末端に容積室をもつ空気圧伝送管路系の動特性†

松 本 幸 生*

Dynamic Analysis of Volume Terminated Pneumatic Transmission Lines

Yukio MATSUMOTO*

The author previously presented a method of eliminating undesirable width of characteristic values such as the amplitude ratio and the phase shift peculiar to the former analyzing methods by taking into consideration the heat exchange between fluid and wall of transmission line. To facilitate the description of dynamic characteristics, however, the fundamental equations were too much simplified as exemplified by the assumption of one-dimensional flow in the line.

Here, the basic differential equations are given by the velocity and temperature distribution of the fluid in a cross-section of the transmission line and the dynamic characteristics are analyzed by the above-mentioned method.

Frequency characteristics derived from this method are compared with the experimental results and a good agreement have been obtained.

1. 緒 言

筆者はさきに、空気圧伝送管路における流体と壁との間の熱交換を考慮することにより、圧力伝播に伴う管内流体の動きを管軸方向の1次元流れとする場合について動特性を解析した。この方法によれば、周波数特性における振幅比・位相ずれなどの特性値が周波数の値により一義的に定まるという利点があり、実験結果との比較が容易になる。この点に着目し、圧力信号に関する周波数特性により動特性を検討したが、計算結果が実験値とかなりよく一致することをたしかめた¹⁾。

ここでは、管内流体の動きを単純に管軸方向の1次元流れとする扱いをあらためて管断面における流速分布を考慮し、さらに管断面における管内流体の温度分布をも考慮して動特性を解析した。この場合、集中系の容積室内部の流体と壁との間に温度差に比例した熱伝達が行われるとした手法²⁾を、そのまま分布系の管路についても適用した。すなわち、管内流体に関するエネルギー方程式の境界条件を、F. T. Brown ら²⁾が取扱いを容易にするため、管壁に接する部分で流体の温度が変化しないとしたのに対し、ごく一般的に管内流体と管壁の温度差に比例した熱伝達が行われるとしてエネルギー方程式を解いた。

以上の方法を容積室と直管からなる単一な管路以外の2, 3の管路系にも適用し、周波数特性により動特性を検討したが、計算結果は実験値と非常によく一致した。

2. 記 号

A : 熱の仕事当量(kcal/kgm), a : 管路内半径(m), c_p : 等圧比熱(kcal/kg°C), c_v : 等容比熱(kcal/kg°C), c_w : 管壁の比熱(kcal/kg°C), F : 容積室表面積(m²), g : 重力加速度(m/s²), h : 流体と管内壁との間の熱伝達率(kcal/m²s°C), h_e : 外気と管外壁との間の熱伝達率(kcal/m²s°C), J_0 : 第1種零次ベッセル関数, J_1 : 第1種1次ベッセル関数, $j \equiv \sqrt{-1}$ (dl), L : 管路全長(m), M : 平均質量流量[(kg/s)/(m/s²)], p : 管路内圧力(kgf/m²), r : 管路中心軸からの距離(m), s : 時間に関するラプラス演算子(1/s), t : 時間(s), V : 容積室の体積(m³), v : 流速(m/s), x : 管軸方向の距離(m), x_w : 管壁肉厚(m), Y : 管路単位長当りのシャントアドミッタンス(ms/m), Z : 管路単位長当りのシリーズインピーダンス[(1/ms)/m], Z_c : 特性インピーダンス(1/ms), Z_r : 容積室による末端インピーダンス(1/ms), Γ : 伝播定数(1/m), θ : 管内気体温度(°C), θ_w : 管壁温度(°C), $\kappa \equiv c_p/c_v$: 比熱比(dl), λ : 管内流体の熱伝導率(kcal/ms°C), μ : 粘性

† 第11回計測自動制御学会学術講演会で発表(昭47・8)

第15回自動制御連合講演会で発表(昭47・11)

第16回自動制御連合講演会で発表(昭48・10)

* 横浜国立大学工学部 横浜市南区大岡 2-31-1

* Faculty of Engineering, Yokohama National University, Yokohama

(Received March 18, 1976)

係数 $[\text{kg/m}^2]$, ν : 動粘性係数 $[\text{m}^2/\text{s}]$, ρ : 流体の密度 $[(\text{kg/m}^3)/(\text{m/s}^2)]$, ρ_w : 管壁の密度 $[(\text{kg/m}^3)/(\text{m/s}^2)]$, σ : プラントル数 $[\text{dl}]$.

なお管路に関する記号に ' を付して容積室の記号とする。また添字 s で定常値を表わす。

3. 動特性解析

Fig. 1 の空気圧管路について

- (i) 管路内の流れと温度分布は軸対称である。
- (ii) 管径方向の流速は管軸方向の流速に比べてきわめて小さい。
- (iii) 2 次以上の微小項は無視する。
- (iv) 外力は働かない。
- (v) 同一断面上で圧力は一定である。

の諸点を仮定すれば Navier-Stokes の運動方程式, エネルギー方程式, 連続方程式, 状態方程式からつぎの基礎方程式が得られる。

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right\} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{A}{\rho g c_p} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\lambda}{\rho g c_p} \left\{ \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right\} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{d\theta}{\theta} \quad (4)$$

管壁において流速をゼロとする境界条件のもと

$$\bar{\theta} = \frac{1}{\rho_s g c_p} \left[1 - \frac{2J_1 \left(j \sqrt{\frac{\sigma s}{\nu}} a \right)}{j \sqrt{\frac{\sigma s}{\nu}} a \left\{ J_0 \left(j \sqrt{\frac{\sigma s}{\nu}} a \right) - j \frac{\lambda/h}{1-G_w(s)} \sqrt{\frac{\sigma s}{\nu}} J_1 \left(j \sqrt{\frac{\sigma s}{\nu}} a \right) \right\}} \right] A p \quad (8)$$

となる。これと(3), (4)式から得られる

$$\frac{\partial M}{\partial x} = -\frac{\pi a^2 \rho_s}{p_s} \left\{ \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{p_s}{\theta_s} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} \right\} \quad (9)$$

を組合せて

$$\frac{\partial M}{\partial x} = -Y p \quad (10)$$

Fig. 1 Pneumatic transmission line with terminal volume

ゝに(1)式を解いて管断面における流速分布を求め、これから圧力と平均質量流量との関係式を導けば

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -Z M \quad (5)$$

$$\text{ただし } Z = \frac{1}{\pi a^2 \rho_s} \cdot \frac{\rho_s}{1 - \frac{2J_1 \left(j \sqrt{\frac{\sigma s}{\nu}} a \right)}{j \sqrt{\frac{\sigma s}{\nu}} a J_0 \left(j \sqrt{\frac{\sigma s}{\nu}} a \right)}}$$

が得られる²⁾。

つぎに管壁に接する部分で管内流体と管壁の温度差に比例した熱伝達が行われるものとし

$$-\lambda \frac{d\theta}{dr} \Big|_{r=a} = h(\theta_{r=a} - \theta_w) \quad (6)$$

を境界条件として(2)式のエネルギー方程式を解けば管断面における流体の温度分布は

$$\theta = \frac{1}{\rho_s g c_p} \left\{ 1 - \frac{J_0 \left(j \sqrt{\frac{\sigma s}{\nu}} r \right)}{J_0 \left(j \sqrt{\frac{\sigma s}{\nu}} a \right) - j \frac{\lambda/h}{1-G_w(s)} \sqrt{\frac{\sigma s}{\nu}} J_1 \left(j \sqrt{\frac{\sigma s}{\nu}} a \right)} \right\} A p \quad (\text{注} 1) \quad (7)$$

と表わされ、上式を用いて管断面の平均温度

$$\bar{\theta} = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a \theta \cdot 2\pi r dr \quad \text{を求めれば}$$

(注1) 管壁に接する部分で流体の温度変動がないとする Brown らの方法³⁾では、(6)式のかわりに一定温度 θ_0 を用いて

$$\theta_{r=a} = \theta_0 \quad (i)$$

を境界条件とするので、エネルギー方程式の解は積分定数を C として

$$\theta = \theta_0 - C \left[J_0 \left(j \sqrt{\frac{\sigma s}{\nu}} a \right) - J_0 \left(j \sqrt{\frac{\sigma s}{\nu}} r \right) \right] \quad (ii)$$

となり、したがって管断面の平均温度 $\bar{\theta}$ は

$$\bar{\theta} = \theta_0 - C \left[J_0 \left(j \sqrt{\frac{\sigma s}{\nu}} a \right) - \frac{2J_1 \left(j \sqrt{\frac{\sigma s}{\nu}} a \right)}{j \sqrt{\frac{\sigma s}{\nu}} a} \right] \quad (iii)$$

と表わされる。一方(6)式の境界条件を適用する場合に薄肉管ではその熱伝導率が半径方向に ∞ で長さ方向にゼロと仮定しうる点に注目し、さらに取扱いを簡単にするため管外への熱損失がないとすれば壁の熱収支に関し(2)式から

ただし

$$Y = \frac{\pi a^2 \rho_s s}{\kappa p_s} \left[1 + \frac{2(\kappa-1)J_1\left(j\sqrt{\frac{\sigma s}{\nu}}a\right)}{j\sqrt{\frac{\sigma s}{\nu}}a \left\{ J_0\left(j\sqrt{\frac{\sigma s}{\nu}}a\right) - j\frac{\lambda/h}{1-G_w(s)}\sqrt{\frac{\sigma s}{\nu}}J_1\left(j\sqrt{\frac{\sigma s}{\nu}}a\right) \right\}} \right]$$

の関係式が求められる。

ここで $\Gamma = \sqrt{ZY}$, $Z_c = \sqrt{Z/Y}$ とおけば (5), (10)

の2式から

$$\begin{bmatrix} p(0, s) \\ M(0, s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \Gamma x & Z_c \sinh \Gamma x \\ \frac{1}{Z_c} \sinh \Gamma x & \cosh \Gamma x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(x, s) \\ M(x, s) \end{bmatrix} \quad (11)$$

の管路マトリクスが得られる。

さて管路末端の容積室についてはこれを集中系として扱うものとすれば物質収支に関して

$$V \frac{d\rho}{dt} = \pi a^2 v \rho \quad (12)$$

が成り立つ。また管路の場合と同様に流体と壁との間の熱交換を考慮すれば (2) 式からそれぞれについてのエネルギー方程式が

$$\rho g c_p \frac{d\theta}{dt} = A \frac{dp}{dt} + \frac{h' F}{V} (\theta_{w'} - \theta) \quad (13)$$

$$\rho_{w'} g c_{w'} \frac{d\theta_{w'}}{dt} = \frac{h'}{x_{w'}} (\theta - \theta_{w'}) \quad (14)$$

となる。(12)~(14)の3式を組合せることにより

$$\begin{aligned} Z_r &= \frac{p(L, s)}{M(L, s)} \\ &= \frac{p_s}{V \rho_s s} \cdot \frac{c_p s + \frac{h' F/V}{\rho_s g} + \frac{h'}{\rho_{w'} g x_{w'}} \cdot \frac{c_p}{c_{w'}}}{c_v s + \frac{h' F/V}{\rho_s g} + \frac{h'}{\rho_{w'} g x_{w'}} \cdot \frac{c_v}{c_{w'}}} \end{aligned} \quad (15)$$

の関係が得られる。(15)式を(11)式に代入すれば圧力信号に関して

$$G(x, s) = \frac{p(x, s)}{p(0, s)}$$

$$\rho_w g c_w \frac{d\theta_w}{dt} = \frac{h}{x_w(1+x_w/2a)} (\theta_{r=a} - \theta_w) \quad (iv)$$

が得られ、これをラプラス変換すれば

$$\theta_w = G_w(s) \theta_{r=a} \quad (v)$$

ただし

$$G_w(s) = \frac{\frac{h}{\rho_w g x_w(1+x_w/2a)} \cdot \frac{1}{c_w}}{s + \frac{h}{\rho_w g x_w(1+x_w/2a)} \cdot \frac{1}{c_w}}$$

となり、これを用いて (7) 式の結果が得られる。

$$= \frac{\cosh \Gamma(L-x) + \frac{Z_c}{Z_r} \sinh \Gamma(L-x)}{\cosh \Gamma L + \frac{Z_c}{Z_r} \sinh \Gamma L}$$

(16)

あるいは

$$G(L, s) = \frac{p(L, s)}{p(0, s)} = \frac{1}{\cosh \Gamma L + \frac{Z_c}{Z_r} \sinh \Gamma L} \quad (17)$$

の伝達関数が求められる。

直管と容積室とからなる単一の管路における以上の解析は管路に定常流がなく圧力信号が十分に微小な場合を想定して行われたものである。したがって同様な条件のもとでは Fig. 2, Fig. 3 のように分岐・合流を含む管路系についても上述の手法がまったく同様に適用できる。すなわち Fig. 2 の分岐を含む管路系では、入力信号 p_1 に対する出力信号 p_2 および p_3 の関係は (17) 式からただちに

Fig. 2 Volume terminated pneumatic transmission line with branch

Fig. 3 Volume terminated pneumatic transmission line with branch and confluence

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{\cosh \Gamma_1 L_1 + \frac{Z_{c1}}{Z_{r1}} \sinh \Gamma_1 L_1} \cdot \frac{1}{\cosh \Gamma_2 L_2 + \frac{Z_{c2}}{Z_{r2}} \sinh \Gamma_2 L_2} \quad (18)$$

$$\searrow \frac{p_3}{p_1} = \frac{1}{\cosh \Gamma_1 L_1 + \frac{Z_{c1}}{Z_{r1}} \sinh \Gamma_1 L_1} \cdot \frac{1}{\cosh \Gamma_3 L_3 + \frac{Z_{c3}}{Z_{r3}} \sinh \Gamma_3 L_3} \quad (19)$$

となる。ここで管路 I の末端インピーダンス Z_{r1} は (11) 式による管路 II, III の管路マトリクスから得られるそれぞれの始端インピーダンスを用いて

$$Z_{r1} = \frac{1}{\frac{1}{Z_{r2}} \cosh \Gamma_2 L_2 + \frac{1}{Z_{c2}} \sinh \Gamma_2 L_2 + \frac{1}{Z_{r3}} \cosh \Gamma_3 L_3 + \frac{1}{Z_{c3}} \sinh \Gamma_3 L_3}} \quad (20)$$

のように与えられる。

また Fig. 3 の分岐・合流を含む管路系についてもまったく同様に入力信号 p_1 に対する出力信号 p_4 の関係は

$$\frac{p_4}{p_1} = \frac{1}{\cosh \Gamma_1 L_1 + \frac{Z_{c1}}{Z_{r1}} \sinh \Gamma_1 L_1} \cdot \frac{1}{\cosh \Gamma_2 L_2 + \frac{Z_{c2}}{Z_{r2}} \sinh \Gamma_2 L_2} \cdot \frac{1}{\cosh \Gamma_4 L_4 + \frac{Z_{c4}}{Z_{r4}} \sinh \Gamma_4 L_4} \quad (21)$$

$$\searrow \frac{p_4}{p_1} = \frac{1}{\cosh \Gamma_1 L_1 + \frac{Z_{c1}}{Z_{r1}} \sinh \Gamma_1 L_1} \cdot \frac{1}{\cosh \Gamma_3 L_3 + \frac{Z_{c3}}{Z_{r3}} \sinh \Gamma_3 L_3} \cdot \frac{1}{\cosh \Gamma_4 L_4 + \frac{Z_{c4}}{Z_{r4}} \sinh \Gamma_4 L_4} \quad (22)$$

あるいは

となる。ここで管路 I の末端インピーダンスについては (20) 式の Z_{r1} を、管路 II, III の末端インピーダンスについては管路 II, III, IV の管路マトリクスから得られる

$$Z_{r2} = \frac{1 + \frac{Z_{c2} \sinh \Gamma_2 L_2}{Z_{c3} \sinh \Gamma_3 L_3}}{\frac{1}{Z_{r4}} \cosh \Gamma_4 L_4 + \frac{1}{Z_{c4}} \sinh \Gamma_4 L_4 - \frac{\cosh \Gamma_2 L_2 - \cosh \Gamma_3 L_3}{Z_{c3} \sinh \Gamma_3 L_3}} \quad (23)$$

$$Z_{r3} = \frac{1 + \frac{Z_{c3} \sinh \Gamma_3 L_3}{Z_{c2} \sinh \Gamma_2 L_2}}{\frac{1}{Z_{r4}} \cosh \Gamma_4 L_4 + \frac{1}{Z_{c4}} \sinh \Gamma_4 L_4 + \frac{\cosh \Gamma_2 L_2 - \cosh \Gamma_3 L_3}{Z_{c2} \sinh \Gamma_2 L_2}} \quad (24)$$

を用いる。ここで (18) ~ (24) の諸式における各管路の特性値を添字 i ($i=1 \sim 4$) を付して表わすことにすれば

$$\Gamma_i = \sqrt{Z_i Y_i}$$

$$Z_{ci} = \sqrt{\frac{Z_i}{Y_i}}$$

$$\begin{aligned}
 Z_i &= \frac{1}{\pi a_i^2 \rho_s} \cdot \frac{\rho_s s}{1 - \frac{2J_1\left(j\sqrt{\frac{s}{\nu}} a_i\right)}{j\sqrt{\frac{s}{\nu}} a_i J_0\left(j\sqrt{\frac{s}{\nu}} a_i\right)}} \\
 Y_i &= \frac{\pi a_i^2 \rho_s s}{\kappa p_s} \left[1 + \frac{2(\kappa-1)J_1\left(j\sqrt{\frac{\sigma s}{\nu}} a_i\right)}{j\sqrt{\frac{\sigma s}{\nu}} a_i \left\{ J_0\left(j\sqrt{\frac{\sigma s}{\nu}} a_i\right) - j \frac{\lambda/h_i}{1-G_{wi}(s)} \sqrt{\frac{\sigma s}{\nu}} J_1\left(j\sqrt{\frac{\sigma s}{\nu}} a_i\right) \right\}} \right] \\
 G_{wi} &= \frac{\frac{h_i}{\rho_{wi} g x_{wi}(1+x_{wi}/2a_i)} \cdot \frac{1}{c_{wi}}}{s + \frac{h_i}{\rho_{wi} g x_{wi}(1+x_{wi}/2a_i)} \cdot \frac{1}{c_{wi}}} \\
 Z_{ri} &= \frac{p_s}{V_i \rho_s s} \cdot \frac{c_p s + \left\{ \frac{h_i' F_i/V_i}{\rho_s g} + \frac{h_i'}{\rho_{wi}' g x_{wi}'} \cdot \frac{c_p}{c_{wi}'} \right\}}{c_v s + \left\{ \frac{h_i' F_i/V_i}{\rho_s g} + \frac{h_i'}{\rho_{wi}' g x_{wi}'} \cdot \frac{c_v}{c_{wi}'} \right\}}
 \end{aligned} \tag{25}$$

Table 1 Dimension of pneumatic transmission line with rigid terminal volume (Fig. 1)

		<i>a</i>	<i>b</i>
transmission line	length <i>L</i> [m]	3.0~8.0	2.0~7.0
	outer diameter [mm]	9.5	
	thickness <i>x_w</i> [mm]	1.0	
	density $\rho_w g$ [g/cm ³]	8.3	
	specific heat <i>C_w</i> [kcal/kg°C]	0.1	
terminal volume	volume <i>V</i> [l]	3.75	8.15
	surface area <i>F</i> [cm ²]	1,380	2,350
	thickness <i>x_w'</i> [mm]	3.0	2.0
	density $\rho_w' g$ [g/cm ³]	8.0	
	specific heat <i>C_w'</i> [kcal/kg°C]	0.1	

Table 2 Dimension of volume terminated pneumatic transmission line with branch (Fig. 2)

transmission lines	I	length <i>L</i> ₁ [m]	1.0~5.0
		outer diameter [mm]	9.5
	II	length <i>L</i> ₂ [m]	1.0
		outer diameter [mm]	9.5
	III	length <i>L</i> ₃ [m]	2.0
		outer diameter [mm]	9.5
terminal volumes	I	volume <i>V</i> ₁ [l]	3.75
		surface area <i>F</i> ₁ [cm ²]	1,380
	II	volume <i>V</i> ₂ [l]	8.15
		surface area <i>F</i> ₂ [cm ²]	2,350

ただし式中の Z_{ri} は末端容量インピーダンスであり、管路末端インピーダンスの場合には (20), (23), (24) の諸式を適用する。

4. 解析結果と実験との比較と検討

ここでは Fig. 1, 2, 3 の管路系の一例として **Table 1, 2, 3** について周波数特性実験を行い、理論値と比較する。なお Table 2, 3 については Table 1 に示す管路と容積室の組合せにより管路系を構成したため、管路については長さと外径、容積室については体積と表面積のみで示した。いずれの場合においても管路には銅管を用い、容積室は鉄製とした。

周波数特性実験は管内圧力の定常値を 1.08 kgf/cm² とし、低周波発信器とノズル・フラップ式電空変換器によって得られる振幅 1/1000 (kgf/cm²) 程度の正弦波

Table 3 Dimension of volume terminated pneumatic transmission line with branch and confluence (Fig. 3)

transmission lines	I	length <i>L</i> ₁ [m]	1.0
		outer diameter [mm]	9.5
	II	length <i>L</i> ₂ [m]	1.0
		outer diameter [mm]	9.5
	III	length <i>L</i> ₃ [m]	2.0
		outer diameter [mm]	9.5
terminal volume	IV	length <i>L</i> ₄ [m]	1.0~5.0
		outer diameter [mm]	9.5
	I	volume <i>V</i> [l]	3.75
		surface area <i>F</i> [m ²]	1,380

Fig. 4(a) Frequency characteristics of Table 1-a line ($p_s = 1.08 \text{ kgf/cm}^2$)

Fig. 5(a) Frequency characteristics for L_1 - L_3 of Table 2 line ($p_s = 1.08 \text{ kgf/cm}^2$)

状圧力信号を入力信号として管路入口に加え、ストレンゲージ、直流増幅器ならびに電磁オシログラフを用いて入・出力信号を同時記録した。

Fig. 4, 5, 6 に Table 1, 2, 3 のそれぞれにおける管路入口と容積室部分とに関する圧力信号の周波数特性

Fig. 4(b) Frequency characteristics of Table 1-b line ($p_s = 1.08 \text{ kgf/cm}^2$)

Fig. 5(b) Frequency characteristics for L_1 - L_3 of Table 2 line ($p_s = 1.08 \text{ kgf/cm}^2$)

を示す。図には本法による計算結果を実線、周波数特性実験による実測値を○で示す。図から、Table 1, 2, 3 のいずれの場合についても本法による特性値が実測値とよく一致していることがわかる。

Fig. 6 Frequency characteristics of Table 3 line ($p_s = 1.08 \text{ kgf/cm}^2$)

Fig. 7 に、本法と、管内流を1次元流れとして解析する方法¹⁾との比較を示す。一例として、Table 1 の $V = 8.15 \text{ l}$, $L = 3.0 \text{ m}$ の管路に注目し、前者を実線、後者を破線で示す。図から、ゲイン特性における実線の極大値が実験値とよく一致しているのに対し、破線の極大値が実線のそれにくらべて低下し、高周波域にずれていることがわかる。以上の傾向はつぎのように説明される。すなわち、1次元流れを仮定する場合にシリーズインピーダンスは

$$Z = \frac{1}{\pi a^2 \rho_s} \left(\frac{8\mu}{a^2} + \rho_s s \right) \quad (26)$$

であった¹⁾。一方、(5)式の Z においてベッセル関数

を展開すれば周波数の低い範囲で

$$Z = \frac{1}{\pi a^2 \rho_s} \left(\frac{8\mu}{a^2} + \frac{4}{3} \rho_s s \right) \quad (27)$$

と表わすことができる³⁾。ところで、(17)式の伝達関数を振動性2次要素に近似して共振点の概略の値を求める方法⁴⁾によれば、共振周波数と減衰係数がともにシリーズインピーダンスの関数として示され、その第2項の係数の値が減少すれば共振周波数、減衰係数の値がともに増加することがわかっている。(26)、(27)の両式について第2項の係数を比較すれば、1次元流れを仮定する(26)式のほうが小さい。したがって、本法にくらべて共振周波数と減衰係数の値が大となり、その結果、破線の極大値は低下し、高周波域にずれを生ずる。なお図の点線は、F. T. Brown らの解析結果にポリトロップ指数を1.0から1.4までとした容積室の特性を組合せたものであり、特性値にかなりの幅を生じている。

さきの解析では取扱いを簡単にするため管路外との熱交換がないものと仮定した。いま外気温一定として管路外との熱交換を考慮すれば管壁についてのエネルギー方程式は(注1)の(IV)式のかわりに

$$\rho_w g c_w \frac{d\theta_w}{dt} = \frac{h}{x_w(1+x_w/2a)} (\theta_{r=a} - \theta_w) - \frac{(1+x_w/a)h_e}{x_w(1+x_w/2a)} \theta_w \quad (28)$$

となるのでシャントアドミタンス Y に含まれる $G_w(s)$ が(V)式のかわりに

Fig. 8 Example of temperature distribution in the section of pneumatic transmission line

$$G_w(s) = \frac{h}{s + \frac{h + (1 + x_w/a)h_e}{\rho_w g x_w (1 + x_w/2a)} \cdot \frac{1}{c_w}} \cdot \frac{1}{c_w} \quad (29)$$

と表わされる。また容積室については壁のエネルギー

一方程式が(14)式のかわりに

$$\rho_w' g c_w' \frac{d\theta_w'}{dt} = \frac{h'}{x_w'} (\theta - \theta_w') - \frac{h_e'}{x_w'} \theta_w' \quad (30)$$

となるので容積室による末端インピーダンスが

$$Z_r = \frac{p_s}{V \rho_s s} \cdot \frac{c_p s^2 + \left\{ \frac{h' F/V}{\rho_s g} + \frac{h' + h_e'}{\rho_w' g x_w'} \cdot \frac{c_p}{c_w'} \right\} s + \frac{h' F/V}{\rho_s g} \cdot \frac{h_e'}{\rho_w' g x_w'} \cdot \frac{1}{c_w'}}{c_v s^2 + \left\{ \frac{h' F/V}{\rho_s g} + \frac{h' + h_e'}{\rho_w' g x_w'} \cdot \frac{c_v}{c_w'} \right\} s + \frac{h' F/V}{\rho_s g} \cdot \frac{h_e'}{\rho_w' g x_w'} \cdot \frac{1}{c_w'}} \quad (31)$$

と表わされる¹⁾。管壁と内部流体との熱伝達率 h については層流の場合の熱伝達率の値が適用できて $5.15 \lambda/d_i$ [$\text{kcal}/\text{m}^2\text{hr}^\circ\text{C}$] (ただし流体の熱伝導率 λ は [$\text{kcal}/\text{mhr}^\circ\text{C}$]、管路内径 d_i は [m] で表わした数値)⁵⁾、また外気との熱伝達率 h_e については $(4.0 + 0.3\theta_e/100) v_e^{0.61}/d_o^{0.39}$ [$\text{kcal}/\text{m}^2\text{hr}^\circ\text{C}$]。ただし外気温 θ_e は [$^\circ\text{C}$]、外気風速 v_e は [m/s]、管路外径 d_o は [m] で表わした数値)⁵⁾。の関係を採用するものとすれば、一例として気温が 20°C で管外の風速が 0.1 cm/s の実験室内では本実験に用いた外径が 0.95 cm 、肉厚 0.1 cm の場合に $h \doteq 15.12$ [$\text{kcal}/\text{m}^2\text{hr}^\circ\text{C}$]、 $h_e \doteq 0.37$ [$\text{kcal}/\text{m}^2\text{hr}^\circ\text{C}$] となって(29)式の $G_w(s)$ は(V)式のそれとほとんど一致し、管路外との熱交換を無視しても差支えないことがわかる。また $\rho_s \ll \rho_w'$ から(31)式の Z_r は(15)式のそれとほぼ一致し、容積室外との熱交換を

無視しても差支えないことがわかる。以上の点を考慮し、取扱いを簡単にするため本論文では管路外、容積室外との熱交換がないものとして動特性を解析した。

Fig. 8は、管断面における温度分布の模様をTable 1の管路について管軸からの距離を横軸、温度 θ /平均温度 $\bar{\theta}$ を縦軸にとって求めたものである。図の破線がBrownらによるもので(ii)、(iii)式から得られる

$$\frac{\theta}{\bar{\theta}} = \frac{\theta_0 - C \left[J_0 \left(j \sqrt{\frac{\sigma s}{\nu}} a \right) - J_0 \left(j \sqrt{\frac{\sigma s}{\nu}} r \right) \right]}{\theta_0 - C \left[J_0 \left(j \sqrt{\frac{\sigma s}{\nu}} a \right) - \frac{2J_1 \left(j \sqrt{\frac{\sigma s}{\nu}} a \right)}{j \sqrt{\frac{\sigma s}{\nu}} a} \right]} \quad (32)$$

の計算結果であり、図の実線が本法によるもので(7)、(8)式から得られる

$$\frac{\theta}{\bar{\theta}} = \frac{1 - \frac{J_0 \left(j \sqrt{\frac{\sigma s}{\nu}} r \right)}{J_0 \left(j \sqrt{\frac{\sigma s}{\nu}} a \right) - j \frac{\lambda/h}{1 - G_w(s)} \sqrt{\frac{\sigma s}{\nu}} J_1 \left(j \sqrt{\frac{\sigma s}{\nu}} a \right)}}{1 - \frac{2J_1 \left(j \sqrt{\frac{\sigma s}{\nu}} a \right)}{j \sqrt{\frac{\sigma s}{\nu}} a \left\{ J_0 \left(j \sqrt{\frac{\sigma s}{\nu}} a \right) - j \frac{\lambda/h}{1 - G_w(s)} \sqrt{\frac{\sigma s}{\nu}} J_1 \left(j \sqrt{\frac{\sigma s}{\nu}} a \right) \right\}}}$$

の計算結果である。

5. 結 言

以上“末端に容積室をもつ空気圧伝送管路系の動特性”を解析するにあたり、分布系の管路について管断面における管軸方向の流速分布と温度分布に注目しながら管内流体と壁との間の熱交換を考慮し、集中系の容積室についても同様に内部流体と壁との熱交換を考慮しつつ空気圧管路の動特性を解析する方法が非常に有効であることを示した。さらにこの手法が、圧力損失が微小な範囲で分岐・合流を含む管路系にも十分適用できることを示した。

今後、上記の管路系に定常流のある場合の検討が必要と思われる。

参 考 文 献

- 1) 松本幸生：ポリロープ指数の変化を考慮した空気圧信号伝送路の動特性解析，計測自動制御学会論文集，5-3，243/249 (1969)
- 2) たとえば，F.T. Brown: The Transient Response of Fluid Lines, Trans. ASME, Series D, 547/553 (1962)
- 3) たとえば，C.P. Rohman and E.C. Grogan: On the Dynamics of Pneumatic Transmission Lines, Trans. ASME, 853/874 (1957)
- 4) J.O. Hougén, O.R. Martin and R.A. Walsh: Dynamics of Pneumatic Transmission Lines, Control Eng., 114/117 (1963)
- 5) Schack 著，高橋安人訳：応用伝熱，95/107，コロナ社 (1953)