが本方式の測定原理である。被測定信号 $S(t)$ の中心周波数 $\omega_0 + \omega_c$ は通常 (Radiometer の場合) 入力フィルタの中心周波数であって、 ω_c は既知と考えられる。もし未知ならば基準正弦波を加えず $Q=0$ として測定することにより ω_c が得られる。以下、 ω_c を既知として扱うことにする。

入力雑音が存在し $P_{N1} = P_{N2}$, したがって $a \equiv a_1 = a_2$ の場合、

$$\begin{aligned} E[z(t)] &= \omega_c A \exp(-qA/2) \cdot I_0(qA/2), \\ A &= a/(a+1) \end{aligned} \quad (19)$$

となる。この場合、入力雑音の平均電力が未知であっても、まず基準正弦波を加えずに ($Q=q=0$) 測定して A を求め、つぎに基準正弦波を加えて測定し ($q \neq 0$) $qA/2$ を求めると、両結果から q が得られ P_s を求めることができる。

入力雑音の平均電力 P_{N1}, P_{N2} が異なる場合には基準正弦波の大きさを変えて 3 回 (1 回は $Q=0$ とする) 測定することにより P_s が求まる⁷⁾。

このように本方式では較正用の標準雑音源を用いずに、未知の入力雑音電力と分離して P_s を測定することができる。入力雑音電力がすべて既知であれば $E[z(t)]$ と P_s の 1 対 1 の対応関係から、1 回の測定で P_s を得ることができる。なお、本方式では基準正弦波の周波数を被測定信号の中心周波数に一致させる必要はなく任意の値に選べる。また、基準正弦波をチャネル 1 に加えても、チャネル 2 に加えた場合と同様の特性が得られる。

平均電力測定の際も、出力のゆらぎ成分に比べて直流分が大であるほど高精度で被測定信号電力を求めう

(注4) 本稿では、通信方式や雑音解析の分野でよく用いられるように⁴⁾、(9) 式で定義される電圧の 2 乗平均値を平均電力と呼ぶことにする。したがって、普通の電力が必要なきは較正を行えばよい。

るので, (10)式により出力 SN 比を定義することができる。

レベル交差形の平均電力測定法は被測定信号 (ガウス形ランダムプロセスとする) のレベル V_0 の上向き (または下向き) の交差数 N_V の平均値 $E[N_V]$ と平均電力 P_S との間につきの関係

$$E[N_V] = f_s T \exp(-V_0^2/2P_S) \quad (20)$$

ただし, f_s は被測定信号の単位時間当りの上向き (または下向き) の平均零交差数, T は計数時間, が成り立つことを利用している⁴⁾。(18)式と(20)式を比較すれば明らかのように, レベル交差形の測定法と基準正弦波を用いる本方式とはその出力特性が類似していることがわかる。すなわち, 両方式ともガウス分布を有する信号に対する同種の統計的特性を利用した方式であって, レベル交差形の測定法は平均出力をレベルにより較正して平均電力を測定するのに対し, 本方式は基準正弦波の振幅により較正して測定することになる。また, レベル交差形, 本方式のいずれも計数形の測定法を採っており積分器のかわりにパルスカウンタを用いてともにデジタル処理による測定を行うことができる。電波天文における信号電力は通常 $10^{-15} \sim 10^{-20}$ W 程度の微小電力であり⁹⁾, 信号の増幅が必要となる。ダイオードなどによる 2 乗則検波器を利用した Total Power Radiometer⁹⁾ や, レベル交差形の Radiometer と異なり, 本方式による Radiometer はリミッタを用い入力に基準正弦波を加えるためそれ以後の増幅器の利得変動に対して不感応であり, 原理的に増幅器利得変動の影響を直接受けないという特長を有している。

4. 実験装置

Fig. 1 の構成の実験装置を試作し平均周波数 $(\omega_0 + \omega_c)/2\pi = 500$ kHz の狭帯域ガウス雑音を被測定信号として実験を行った。被測定信号の実効帯域幅⁸⁾ ω_b は

Fig. 2 Power spectrum of the input signal used in experiment

$\omega_b/2\pi = 3.13$ kHz で, その電力スペクトル分布は Fig. 2 に示すような形をしている。ほかに, 二つの独立な狭帯域ガウス雑音を各チャネルの入力雑音として用いたがそれらの電力スペクトル分布の形は Fig. 2 と同様である。実験では局発信号の周波数を可変とし被測定信号の周波数変換後の平均周波数 $\omega_c/2\pi$ を 0 Hz $\sim$ 100 kHz の範囲内にとった。微分器として時定数 3×10^{-8} sec の CR 微分回路を用い, 積分器として RC 1 段の積分回路を用いた。 RC 積分回路の積分時間を定義するため等価積分時間⁹⁾を導入した。 RC 積分器の時定数を T_{RC} とすれば, 等価積分時間 T_e は $T_e = 2T_{RC}$ で与えられる。実験では (6) 式の T と等価な積分時間として T_e を用いた。

5. 実験結果および検討

まず, 平均周波数測定を例にとって各部の波形例を Fig. 3 に示す。同図 (a), (b) は掛算器出力の波形を示している。図中の正のパルス数と負のパルス数の差

(a) multiplier output for $a_1=a_2=1$ ($\omega_c/2\pi=37.0$ kHz, $\omega_b/2\pi=3.13$ kHz).

(b) multiplier output for $a_1=a_2=0$.

(c) system output $z(t)$ for $a_1=a_2=\infty$ ($\omega_c/2\pi=43.0$ kHz, $\omega_b/2\pi=3.13$ kHz, $T_e=0.6$ ms).

Fig. 3 Observed waveforms of the multiplier output and the system output

Fig. 4 Output characteristic of the mean frequency measurement system for sinusoidal input in the absence of input noises

に比例した直流成分が出力 $z(t)$ に現われる。(8)式より入力信号がない場合 ($a_1 = a_2 = 0$) 出力の平均値は 0 となるが、同図(b)にみられるようにこの場合正負両パルス数がほぼ等しく、波形例からも出力の直流成分が 0 となることがわかる。Fig. 3(c)は出力 $z(t)$ の波形例を示している。同図の直流レベルが出力の平均値 $E[z(t)]$ に相当する場合、積分時間が十分大きくないため出力のゆらぎが認められる。

平均電力測定の際も、Fig. 3 と同様の波形が得られる。

5.1 平均周波数測定

はじめに、Fig. 4に入力信号を特に正弦波とした場合の試作装置の出力特性を示す。入力正弦波、周波数に対する出力の直線性は良く、積分回路の時定数を適当な値にとれば FM 信号の復調を行うことができる。

つぎに、入力信号が狭帯域ガウス雑音の場合の測定結果を示す。Fig. 5 は入力雑音による出力のバイアスを、Fig. 6 は出力 SN 比を示している。ただし、Fig. 6 の実線は理論値ではなく、実験結果を結んだ曲線である。Fig. 5 にみられるようにバイアスの実験値

Fig. 5 Average output of the mean frequency measurement system

Fig. 6 Output SNR of the experimental mean frequency measurement system versus input SNR $a = a_1 = a_2$

は(8)式による理論値とよく合っている。出力 SN 比は積分時間を増すにつれて大きくなる。Fig. 6 の出力 SN 比は理論値³⁾をやや上回る結果となっているが、これは実験で用いた出力の分散測定回路中の直流分除去回路がゆらぎ成分の一部をも除去しているためであると考えられる。しかし、出力 SN 比の入力 SN 比に対する変化の様子は理論解析結果と一致している。

5.2 平均電力測定

実験においては $a \equiv a_1 = a_2 = \infty$ ($A = 1$) の場合および $a \equiv a_1 = a_2 = 1$ ($A = 0.5$) の場合について測定を行った。Fig. 7 に出力の平均値を、Fig. 8 に出力 SN 比を示す。Fig. 7 の実験値は(16)式あるいは(19)式による理論値と合っている。 $a = \infty$, $a = 1$ いずれの場合も出力の平均値から横軸 q の値が求められ、 q と基準正弦波の振幅 Q から被測定信号電力 P_s を得る。Fig. 8 の出力 SN 比は積分時間が 10 倍になると 10 dB 上昇しており、平均周波数測定の際の出力 SN 比特性と同様である。平均電力、平均周波数のどちらも積分時間を十分大きくとることにより高精度で測定できる。

なお、本方式による平均電力測定法はレベル交差形測定法と同様測定信号がガウス分布していることに基

Fig. 7 Average output of the mean power measurement system

Fig. 8 Output SNR of the experimental mean power measurement system

づいており、確率分布が変われば出力特性も異なってくる。したがって正弦波を被測定信号とすることはできない。

6. む す び

相関検波による平均周波数測定方式に関して試作装置による実験的考察を加え、動作内容および基本特性を検証した。さらに、これを利用した平均電力測定法を新しく提案しその測定原理を述べ基本特性を明らかにするとともに、実験によりその裏付けを行った。これらの結果は本方式を活用する際の有用な資料になるものと考えられる。

おわりに、実験装置の製作と測定にご協力いただいた静谷治氏（現在、松下電器産業(株)勤務）ならびに筆者の一人が、日頃ご指導いただく愛媛大学田崎三郎教授に深く感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) T.B. Pickard: The Effect of Noise upon a Method of Frequency Measurement, IRE Trans., **IT-4**, 83/88 (1958)
- 2) R.B. Pawula: Analysis of an Estimator of the Center Frequency of a Power Spectrum, IEEE Trans., **IT-14**, 669/676 (1968)
- 3) 小林, 大沢, 森永, 滑川: 相関検波による平均周波数測定方式の出力 SN 比, 電子通信学会論文誌, **56-B-9**, 379/386 (1973)
- 4) M.E. Tiuri and S.J. Halme: Digital Measurement of Narrowband Noise Power, Proc. IEEE, **55**, 1577/1582 (1967)
- 5) W.B. Davenport, Jr. and W.L. Root: An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise, p. 65, McGraw-Hill, New York (1958)
- 6) D. Middleton: An Introduction to Statistical Communication Theory, p. 68, McGraw-Hill, New York (1960)
- 7) 小林, 大沢, 森永, 滑川: 雑音電力の零交さ型測定方式, 電子通信学会通信方式研究会資料, **CS 73-66**(1973)
- 8) N.M. Blachman: Noise and Its Effect on Communication, p. 42, McGraw-Hill, New York (1966)
- 9) M.E. Tiuri: Radio Astronomy Receivers, IEEE Trans., **AP-12**, 930/938 (1964)