観測器を用いたモデル規範形適応制御系の リアプノフ法による設計†

真 野 和 生*・大 野 修 治*・岩 井 善 太*

On a Design of Model Reference Adaptive Control Systems
Using Observers by Liapunov's Direct Method

Kazuo MANO*, Shuji OHNO* and Zenta IWAI*

In this paper, a design method of model reference adaptive control systems (MRACS) with inaccessible states using Liapunov's direct method is described.

First we introduce an error equation which governs a motion of the difference between the plant states and the model states. Then a full order observer is applied for thus obtained error equation, and the adaptive law is constructed by using the outputs of the observer. Stability of the whole MRACS is guaranteed as seen by applying the eventual stability theorem given by LaSalle and Rath in 1964.

The above mentioned MRACS problems have already been treated by Ohta (1974) from the point view of Popov's hyperstability theorem. But the condition obtained by him is too restrictive, so that it seems to be difficult to apply his method to general MRACS with inaccessible states. Such problems are also examined to compare Ohta's method with our method proposed here.

1. 緒 言

オートパイロットなどの設計のために広く研究されている制御系にモデル規範形適応制御系 (MRACS) がある。この MRACS は、ある制御対象の望ましい特性を有するモデル系を構成し、制御対象の特性が環境などの変化で変わるときモデルの特性に一致するよう制御系内のパラメータを調整するものである。

パラメータ調整則を決定するための方法として Whitaker らによって導入された MIT rule¹⁾をはじめとするこう配法²⁾、ループ内の安定性に主眼を置いたリアプノフ法^{3)~5)}、ポポフ法⁶⁾などがある。どの構成法もプラントの内部状態が直接検出できることを

必要とするが、多変数系のように状態変数が多い系ではそれらがすべて検出可能な場合は少なく、したがって上述の方法による MRACS を構成することは困難となる。このような場合については、いわゆるオブザーバ理論の適用が考えられる^{9), 10)}。しかし、適応制御系は内部に未知変動パラメータを含んでいるためオブザーバをそのままの形で適用することはできない。この問題は最近太田⁷⁾によって取扱われ、適応制御機構内にある種の観測機構を導入することで状態変数のすべてを必要としない形で MRACS を構成できることが示された。しかし、その手法では安定性保証のためにポポフの超安定定理¹³⁾を用いているため観測機構への入力として“拡張された出力”(そのすべてが直接検出可能とは限らない)を再構成する必要がある。すなわち、直接検出可能な出力のみでパラメータ調整則が必ずしも構成できないという大きな欠点を有している。また、Monopoli は状態変数フィルタを導入して検出可能な出力のみで MRACS を構成しているが⁸⁾、この場合適応制御系は1入力-1出力系に限られ、また、出力の微分値を必要とする場合がある。

本報告では、内部状態が直接検出できない場合の MRACS 構成問題をリアプノフの直接法により考察し、適応機構内に含まれる観測器がオブザーバ理論に基づいて構成できることを示す。以下では、はじめにリアプノフ法による MRACS について述べる。つぎに観測器の構成法を述べ、観測器出力を用いた適応則を導入することにより安定性の保証された MRACS が実現できることを示す。特に系が正準形で与えられる場合観測器の低次元化が可能なことを示す。またポポフ法によりこの種の問題を扱った太田氏の結果と本手法のそれとの比較検討も行っている。

2. リアプノフ法による MRACS

後述の便のため、状態量がすべて検出可能な場合のリアプノフ法による MRACS の構成について Sutherland & Boland⁵⁾によって得られている結果を中心

† 第14回計測自動制御学会学術講演会で発表(昭50・8)

* 熊本大学工学部 熊本市黒髪 2-39-1

* Faculty of Engineering, Kumamoto University, Kumamoto

(Received January 28, 1976)

に述べておく。

実在するプラントが

$$\dot{\mathbf{x}}_p = \mathbf{A}_p(t)\mathbf{x}_p + \mathbf{B}_p(t)\mathbf{u} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{y}_p = \mathbf{C}'_p \mathbf{x}_p, \quad \mathbf{x}_p(0) = \mathbf{x}_{p0} \quad (2.2)$$

なる方程式で記述されているものとする。ここで「,」は転置を示す。ただし、 $\mathbf{x}_p$ は n 次状態ベクトル、 $\mathbf{u}$ は有界な r 次操作ベクトル、 $\mathbf{y}_p$ は m 次出力ベクトルである。また、 $\mathbf{C}$ は $n \times m$ 定数行列、 $\mathbf{A}_p(t)$ 、 $\mathbf{B}_p(t)$ は未知変動パラメータと可調整パラメータからなる $n \times n$ 、 $n \times r$ 行列

$$\mathbf{A}_p(t) = (a_{ij}^p(t)) = (C_{ij}^a(t) + K_{ij}^a(t)) \quad (2.3)$$

$$i=1, \dots, n, \quad j=1, \dots, n$$

$$\mathbf{B}_p(t) = (b_{ij}^p(t)) = (C_{ij}^b(t) + K_{ij}^b(t)) \quad (2.4)$$

$$i=1, \dots, n, \quad j=1, \dots, r$$

である。ここに、 $C_{ij}^l(t)$ は未知変動パラメータ、 $K_{ij}^l(t)$ は可調整パラメータ ($l=a, b$) を示す。変動パラメータの初期値 $C_{ij}^l(0)$ は既知であり、かつ $C_{ij}^l(t)$ の時間変化は適応速度に比べ十分小さいものとする。すなわち、

$$|\dot{K}_{ij}^l(t)| \gg |\dot{C}_{ij}^l(t)| \quad (2.5)$$

また、ペア $(\mathbf{A}_p(t), \mathbf{C}'_p)$ は一様可観測とする。

理想の応答を与える規範モデルは

$$\dot{\mathbf{x}}_m = \mathbf{A}_m \mathbf{x}_m + \mathbf{B}_m \mathbf{u} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{y}_m = \mathbf{C}'_m \mathbf{x}_m, \quad \mathbf{x}_m(0) = \mathbf{x}_{m0} \quad (2.7)$$

と与えるものとする。ここに次元、構造はプラントと同じであり、 $\mathbf{A}_m$ は漸近安定な定数行列である。

プラントとモデルの状態誤差および出力誤差を

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_m - \mathbf{x}_p \quad (2.8)$$

$$\Delta \mathbf{y} = \mathbf{y}_m - \mathbf{y}_p \quad (2.9)$$

と定義すれば、(2.1)、(2.2)、(2.6)、(2.7)式より

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_m \Delta \mathbf{x} + \mathbf{A}(t)\mathbf{x}_p + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \quad (2.10)$$

$$\Delta \mathbf{y} = \mathbf{C}' \Delta \mathbf{x}, \quad \Delta \mathbf{x}(0) = \Delta \mathbf{x}_0 \quad (2.11)$$

を得る。ここに、 $\Delta \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{m0} - \mathbf{x}_{p0}$

$$\mathbf{A}(t) = (a_{ij}(t)) = \mathbf{A}_m - \mathbf{A}_p(t), \quad (2.12)$$

$$i, j=1, \dots, n$$

$$\mathbf{B}(t) = (b_{ij}(t)) = \mathbf{B}_m - \mathbf{B}_p(t), \quad (2.13)$$

$$i=1, \dots, n, \quad j=1, \dots, r$$

である。以後、(2.10)、(2.11)式を誤差方程式系という。

モデル規範形適応制御の目的はプラントパラメータが変化したとき

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta \mathbf{x} = 0$$

となるよう可調整パラメータを調整することである。

いま、リアプノフ関数

$$V = \Delta \mathbf{x}' \mathbf{P} \Delta \mathbf{x} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\alpha_{ij}} (a_{ij} + \beta_{ij} \Delta \mathbf{x}' \mathbf{p}_i \mathbf{x}_{pj})^2$$

$$+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r \frac{1}{\gamma_{ij}} (b_{ij} + \delta_{ij} \Delta \mathbf{x}' \mathbf{p}_i \mathbf{u}_j)^2 \quad (2.14)$$

を考え⁵⁾、適応則を

$$\dot{a}_{ij} = -\alpha_{ij} \Delta \mathbf{x}' \mathbf{p}_i \mathbf{x}_{pj} - \beta_{ij} \frac{d}{dt} (\Delta \mathbf{x}' \mathbf{p}_i \mathbf{x}_{pj}) \quad (2.15)$$

$$\dot{b}_{ij} = -\gamma_{ij} \Delta \mathbf{x}' \mathbf{p}_i \mathbf{u}_j - \delta_{ij} \frac{d}{dt} (\Delta \mathbf{x}' \mathbf{p}_i \mathbf{u}_j) \quad (2.16)$$

と選べば、 $\dot{V} < 0$ 、 $\Delta \mathbf{x} \neq 0$ となり $t \rightarrow \infty$ で $\Delta \mathbf{x} \rightarrow 0$ が保証されることになる。ここに、 α_{ij} 、 $\gamma_{ij} > 0$ 、 β_{ij} 、 $\delta_{ij} \geq 0$ なる任意の定数、 $\mathbf{p}_i$ は正定値対称行列 $\mathbf{P}$ の第 i 列ベクトルである。このときパラメータ調整則は(2.12)、(2.13)式より

$$\dot{a}_{ij}(t) = \dot{a}_m - \dot{a}_{ij}^p(t) = -\dot{K}_{ij}^a(t) \quad (2.17)$$

$$\dot{b}_{ij}(t) = \dot{b}_m - \dot{b}_{ij}^p(t) = -\dot{K}_{ij}^b(t) \quad (2.18)$$

となる。(2.15)、(2.16)式から明らかなように、すべての状態量が得られない場合は上述の MRACS を実現することはできない。

3. 状態観測器を用いた MRACS の構成

本節では検出可能な入出力 $\mathbf{u}$ 、 $\mathbf{y}_p$ 、 $\mathbf{y}_m$ およびモデルの状態 $\mathbf{x}_m$ からプラントの状態 $\mathbf{x}_p$ を再構成する観測器を導入し、その出力を用いて MRACS を構成することを試みる。

3.1 観測器および適応則の構成

いま、誤差方程式系(2.10)、(2.11)式を観測の対象とみなし、つぎの n 次の観測器¹⁰⁾

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{D}(t)\mathbf{z} + \mathbf{E}(t)\Delta \mathbf{y} + \mathbf{F}(t)\mathbf{x}_m + \mathbf{G}(t)\mathbf{u} \quad (3.1)$$

を構成し、この観測器の出力 $\mathbf{z}$ を用いて適応則を(2.15)、(2.16)式の代わりに

$$\dot{a}_{ij} = -\alpha_{ij} \mathbf{z}' \mathbf{p}_i (\mathbf{x}_{mj} - \mathbf{z}_j) - \beta_{ij} \frac{d}{dt} \{\mathbf{z}' \mathbf{p}_i (\mathbf{x}_{mj} - \mathbf{z}_j)\} \quad (3.2)$$

$$\dot{b}_{ij} = -\gamma_{ij} \mathbf{z}' \mathbf{p}_i \mathbf{u}_j - \delta_{ij} \frac{d}{dt} (\mathbf{z}' \mathbf{p}_i \mathbf{u}_j) \quad (3.3)$$

と構成する。ここに、 $\mathbf{z}$ は n 次ベクトル、 $\mathbf{D}(t)$ 、 $\mathbf{E}(t)$ 、 $\mathbf{F}(t)$ および $\mathbf{G}(t)$ は $n \times n$ 、 $n \times m$ 、 $n \times n$ 、 $n \times r$ 行列であり

$$\mathbf{D}(t) = \mathbf{A}_m - \mathbf{F}(t) - \mathbf{E}(t)\mathbf{C}' \quad (3.4)$$

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{A}(t), \quad \mathbf{G}(t) = \mathbf{B}(t) \quad (3.5)$$

なる関係を満足しているものとする。ここに $\mathbf{A}(t)$ 、 $\mathbf{B}(t)$ は(3.2)、(3.3)式を要素とする行列である。ここで

$$\mathbf{e} = \mathbf{z} - \Delta \mathbf{x} \quad (3.6)$$

とおけば、(2.10)、(2.11)、(3.1)、(3.4)、(3.5)式より

$$\dot{e} = (A_p(t) - E(t)C')e \quad (3.7)$$

を得る。\$(A_p(t), C')\$ は一様可観測としているから、\$E(t)\$ を適当に選ぶことにより (3.7) 式に任意の指数関数減衰度を与えうる¹¹⁾。すなわち

$$\|e(t)\| \leq N\|e(0)\|e^{-\lambda t}, \quad N, \lambda > 0 \quad (3.8)$$

となる。したがって、系 (3.1) の出力 \$\mathbf{Z}\$ は誤差方程式系の状態量 \$\Delta \mathbf{x}\$ の指数減衰の意味での推定値を与える。

3.2 安定性の証明

推定値 \$\mathbf{Z}\$ を用いた適応則 (3.2), (3.3) により \$\Delta \mathbf{x} = 0\$ の漸近安定性が保証されることを、LaSalle と Rath によって導かれた eventually asymptotical stability に対する安定定理¹²⁾を用いて示す。いま、

$$V = \Delta \mathbf{x}' \mathbf{P} \Delta \mathbf{x}$$

$$\begin{aligned} & + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\alpha_{ij}} \{a_{ij} + \beta_{ij} \mathbf{z}' \mathbf{p}_i (x_{mj} - z_j)\}^2 \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r \frac{1}{\gamma_{ij}} \{b_{ij} + \delta_{ij} \mathbf{z}' \mathbf{p}_i u_j\}^2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

と選ぶ。ただし、各パラメータに対する条件は (2.14) 式と同様である。簡単のため

$$\phi_{ij} = a_{ij} + \beta_{ij} \mathbf{z}' \mathbf{p}_i (x_{mj} - z_j) \quad (3.10)$$

$$\eta_{ij} = b_{ij} + \delta_{ij} \mathbf{z}' \mathbf{p}_i u_j \quad (3.11)$$

とおく。(3.2), (3.3) 式より

$$\dot{\phi}_{ij} = -\alpha_{ij} \mathbf{z}' \mathbf{p}_i (x_{mj} - z_j) \quad (3.12)$$

$$\dot{\eta}_{ij} = -\gamma_{ij} \mathbf{z}' \mathbf{p}_i u_j \quad (3.13)$$

である。さて、\$V\$ の時間微分 \$\dot{V}\$ は

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\Delta \mathbf{x}' \mathbf{Q} \Delta \mathbf{x} - 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [\beta_{ij} \{\mathbf{z}' \mathbf{p}_i (x_{mj} - z_j)\}^2 \\ & + a_{ij} \{e' \mathbf{p}_i x_{pj} - \Delta \mathbf{x}' \mathbf{p}_i e_j - e' \mathbf{p}_i e_j\}] \\ & - 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r [\delta_{ij} \{\mathbf{z}' \mathbf{p}_i u_j\}^2 + b_{ij} \{e' \mathbf{p}_i u_j\}] \end{aligned}$$

となる。ただし、\$\mathbf{Q}\$ は \$\mathbf{P} \mathbf{A}_m + \mathbf{A}_m' \mathbf{P} = -\mathbf{Q}\$ を満足する正定値対称行列である。

いま、\$\mathbf{A}_m\$ が漸近安定行列および \$\mathbf{u}\$ が有界入力であることから

$$\|\mathbf{x}_m\| \leq M, \quad \|\mathbf{u}\| \leq L, \quad M, L > 0$$

とおける。この関係と (3.8) 式を用い、さらに (3.10), (3.11) 式により \$a_{ij}, b_{ij}\$ を \$\phi_{ij}, \eta_{ij}\$ に置きかえることによって

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\Delta \mathbf{x}' \mathbf{Q} \Delta \mathbf{x} \\ & + 2pN\|e(0)\|e^{-\lambda t} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \{|\phi_{ij}|\} \right. \\ & + \beta_{ij} p \{ \|\Delta \mathbf{x}\| + N\|e(0)\| \} (M + \|\Delta \mathbf{x}\| \\ & + N\|e(0)\|) \{ M + 2\|\Delta \mathbf{x}\| + N\|e(0)\| \} \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r L \{ |\eta_{ij}| + \delta_{ij} p L \{ \|\Delta \mathbf{x}\| \\ & \left. + N\|e(0)\| \} \} \right] \end{aligned} \quad (3.14)$$

Fig. 1 Schematic diagram of overall scheme

なる関係を得る。ただし、\$\max_i \|\mathbf{p}_i\| = p\$ とおいてい
る。すなわち \$V, \dot{V}\$ は LaSalle & Rath の定理¹²⁾の
条件を満足する。よって \$\Delta \mathbf{x} = 0\$ は eventually asy-
mptotically stable である (付録参照)。

以上の結果を例題で検討する。

【例題 1】 プラントおよび規範モデルが

$$\begin{aligned} \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_p = \begin{bmatrix} 0 & -(K_1^a(t) + C_1^a(t)) \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_p + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y_p = [0 \quad 1] \mathbf{x}_p, \quad \mathbf{x}_{p0} = [1.5, 2.5]' \end{cases} \\ \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_m = \begin{bmatrix} 0 & -2.5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_m + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y_m = [0 \quad 1] \mathbf{x}_m, \quad \mathbf{x}_{m0} = [1 \quad 1]' \end{cases} \end{aligned}$$

と与えられているものとする。このとき、観測器およ
びパラメータ調整則は

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} = & \begin{bmatrix} 0 & -(K_1^a(t) + 0.05) \\ 1 & -10 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \end{bmatrix} \Delta y \\ & + \begin{bmatrix} 0 & K_1^a(t) - 2.45 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_m, \\ \mathbf{z}(0) = & [-1, -1.5]' \\ \dot{K}_1^a(t) = & -\alpha \mathbf{z} \mathbf{p}_1 (x_{m2} - z_2) \\ & - \beta \frac{d}{dt} \{\mathbf{z}' \mathbf{p}_1 (x_{m2} - z_2)\} \end{aligned} \quad (3.15)$$

となる。いま、プラントパラメータに \$C_1^a(t) = 1.05 - e^{-0.0001t}\$, \$C_1^a(0) = 0.05\$ なる変動が生じている場合について
のシミュレーション結果を示す。ただし、適応
ゲインを \$\alpha = 10, \beta = 5, \mathbf{P} = \mathbf{I}_2\$ (単位行列) としてい
る。Fig. 2 は単位ステップ入力を加えた場合の MR-
ACS の応答を示している。ここで、PI は調整則
(3.15) が積分項 + 比例項で与えられる場合を、I は積
分項 (\$\beta = 0\$) のみで与えられる場合を意味している。
適応制御を行わない場合、\$x_{p1}\$ の定常値は 20 となる。
また、比例項の付加が応答を改善していることがわか
る。Fig. 3 はプラントの全状態量が検出できるもの
として (2.15), (2.16) 式を用いた場合との状態誤差
\$\Delta \mathbf{x}\$ を比較したものであるが、適応性はそれほど劣
化していない。

3.3 低次元観測器による MRACS の構成

Fig. 2 Responses of the MRACS

(PI-controller: $\alpha=10, \beta=5$; I-controller: $\alpha=10, \beta=0$) Fig. 3 Responses of the error, $\Delta x = x_m - x_p$ (PI-controller: $\alpha=10, \beta=5$; I-controller: $\alpha=10, \beta=0$)

前節で用いた観測器 (3.1) の次数はプラントと同じ n 次である。もし、この観測器の次数を低下せうならば、適応機構の構成も簡単になるであろう。本節では、特別な場合、すなわちプラントが正準構造系の場合検出可能な出力の個数だけ低次の $(n-m)$ 次観測器により MRACS が実現できることを示す。以下では簡単のため単一出力系の場合について述べるが、多出力系の場合についても同様の議論が成立する。

いま、プラントおよび規範モデルの方程式がそれぞれ (2.1), (2.2) 式と (2.6), (2.7) 式で与えられているものとする。ただし、出力 y はスカラー出力 ($m=1$) であり $A_p(t)$, c' は

$$A_p(t) = \begin{bmatrix} 0 & & -a_1^p(t) \\ 1 & & \vdots \\ 0 & \ddots & 1 \\ & & -a_n^p(t) \end{bmatrix}$$

$$c' = [0, \dots, 0, 1]$$

なる正準ペアとする。その要素は

$$a_i^p(t) = C_i^e(t) + K_i^e(t) \quad (i=1, \dots, n) \text{ で与えられる。}$$

さて、上述の系から得られる誤差方程式系 (2.10), (2.11) に対してつぎの観測器を構成する。

$$\dot{z} = Az + d(t)\Delta y + M(t)x_m + N(t)u \quad (3.16)$$

$$w = H_1 z + h_2 \Delta y \quad (3.17)$$

ここに、 z は $(n-1)$ 次ベクトル、 A は安定な $(n-1) \times (n-1)$ 定数行列、 $d(t)$, $M(t)$, $N(t)$ はそれぞれ $(n-1) \times 1$, $(n-1) \times n$, $(n-1) \times r$ 行列、 w は n 次観測器出力ベクトル、 H_1 , h_2 はそれぞれ $n \times (n-1)$, $n \times 1$ 定数行列である。適応則を観測器の出力 w を用いて

$$\dot{a}_i = -\alpha_i w' p_i y_p - \beta_i \frac{d}{dt}(w' p_i y_p) \quad (3.18)$$

$$\dot{b}_{ij} = -\gamma_{ij} w' p_i u_j - \delta_{ij} \frac{d}{dt}(w' p_i u_j) \quad (3.19)$$

と構成する。ただし、 $i=1, \dots, n$, $j=1, \dots, r$, A , $d(t)$, $M(t)$, $N(t)$ および $(n-1) \times n$ 行列 T を

$$AT - TA_m + M(t) + d(t)c' = 0 \quad (3.20)$$

$$M(t) = TA(t), \quad N(t) = TB(t) \quad (3.21)$$

なる関係が満足されるように選ぶ。ただし、 $A(t)$, $B(t)$ はその要素が (3.18), (3.19) 式からなる $n \times n$, $n \times r$ 行列である。このとき、

$$z = T\Delta x + e^{At}(z(0) - T\Delta x(0)) \quad (3.22)$$

が成立し、 H_1 , h_2 を

$$[H_1 \quad h_2] = [T]^{-1} c' = W \quad (3.23)$$

と選ぶことにより

$$w = \Delta x + e(t) \quad (3.24)$$

を得る⁹⁾。ただし

$$e(t) = W \begin{bmatrix} e^{At}(z(0) - T\Delta x(0)) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

さて、リアプノフ関数 V を (3.9) 式において z を w とおいたものを選べば、 $\dot{V}$ は

$$\dot{V} = -\Delta x' Q \Delta x - 2 \sum_{i=1}^n \{\beta_i (w' p_i y_p)^2 + a_i e' p_i y_p\}$$

$$- 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r \{\delta_{ij} (w' p_i u_j)^2 + b_{ij} e' p_i u_j\}$$

となる。したがって、(3.25) 式を考慮することにより (3.14) 式と同様の関係が成立し、前節の議論と同様 $\Delta x = 0$ が eventually asymptotically stable であることが示される。

【例題 2】 例 1 の MRACS に上述の手法を適用する。

この場合、観測器および調整則は

Fig. 4 Simulation results using lower order observer
(a) responses of the states x_{m1} , x_{p1}
(b) responses of the error Δx_1

$$\dot{z} = -8z - (K_1^a(t) + 56.05)\Delta y + (K_1^a(t) - 0.45)x_{m2}$$

$$z(0) = 8.5$$

$$w_1 = z + 8\Delta y, \quad w_2 = \Delta y$$

$$\dot{K}_1^a(t) = -\alpha y_p(z + 8\Delta y) - \beta \frac{d}{dt} \{y_p(z + 8\Delta y)\}$$

となる。 $\alpha=10$, $\beta=5$, $P=I_2$ と選んだ場合のシミュレーション結果を Fig. 4 に示す。

Fig. 4(a) は状態量 x_{p1} を例 1 の場合と比較したものであり、(b) は状態誤差 Δx_1 を比較したものである。ただし、初期推定誤差は例 1 では $e(0)=[-0.5, -0.5]^T$ 、ここでは $e(0)=-0.5$ である。Fig. 4 において低次元観測器を用いた場合の適応動作は例 1 に比べ速くなっているが、これは出力から直接得られる内部状態量 x_{p1} をそのまま用いていることから推定誤差の影響が小さくなっているためと考えられる。このように低次元観測器が利用できる場合には、観測器構成の簡単化と同時に適応効果も良好となることが推測される。

4. ポポフ法 (太田氏の結果⁷⁾) との比較

ポポフ法に基づく MRACS 構成問題について太田氏によって得られている結果と本手法のそれを比較しておく。以下、簡単のため 2 次系の例題で検討する。

いま、適応系は次式で与えられているものとする。

$$\begin{cases} \dot{x}_p = \begin{bmatrix} 0 & -a_1^p(t) \\ 1 & -a_2^p(t) \end{bmatrix} x_p + b_p(t)u \\ y_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x_p, \quad x_p(0) = x_{p0} \end{cases} \quad (4.1)$$

$$y_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x_p, \quad x_p(0) = x_{p0} \quad (4.2)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_m = \begin{bmatrix} 0 & -a_1^m \\ 1 & -a_2^m \end{bmatrix} x_m + b_m u \\ y_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x_m, \quad x_m(0) = x_{m0} \end{cases} \quad (4.3)$$

$$y_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x_m, \quad x_m(0) = x_{m0} \quad (4.4)$$

簡単のため $b_p(t)=b_m$ とする。このとき、対応する誤差方程式系は

$$\Delta \dot{x} = A_m \Delta x + Fv \quad (4.5)$$

$$\Delta y = c' \Delta x \quad (4.6)$$

となる。ここに、 $v=A(t)x_p$, $FA(t)=A_m-A_p(t)$, $A(t)$ は 2×2 行列、 $F=I_2$ である。

系(4.5), (4.6)にポポフの超安定定理を適用するのであるが、そのためには入力を v , 出力を Δy と見なしたとき入出力の次数が等しいことが前提条件となる。この問題に対し太田は出力行列 c' を拡張し新しく拡張された出力

$$\Delta y = H \Delta x \quad (4.7)$$

を用いている。ただし、 Δy は 2 次出力ベクトル、 H はこの場合 2×2 定数行列かつ (A_m, H) は可観測である。検出可能な出力は $\Delta y = \Delta x_2$ のみであるから

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}, \quad \delta: \text{任意のスカラー一定数}$$

となる。この(4.5), (4.7)式の系に対し次式で与えられる観測器を構成する。

$$\dot{z} = (A_m - FA(t))z + F\bar{v} + FK(Hz - \Delta y) \quad (4.8)$$

$$\bar{v} = A(t)x_m$$

ここに、 z は n 次ベクトル、 K は 2×2 正定値行列である。

いま、上述の MRACS が漸近超安定であるための条件は

i) パラメータ調整則が

$$\dot{a}_i = -\alpha_i \Delta y_i (x_{m2} - z_2) \quad i=1, 2 \quad (4.9)$$

で与えられ、かつ

ii) 2×2 伝達関数行列

$$W(s) = HZ(s)(sI_2 - A_m - FKH)^{-1}F$$

$$\doteq \frac{1}{s^2 + \gamma_1 s + \gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & s \\ \delta & \delta s \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

が強正実であることである。ただし、 $\gamma_1 = a_2^m + k_{21} + \delta k_{22}$, $\gamma_2 = a_1^m + k_{11} + \delta k_{12}$, $Z(s)$ は $z \rightarrow \Delta x$ の伝達関数行列で $Z(s) \doteq I_2$ としている。なぜならば誤差 $\varepsilon = z - \Delta x$ は

$$\dot{\varepsilon} = (A_m - FA(t) + FKH)\varepsilon \quad (4.11)$$

なる微分方程式に支配されることから、 K を適当に選ぶことによりパラメータの変化速度に比べ十分な速さで零とできるからである。ところが、(ii)の伝達関数行列(4.10)は強正実の条件を満足しない。したがって、上述の構造を有する MRACS にポポフ法は適用不能となる。一方、本手法では観測器(3.1)を用いて調整則を

$$\dot{a}_i = -\alpha_i z' p_i (x_{m2} - z_2) - \beta_i \frac{d}{dt} \{z' p_i (x_{m2} - z_2)\},$$

$$i=1, 2$$

と構成すればよい。

ポポフ法では入出力の次数が等しいという条件のため出力を拡張する必要がある。しかし、この例からも明らかなように、検出可能な出力は限られているため伝達関数行列が強正実となるよう出力行列を拡張することは一般にはできない。したがって、リアプノフ法に比べ直接検出不能な状態を有する一般の MRACS にポポフ法を適用することは困難であると思われる。

5. 結 言

本報告では、系の内部状態の一部が直接検出できない場合のリアプノフ法による MRACS 構成問題を取扱い、検出可能な入出力から内部状態を再構成する観測器を導入することで MRACS が実現可能であることを示した。従来この種の問題に関して知られているポポフ法との比較を述べ本手法の適用範囲が広いことを示した。ここで述べた観測器は n 次のいわゆる full order observer であるが、特に制御対象が正準形で与えられる場合観測器の低次化が可能なることも示した。一般の系に対する観測器の低次化は、プラントパラメータが既知ならばある変換行列を用いて正準形に変換することにより可能となる。しかし、MRACS においてはプラントに未知変動パラメータを含むため、この手法を適用することは困難であると思われる。

近年、未知パラメータを有する系に対する状態観測機構として Adaptive observer¹⁴⁾が提案されている。Adaptive observer は状態観測のみならずパラメータ同定も行うという特徴を有するので、上述の問題に対して有効な手段となるものと考えられる。Adaptive observer の MRACS への適用については、今後の問題として検討したい。

また、リアプノフ法による MRACS の構成は、誤差系に対し従来の観測理論を形式的にはそのまま適用できることから、時変係数系の MRACS 問題への拡張が可能であると思われる。

参 考 文 献

- 1) H.P. Whitaker: Massachusetts Institute of Technology Presentation, Proc. Self Adaptive Flight Control System Symposium, WADC Tech. Rep. 59-49, 16/78 (1959)
- 2) R.M. Dressler: An Approach to Model-Reference Adaptive Control Systems, IEEE Trans. on AC, AC-12-1, 75/80 (1967)
- 3) P.C. Parks: Liapunov Redesign of Model Reference Adaptive Control Systems, IEEE Trans. on AC, AC-11-3, 362/367 (1966)
- 4) B. Porter and M.L. Tatnall: Performance Characteristics of Multi-Variable Model Reference Adaptive Systems Synthesized by Liapunov's Direct Method, Int. J. Control, 10-3, 241/256 (1969)
- 5) D.W. Sutherland and J.S. Boland: Model Reference Adaptive Control System Design Technique, Trans. of ASME, Series B, 374/379 (1973)
- 6) I.D. Landau: A Hyperstability Criterion for Model Reference Adaptive Control Systems, IEEE Trans. on AC, AC-14, 552/555 (1969)
- 7) 太田裕文: ポポフの超安定論によるモデル規範形適応制御系の解析, 計測自動制御学会論文集, 10-3, 108/115 (1974)
- 8) R.P. Monopoli: Model Reference Adaptive Control with an Augmented Error Signal, IEEE Trans. on AC, AC-19-5, 474/484 (1974)
- 9) D.G. Luenberger: Observers for Multivariable Systems, IEEE Trans. on AC, AC-11-2, 190/197 (1966)
- 10) W.A. Wolovich: On State Estimation of Observable Systems, Preprint 1968 JACC, 210/220 (1968)
- 11) 須田信英・児玉慎三: 制御工学者のためのマトリクス理論, システムと制御, 17-9, 560/572 (1973)
- 12) J.P. LaSalle and R.J. Rath: Eventual Stability, Proc. 2nd Congress IFAC, 2 (1964)
- 13) V.M. Popov: Hyperstability of Control Systems, Academic Press (1970)
- 14) P. Kudva and K.S. Narendra: Synthesis of an Adaptive Observer Using Liapunov's Direct Method, Int. J. Control, 18-6, 1201/1210 (1973)

《付 録》

《LaSalle & Rath の定理》

システム

$$\dot{x} = f(t, x, y) \quad x: n_1 \text{ 次ベクトル}$$

$$\dot{y} = g(t, x, y) \quad y: n_2 \text{ 次ベクトル}$$

に対し、つぎの性質を満たすスカラー関数 V が存在するならば、原点 $x=0, y=0$ は eventually stable であり

$$\|x(t_0)\|^2 + \|y(t_0)\|^2 < r^2, t_0 \geq T_0, r > 0$$

に対し、 $t \geq t_0$ で y は有界かつ $t \rightarrow \infty$ で $x \rightarrow 0$ となる T_0 が存在する。

1) $V(x, y)$ は正定値かつすべての x, y に関して 1 階偏導関数をもつ。

$$2) \|x\|^2 + \|y\|^2 \rightarrow \infty \text{ のとき } V(x, y) \rightarrow \infty$$

$$3) \dot{V}(x, y) \leq -W(x) + h(t)q(x, y)$$

ただし、 $W(x)$ は正定値かつ連続関数、 $q(x, y)$ は x, y に関して連続、 $h(t)$ は $t \rightarrow \infty$ で $h(t) \rightarrow 0$ あるいは

$$\int_0^\infty h(t)dt = c, c \text{ は有界な定数}$$

のいずれかを満足するスカラー関数である。

4) x, y が有界ならばすべての $t \geq 0$ で $f(t, x, y)$ は有界。

いま、 $x \Leftrightarrow \Delta x, y \Leftrightarrow (\varphi_{ij}, \eta_{ij})$ と対応させる。このとき、1), 2), 4) は明らか。また、 $W(x) \Leftrightarrow \Delta x' Q \Delta x, h(t) \Leftrightarrow e^{-\lambda t}$ と対応させれば、(3.9)式の $\dot{V}$ は(3)の性質を満足する。