双線形システムの外部記述モデルの同定と最小双線形実現

雛 元 孝 夫*・西 中 裕 樹*・前 川 禎 男*

Identification of External Description Model of Bilinear Systems and Minimal Bilinear Realization

Takao HINAMOTO*, Hiroki NISHINAKA* and Sadao MAEKAWA*

This paper treats the identification problem of multivariable bilinear systems. The identification procedure is the following: at first, the external description model is derived from the zero-state response of the systems, then the weighted sequence matrices in the model are estimated through the least mean-square method. Next, the internal description model is realized by using the previously estimated matrices.

However, since we must use the estimated weighted sequence matrices instead of the true weighted sequence matrices in the case of solving the realization problem, it is generally difficult to realize the external description model via an equivalent internal description model. Therefore, both a method to overcome this difficulty and an actual algorithm of minimal bilinear realizations are proposed in this paper. The realization algorithm in this paper is simpler than the algorithm given by A. Isidori.

The main feature of an identification method in this paper will be that we need not use the state-variables of the identified bilinear system in the case of identifying an bilinear system.

1. 緒 言

従来、多くの制御対象を線形動的システムとして把握し線形の数学モデルが広く用いられてきた。しかし、工学で扱うシステムばかりでなく広く物理現象あるいは社会現象を記述するには、対象を双線形システムとして把握し双線形の数学モデルを用いたほうが適当である場合も多いと考えられる^{1), 2)}。このため、最近双線形システムが注目されるようになり、可制御性^{3)~5)}、最適制御⁶⁾、実現問題^{7), 8)}、安定性⁹⁾などに興味ある研究が報告されている。たとえば、R. R. Mohler

と R. E. Rink⁴⁾ は有限な区分的連続関数を許容入力として可到達な状態と可制御性との関係を調べ、双線形システムが可制御であるための十分条件を与えている。P. D'Alessandro, A. Isidori および A. Ruberti⁷⁾ は零状態応答をボルテラ級数で展開し、このボルテラ核を用いて双線形システムを実現する問題について考察し、あわせて状態の可到達性と可観測性に注目して状態方程式の正準構造（線形システムにおける Kalman の分解定理に対応）を明らかにしている。また、A. Isidori⁸⁾ は Ho, Kalman の実現アルゴリズムを双線形システムの実現に拡張して展開している。しかし、双線形システムの同定問題に関する研究はまだきわめて少ないのが現状であろう¹⁰⁾。

本論文では双線形システムの同定問題を取上げており、この問題をパラメータ推定と実現の融合問題としてとらえている。すなわち、まずシステムの零状態応答を導き、これよりシステムの外部記述モデルを導出する。そしてこのモデルに含まれる重み系列行列を最小2乗法を適用して推定する。続いて、推定された重み系列行列から最小次元の双線形システムを実現するというものである。

この場合、問題になるのは重み系列行列の真値ではなく、その推定値から実現せざるを得ない点にあり、本文中ではこの難点を克服するための方法について述べている。また、最小双線形実現のための実際的な手法も提案している。この手法は A. Isidori⁸⁾ のそれよりも実現に要する計算量が少なく、したがって、推定誤差を含む重み系列行列から実現する場合の累積誤差の拡大が少なくおさえられるという利点がある。

2. 双線形システムの定式化

次式で表わされる r 入力 m 出力の離散時間形双線形システムを考える。

$$\left. \begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + \sum_{i=1}^r u_i(k) N_i x(k) + Bu(k) + w(k) \\ y(k) &= Cx(k) + v(k) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

* 神戸大学工学部 神戸市灘区六甲台町1

* Faculty of Engineering, Kobe University, Kobe
(Received May 14, 1976)

(1)式において $x(\cdot) \in R^n$, $u(\cdot) \in R^r$, $y(\cdot) \in R^m$, $w(\cdot) \in R^n$, $v(\cdot) \in R^m$ で $A, N_1, N_2, \dots, N_r, B, C$ は適当なサイズの実行列とする。そして $x(\cdot)$ は状態変数, $u(\cdot)$ は入力, $y(\cdot)$ は出力, $w(\cdot)$ はシステムノイズ, $v(\cdot)$ は観測ノイズをそれぞれ表わすものとし, また $u_i(\cdot)$ ($i=1, 2, \dots, r$) は $u(\cdot)$ の第 i 要素を表わすものとする。ここで, (1)式のシステムに関してつぎの仮定をおく。

[A.1] システムノイズ $w(\cdot)$ と入力 $u(\cdot)$ は統計的に独立で $E\{w(\cdot)\} = 0$ である。ここで E は集合平均を表わす。

[A.2] 観測ノイズ $v(\cdot)$ と入力は $u(\cdot)$ は統計的に独立で, $E\{v(\cdot)\} = 0$ である。

[A.3] 任意の k に対して行列 $\left[A + \sum_{i=1}^r u_i(k)N_i \right]^T$

$\left[A + \sum_{i=1}^r u_i(k)N_i \right]$ の固有値はすべて1より小さい。上記の仮定のうち, [A.3] は線形システムにおける漸近安定のための条件と対応しており, 双線形システムの場合にはこの条件に入力が干渉している点異なる。

つぎに(1)式の零状態応答を導くことにする。この導出に先立って以下の一連の定義を行っておく。

$$\left. \begin{aligned} P^{(1)} &\triangleq B, \quad P^{(i)} \triangleq [AP^{(i-1)} | N_1 P^{(i-1)} | \dots | N_r P^{(i-1)}] \\ R^{(1)} &\triangleq I, \quad R^{(i)} \triangleq [AR^{(i-1)} | N_1 R^{(i-1)} | \dots | N_r R^{(i-1)}] \\ \tilde{u}(k) &\triangleq (1, u(k)^T)^T \\ u^{(1)}(k) &\triangleq u(k), \quad u^{(i)}(k) \triangleq \tilde{u}(k+i-1) \otimes u^{(i-1)}(k) \\ w^{(1)}(k) &\triangleq w(k), \quad w^{(i)}(k) \triangleq \tilde{u}(k+i-1) \otimes w^{(i-1)}(k) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここで, $i \geq 2$ とし I は n 次の単位行列を表わす。また, $\otimes$ はクロネッカ積を表わす。さて, この時(1)式から零状態応答を導けば, (2)式を用いてつぎのようになる。

$$\begin{aligned} x(1) &= Bu(0) + w(0) \\ &= P^{(1)}u^{(1)}(0) + R^{(1)}w^{(1)}(0) \\ x(2) &= [A + u_1(1)N_1 + \dots + u_r(1)N_r]x(1) \\ &\quad + Bu(1) + w(1) \\ &= [A + u_1(1)N_1 + \dots + u_r(1)N_r] \{P^{(1)}u^{(1)}(0) \\ &\quad + R^{(1)}w^{(1)}(0)\} + Bu(1) + w(1) \\ &= P^{(1)}u^{(1)}(1) + P^{(2)}u^{(2)}(0) + R^{(1)}w^{(1)}(1) \\ &\quad + R^{(2)}w^{(2)}(0) \\ x(3) &= [A + u_1(2)N_1 + \dots + u_r(2)N_r]x(2) \\ &\quad + Bu(2) + w(2) \\ &= P^{(1)}u^{(1)}(2) + P^{(2)}u^{(2)}(1) + P^{(3)}u^{(3)}(0) \\ &\quad + R^{(1)}w^{(1)}(2) + R^{(2)}w^{(2)}(1) + R^{(3)}w^{(3)}(0) \\ &\quad \vdots \\ x(k) &= \sum_{i=1}^k P^{(i)}u^{(i)}(k-i) + \sum_{i=1}^k R^{(i)}w^{(i)}(k-i) \end{aligned} \quad (3)$$

したがって, 第 k 時刻での出力 $y(k)$ は(1)式と(3)式より

$$y(k) = \sum_{i=1}^k CP^{(i)}u^{(i)}(k-i) + \sum_{i=1}^k CR^{(i)}w^{(i)}(k-i) + v(k) \quad (4)$$

となる。さらに仮定 [A.3] より, システムに整定時間が存在する。そのため, 定常時の出力は十分大きい正の整数 N に対して近似的に次式のようにかける。

$$y(k) \simeq \sum_{i=1}^N CP^{(i)}u^{(i)}(k-i) + \sum_{i=1}^N CR^{(i)}w^{(i)}(k-i) + v(k) \quad (5)$$

ただし, $k \geq N$ とする。さらに

$$\Phi_i \triangleq CP^{(i)} \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (6)$$

$$\Psi \triangleq [\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_N]^T \quad (7)$$

$$h(k) \triangleq [u^{(1)}(k-1)^T, u^{(2)}(k-2)^T, \dots, u^{(N)}(k-N)^T]^T \quad (8)$$

$$z(k) \triangleq \sum_{i=1}^k CR^{(i)}w^{(i)}(k-i) + v(k) \quad (9)$$

と定義する。ここで Φ_i は m 行 $r(r+1)^{i-1}$ 列, Ψ は $\{(r+1)^N - 1\}$ 行 m 列のそれぞれ行列であり, $h(k)$ は $\{(r+1)^N - 1\}$ 次元のベクトルである。この時(5)式は

$$y(k) \simeq \Psi^T h(k) + z(k) \quad (10)$$

と表わせる。

3. 重み系列行列の推定

ここでは, 入出力データ $\{u(0), u(1), \dots, u(M-1); y(0), y(1), \dots, y(M-1)\}$ を用いて(10)式の重み系列行列 $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_N$ を推定することを考える。いま Φ_i ($i=1, 2, \dots, N$) の推定値を $\hat{\Phi}_i$ で表わし, つぎの定義を行う。

$$\begin{aligned} \Psi &\triangleq [\hat{\Phi}_1, \hat{\Phi}_2, \dots, \hat{\Phi}_N]^T \\ &\triangleq [\hat{\Phi}_1, \hat{\Phi}_2, \dots, \hat{\Phi}_m] \end{aligned} \quad (11)$$

そして, つぎの関数 J を最小化することを考える。

$$J = \sum_{k=N}^{M-1} \|y(k) - \hat{\Psi}^T h(k)\|^2 \quad (12)$$

ここで, $\|\cdot\|$ はユークリッドノルム。いま

$$[g_1, g_2, \dots, g_m] \triangleq [y(N), y(N+1), \dots, y(M-1)]^T \quad (13)$$

$$U \triangleq [h(N), h(N+1), \dots, h(M-1)]^T \quad (14)$$

と定義すれば, (12)式はつぎのように変形できる。

$$J = \|g_1 - U\hat{\Phi}_1\|^2 + \dots + \|g_m - U\hat{\Phi}_m\|^2 \quad (15)$$

この J を $\hat{\Phi}_i$ ($i=1, 2, \dots, m$) で微分して零とおけば

$$U^T U \hat{\Phi}_i = U^T g_i \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (16)$$

または, (11)式より

$$U^T U \hat{\Psi} = U^T [g_1, g_2, \dots, g_m] \quad (17)$$

を得る。さらに U が最大階数であれば、(17)式は

$$\hat{\Psi} = [U^T U]^{-1} U^T [g_1, g_2, \dots, g_m] \quad (18)$$

と変形できる。この(18)式より重み系列行列 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$ を推定することとする。この時つぎの定理を得る。

《定理 1》 (18)式から得られた $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$ の推定値 $\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \dots, \hat{\phi}_N$ は近似的に不偏推定量となる。

(証明) いま

$$Z \triangleq [z(N), z(N+1), \dots, z(M-1)]^T \quad (19)$$

と定義しておく。さて、(13)式に(10)式を代入し(14)式と(19)式を用いれば、次式の関係を得る。

$$[g_1, g_2, \dots, g_m] \simeq U\Psi + Z \quad (20)$$

この(20)式を(18)式に代入すれば、

$$\hat{\Psi} \simeq \Psi + [U^T U]^{-1} U^T Z \quad (21)$$

となる。ここで、つぎの定義を行う。

$$[U^T U]^{-1} U^T \triangleq [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{M-N}] \quad (22)$$

(22)式において、 $\alpha_i (i=1, 2, \dots, M-N)$ は $\{(r+1)^N - 1\}$ 次元ベクトルで入力に依存した値である。(21)式に(19)式と(22)式の関係を用いれば

$$\begin{aligned} \hat{\Psi} \simeq & \Psi + \alpha_1 z(N)^T + \alpha_2 z(N+1)^T + \dots \\ & + \alpha_{M-N} z(M-1)^T \end{aligned} \quad (23)$$

となる。一方、(9)式を展開して(2)式を用いれば

$$\begin{aligned} z(k) = & CR^{(1)} w^{(1)}(k-1) + CR^{(2)} w^{(2)}(k-2) \\ & + CR^{(3)} w^{(3)}(k-3) + \dots + CR^{(k)} w^{(k)}(0) \\ & + v(k) \\ = & CR^{(1)} w(k-1) + CR^{(2)} \tilde{u}(k-1) \otimes w(k-2) \\ & + CR^{(3)} \tilde{u}(k-1) \otimes \tilde{u}(k-2) \otimes w(k-3) + \dots \\ & + CR^{(k)} \tilde{u}(k-1) \otimes \dots \otimes \tilde{u}(1) \otimes w(0) + v(k) \end{aligned} \quad (24)$$

となる。したがって、(24)式と仮定 [A.1], [A.2] より

$$\begin{aligned} E[\alpha_i z(N+i-1)^T] &= E\{\alpha_i\} \cdot E\{w(N+i-2)^T\} (CR^{(1)})^T \\ &+ E\{\alpha_i \tilde{u}(N+i-2)^T\} \\ &\otimes E\{w(N+i-3)^T\} (CR^{(2)})^T \\ &+ E\{\alpha_i \tilde{u}(N+i-2)^T \otimes \tilde{u}(N+i-3)^T\} \\ &\otimes E\{w(N+i-4)^T\} (CR^{(3)})^T + \dots \\ &+ E\{\alpha_i \tilde{u}(N+i-2)^T \otimes \dots \otimes \tilde{u}(1)^T\} \\ &\otimes E\{w(0)^T\} (CR^{(k)})^T \\ &+ E\{\alpha_i\} \cdot E\{v(N+i-1)^T\} = 0 \\ &\quad (i=1, 2, \dots, M-N) \end{aligned} \quad (25)$$

が成立する。よって(23)式と(25)式から

$$E\{\hat{\Psi}\} \simeq \Psi \quad (26)$$

となる。そして、(26)式に(7)式と(11)式を用いれば明らかにこの定理を得る。(証明終)

4. 内部記述モデルの導出

さきに求めた外部記述モデルから内部記述モデルを導くことを考える。まず、4.1 節で最小双線形実現について考察し、4.2 節で推定された重み系列行列から内部記述モデルを導くための実際的な方法を述べる。

4.1 最小双線形実現

まず、線形システムでよく知られているハンケル行列に相当する。双線形システムのそれを導入しよう。

いま

$$S_{1j} = \phi_j \quad (j=1, 2, 3, \dots) \quad (27)$$

とおき、さらに $S_{ij} (i=2, 3, \dots; j=1, 2, \dots)$ をつぎの規則に従って $S_{i-1, j+1}$ から構成する。まず、 $S_{i-1, j+1}$ を

$$S_{i-1, j+1} = [S^{(1)}_{i-1, j+1} | S^{(2)}_{i-1, j+1} | \dots | S^{(r+1)}_{i-1, j+1}] \quad (28)$$

と $(r+1)$ 個のブロックに等分割する。そして、これらのブロックを縦方向に並べ換えた行列を

$$S_{ij} = [S^{(1)}_{i-1, j+1}]^T, (S^{(2)}_{i-1, j+1})^T, \dots, (S^{(r+1)}_{i-1, j+1})^T]^T \quad (29)$$

とおく。このとき、線形システムにおけるハンケル行列に相当する、双線形システムにおけるそれは

$$S_{\mu\lambda} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1\lambda} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2\lambda} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{\mu 1} & S_{\mu 2} & \dots & S_{\mu\lambda} \end{bmatrix} \quad (30)$$

である⁸⁾。ただし、 $S_{\mu\lambda}$ のサイズは $[m\{(r+1)^n - 1\}/r]$ 行 $[(r+1)^n - 1]$ 列である。これ以降においては(30)式の $S_{\mu\lambda}$ を拡張形ハンケル行列と呼ぶこととする。

さて、ここでは与えられた有限個の零状態入出力マップ $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N\}$ から最小(部分)双線形実現する問題を考える。そのため、まず $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N\}$ を用いて(27)式から(29)式までの手順に従い、(30)式と同形の S_{pq} を構成する。ここで、もし N が偶数であれば $p=q=N/2$ とおき、もし N が奇数であれば $p=(N+1)/2, q=(N-1)/2$ または $p=(N-1)/2, q=(N+1)/2$ とおくものとする。いま、簡単のためにシステムの状態空間の次元数 n と N との間に $N \geq 2n$ という関係があるものと仮定しておく。この時、明らかに

$$\text{rank } S_{pq} = n \quad (31)$$

となる。いいかえれば、状態空間の次元数 n は行列 S_{pq} の階数を調べることでより求めることができる。ただし、ここでいう状態空間とは原点から可到達で可観測な状態を含む空間を指している。なお、明らかに

法ではまず $S_{n,n+1}$ を二つの行列の積に分解 ((38)式) したのち、分解された一方の行列から部分行列を導く操作 ((39), (40), (43)式) を行い、その結果から実現 ((44), (45)式) を行っている。すなわち、操作の手順がまったく異なっており得られた結果の一方である (36)式と (44)式はかなり異なっている。

(ii) 計算量の比較

(36)式と (44)式に着目しよう。まず、 P と E は行、列共に同じサイズをもっている。また、 $S_{nn}^{(i)}$ ($i=1, 2, \dots, r+1$) と $F^{(i)}$ ($i=1, 2, \dots, r+1$) は列のサイズは同じであるが、行のサイズは $S_{nn}^{(i)}$ が $[m\{(r+1)^p-1\}/r]$ であるのに対し、 $F^{(i)}$ は n である。さらに、(36)式には $[m\{(r+1)^p-1\}/r]$ 行 n 列の行列 Q が余計に含まれている。以上から、(44)式の場合は (36)式の場合に比べて演算の回数が格段に少なくて済むことは明らかである。なお、Isidori の場合には、(35)式において Q の全要素を求める必要があるのに対し、本論文の場合には、(38)式において H の最初の m 行のみ求めれば十分である。

(iii) 具体的ケースについての比較

(35)式または (38)式の分解法の最も標準的と思われる方法の一つは、もとの行列 (S_{nn} または $S_{n,n+1}$) の中から 1 次独立な行を第 1 行から順次取出し、それらを上から下へとそのまま集めて P または G とおく方法であろう。本論文の次節ではこの方法を採用することとする。ここではこの方法を例にとって (36)式と (44)式を比較しよう。まず、この場合明らかに $P=E$ である。また、 $S_{nn}^{(i)}$ のある行を取出してそのまま集めて作られた部分行列は $F^{(i)}$ とまったく一致する ($i=1, 2, \dots, r+1$)。換言すれば、 $F^{(i)}$ のすべての行は $S_{nn}^{(i)}$ の行として含まれている。そのため、 $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N\}$ の推定値 $\{\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \dots, \hat{\phi}_N\}$ (推定値には、通常、推定誤差が含まれている) から実現する場合、 Q にも推定誤差の影響が当然含まれていることから、(36)式の累積誤差は (44)式の累積誤差を包含している。また、演算回数の比較から (36)式の累積誤差の程度は (44)式のそれよりもかなり大きいと考えられる (注 3)。なお、(37)式と (45)式に対する推定誤差の影響は同程度であると考えられる。

4.2 推定された重み系列を用いた内部記述モデルの導出

推定された重み系列行列 $\{\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \dots, \hat{\phi}_N\}$ を用い、(27), (28)および (29)式と同じ要領で (30)式と同形の

行列 $\hat{S}_{pq}$ を構成する。すなわち、 $\hat{S}_{1j} \triangleq \hat{\phi}_j$ ($j=1, 2, \dots, N$) とおき

$$\hat{S}_{pq} = \begin{bmatrix} \hat{S}_{11} & \hat{S}_{12} & \dots & \hat{S}_{1q} \\ \hat{S}_{21} & \hat{S}_{22} & \dots & \hat{S}_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{S}_{p1} & \hat{S}_{p2} & \dots & \hat{S}_{pq} \end{bmatrix} \quad (46)$$

を作る。ここで、 N と p, q の関係は (31)式のそれと同じとする。さて、問題となるのは $\hat{S}_{pq}$ の階数の決定である。何故ならば、 $\{\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \dots, \hat{\phi}_N\}$ は真値ではなくその推定値で推定誤差を含んでいるのが普通であり、そのため、 $\hat{S}_{pq}$ の行または列ベクトルのうち本来 1 次従属であるべきものが 1 次独立となって表われる恐れがあるからである。この問題は推定値の精度がかなり高い場合を除いてかなり難しい問題であり、以下に述べる方法が絶対的な方法とは必ずしもいいがたい。しかし、いくつかのシミュレーション結果からかなり有効な方法であると考えられる。この方法は基本行変換のうちの二つの操作、すなわち (1) 任意の行にある実数をかけること、(2) 任意の行に対し、他の行にある実数をかけたものを加えることの 2 操作を $\hat{S}_{pq}$ に施し、行標準形¹¹⁾を模擬した形を形成し、その過程で 1 次独立な行を見出していくものでその手順をつぎに示す。

(i) $\hat{S}_{pq}$ の第 1 行を左から調べて、要素の値の絶対値が ε (これは事前に設定されたしきい値) 以上である最初の要素を見出す。いまこれを j_1 列にある (1, j_1) 要素とする。第 1 行に適当な数をかけて第 2 行に加え (2, j_1) 要素 = 0 とする。以下同様の操作により、 j_1 列で (1, j_1) 要素より下にある要素をすべて零にする。すなわち、(2, j_1) 要素 = (3, j_1) 要素 = $\dots$ = $(m\{(r+1)^p-1\}/r, j_1)$ 要素 = 0 とする。

(ii) つぎに第 2 行について左から調べて、要素の値の絶対値が ε 以上である最初の要素を見出す。これを (2, j_2) 要素とする。そして j_2 列で (2, j_2) 要素より下にある要素をすべて零にする。

(iii) 以下第 3 行から第 $m\{(r+1)^p-1\}/r$ 行まで順次同様の操作を続けるのであるが、途中ある行を左から調べて要素の値の絶対値が ε 以上である要素が含まれていない場合には、その行をとばしてつぎの行に操作を移すこととする。

(iv) 上記の操作の過程で、要素の値の絶対値が ε 以上であるものが含まれていた行は 1 次独立行と判定し、その総和を $\hat{S}_{pq}$ の階数、すなわち、最小 (部分) 双線形実現の次数 (状態空間の次元) とする。

さて、以上の手順で問題として残るのは ε の値をどう選ぶかである。しかし、これをいきなり決定するの

(注 3) 通常の場合、誤差を含んだ要素間の演算回数が増加すればするほど累積誤差は拡大すると思われるのが自然であろう。

は困難であるので以下で述べるように実験的に処理することとしよう。すなわち、いま十分小さい正の実数 ε_0 と Δ を与える。そして、しきい値 ε を $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_i, \dots (\varepsilon_i \triangleq \varepsilon_0 + i\Delta)$ と順次増加させ、それぞれの場合についてさきの(i)~(iv)の手順に従い、システムの次数 $n(\varepsilon_i)$ を求めて表を作る。そして、相対的にかなり多くのしきい値の値 ε_i ($i=i_1, i_1+1, \dots, i_2$; i_1, i_2 はある整数) に対して同一の次数を保つ箇所をさがし、この時の値をシステムの次数として採用する。もし、こうした箇所が複数個あれば、しきい値のより小さいほうに対応する次数を採用するものとする。

こうして次数が決まれば必然的に1次独立な行も決まることになる。さて、求まった $\mathcal{S}_{pq}$ の階数を $\hat{n}$ とし、行列 $\mathcal{S}_{\hat{n}, \hat{n}+1}$ の1次独立な $\hat{n}$ 本の行 ($\mathcal{S}_{pq}$ の1次独立な行と一致していると考え) を上から順番に取出し、それを第1行、第2行、 $\dots$ 、第 $\hat{n}$ 行と並べて作られる行を $\hat{G}$ とおき

$$\mathcal{S}_{\hat{n}, \hat{n}+1} = \hat{H}\hat{G} \quad (47)$$

なる関係を満たす $\hat{H}$ の第1行から第 m 行までを求める。この $\hat{H}$ の各行は一般に以下の形で求まる。いま、 $\hat{H}$ の第 i 行を $\hat{h}_i^T$ とおく。もし、 $\mathcal{S}_{\hat{n}, \hat{n}+1}$ の第 i 行が1次独立行であれば

$$\hat{h}_i^T = (0, \dots, 0, \overset{(i)}{1}, 0, \dots, 0) \quad (48)$$

となり、もし、 $\mathcal{S}_{\hat{n}, \hat{n}+1}$ の第 i 行が1次従属であれば

$$\hat{h}_i^T = (\overset{\leftarrow i-1}{*}, \dots, *, 0, \dots, 0) \quad (49)$$

となる。ここで、*は0とは限らない値をとる要素。

C の推定値 $\hat{C}$ は $\hat{H}$ の第1行から第 m 行までがそのまま $\hat{C}$ のそれである。また、 A, N_i の推定値 $\hat{A}, \hat{N}_i$ (ただし、 $i=1, 2, \dots, r$) は、 $\hat{G}$ を(39)、(40)式と同じ要領で分割し、(43)式と同様の定義に従って、(44)式と同じ関係式より求めることができる。さらに、 B の推定値 $\hat{B}$ は $\hat{G}$ の第1列から第 r 列までがそのまま $\hat{B}$ のそれである。

5. シミュレーションとその結果

つぎに示される2入力、2出力で2次元の状態空間をもつシステムを同定の対象とする。

$$\left. \begin{aligned} x(k+1) &= u_1(k)N_1x(k) + u_2(k)N_2x(k) \\ &\quad + Bu(k) + w(k) \\ y(k) &= Cx(k) + v(k) \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

$$N_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.125 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.05 \\ 0.1 & 0.05 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

入力 $u(k)$ 、システムノイズ $w(k)$ 、観測ノイズ $v(k)$ は

Fig. 1 Relation between threshold value and estimated rank of matrix $\mathcal{S}_{22}$ given by Eq. 62

Table 1 Results of estimation (the contents of () shows its true value)

$\hat{N}_1 =$	$\begin{bmatrix} 0.1045650 & (0.1) & , & 0.09523511 & (0.1) \\ 0.1269830 & (0.125) & , & -0.0022672 & (0.0) \end{bmatrix}$
$\hat{N}_2 =$	$\begin{bmatrix} 0.1162791 & (0.1) & , & 0.03306032 & (0.05) \\ 0.1166740 & (0.1) & , & 0.03249789 & (0.05) \end{bmatrix}$
$\hat{B} =$	$\begin{bmatrix} 1.000293 & (1.0) & , & 0.5010391 & (0.5) \\ 1.000065 & (1.0) & , & 0.5010812 & (0.5) \end{bmatrix}$
$\hat{C} =$	$\begin{bmatrix} 1.0 & (1.0) & , & 0.0 & (0.0) \\ 0.0 & (0.0) & , & 1.0 & (1.0) \end{bmatrix}$

$$\left. \begin{aligned} u(k) &= \lambda(k) \\ w(k) &= 0.01 \{ \lambda'(k) + e^{-1.5} \lambda'(k-1) \\ &\quad + e^{-3.0} \lambda'(k-2) \} \\ v(k) &= 0.01 \{ \lambda''(k) + e^{-1.5} \lambda''(k-1) \\ &\quad + e^{-3.0} \lambda''(k-2) \} \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

で与える。ただし、 $\lambda(k)$ 、 $\lambda'(k)$ 、 $\lambda''(k)$ のそれぞれの要素は $[-1, 1]$ に値をとる一様乱数 (平均零) である。以上の条件のもとで、つぎの評価関数を最小にする $\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \dots, \hat{\phi}_5$ を求めた。

$$J = \sum_{k=5}^{5000} \left\| y(k) - \sum_{i=1}^5 \hat{\phi}_i u^{(i)}(k-i) \right\|^2 \quad (52)$$

この時の推定精度は

$$\left\{ \sum_{i=1}^5 \|\hat{\phi}_i - \phi_i\| / \sum_{i=1}^5 \|\phi_i\| \right\} \approx 1.6 \times 10^{-2} \quad (53)$$

程度であった。ただし $\|\cdot\|$ は行列の全要素を2乗してその総和をとり、その値の平方根で定義している。Fig. 1 はさきに求めた $\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \dots, \hat{\phi}_5$ に対し、4.2節の(i)~(iv)までの手順を適用したときのしきい値の大きさとその時のシステムの次数との関係を示している (ただし $\Delta = \varepsilon_0 = 5 \times 10^{-5}$)。Fig. 1 よりシステムの次数は2と判定できる。これは真の次数と一致している。また、Table 1 はさきに推定された $\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \dots, \hat{\phi}_5$ と次数を用いて実現された $\hat{N}_1, \hat{N}_2, \hat{B}, \hat{C}$ とそれぞれの真値との比較を行っている。この表からかな

り良好な結果が得られたことがわかる。

6. 結 言

双線形システムの外部記述モデルの同定と最小双線形実現の実際的なアルゴリズムを述べた。本方法では、まず入出力データから外部記述モデルを求め、続いてこのモデルに含まれる重み系列行列の推定値から内部記述モデルを導くといった段階的手順を用いたため、状態変数を意識する必要がなく同定論の展開が容易であるといった特長をもっている。実際の場合、状態変数がすべて観測できるのは稀である点を考慮すればこの特長は好ましいと思われる。本文中では推定誤差を含む重み系列行列の推定値から最小双線形実現を行うための実際的な工夫も与えており、実現のアルゴリズム自体も A. Isidori の方法⁸⁾より計算量が少なく、したがって推定誤差を含む重み系列行列の推定値から実現する場合の累積誤差の拡大を小さくおさえることができるという利点がある。

もし、重み系列行列の推定値の個数に比べてシステムの次数が大きすぎる場合には、実現されたモデルはもとのシステムの部分実現となっている。なお、本論文では多入力多出力システムを対象としているが、入力数の増加と共に推定すべき重み系列行列のサイズが非常に大きくなるという問題点もあり、理論上はともかく、実際の見地からはせいぜい数本の入力までが適用できる範囲内であろう。

なお、この研究の一部は、昭和 51 年度科学研究費補助金（奨励研究 (A) 175219）の援助による。

参 考 文 献

- 1) R.R. Mohler: Natural Bilinear Control Process, IEEE Trans. on Systems Science and Cybernetics, **SSC-6-3**, 192/197 (1970)
- 2) C. Bruni, G. Di Pillo and G. Koch: Bilinear Systems; An Appealing Class of "Nearly Linear" Systems in Theory and Applications, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-19-4**, 334/348 (1974)
- 3) R.W. Brockett: System Theory on Group Manifolds and Coset Spaces, SIAM J. Control, **10-2**, 265/284 (1972)
- 4) R.R. Mohler and R.E. Rink: Reachable Zones for Equicontinuous Bilinear Control Process, Int. J. Control, **14-2**, 331/339 (1971)
- 5) T.J. Tarn, D.L. Elliott and T. Goka: Controllability of Discrete Bilinear Systems with Bounded Control, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-18-3**, 298/301 (1973)
- 6) V.I. Buyakas: Optimal Control by Systems with Variable Structure, Automation and Remote Control, **27-4**, 579/589 (1966)
- 7) P. D'Alessandro, A. Isidori and A. Ruberti: Realization and Structure Theory of Bilinear Dynamical Systems, SIAM J. Control, **12-3**, 517/535 (1974)
- 8) A. Isidori: Direct Construction of Minimal Bilinear Realizations from Nonlinear Input-Output Maps, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-18-6**, 626/631 (1973)
- 9) T. Ionescu and R.V. Monopoli: On the Stabilization of Bilinear Systems via Hyperstability, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-20-2**, 280/284 (1975)
- 10) C. Bruni, G. Di Pillo and G. Koch: Bilinear Systems; An Appealing Class of "Nearly Linear" Systems in Theory and Applications, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-19-4**, 342/345 (1974)
- 11) 須田, 児玉: 制御工学者のためのマトリクス理論(2), システムと制御, **15-10**, 864/878 (1971)