パラメータ変化が確率で与えられるシステムの制御[†]

石 松 隆 和*・毛 利 彰*・高 田 勝*

Control of Linear System with Stochastic Parameter Variation

Takakazu ISHIMATSU*, Akira MOHRI* and Masaru TAKATA*

This paper is concerned with the determination of optimal control laws for a linear time-varying system having the possibility of failure. When the system fails, it will take some time for repair before resuming its normal duty. Here we assume the duration of repair as a random variable with a possibility distribution function.

Some results are obtained for the following cases.

- 1) The state (failed or renewed) of the system can be continuously monitored or inspected.
- 2) The state of the system cannot be monitored or inspected.

For the first case the optimal solution can be obtained by extending the results already known. The solution, however, is easily implementable only in case the probability function is exponential. So here we propose a method which gives implementable control laws in more general cases.

For the second case the optimal solution can be obtained by a two-level method.

1. ま え が き

システムを構成する要素の疲労、破損を考慮して、種々の対策がとられている。たとえば、他の要素による代替、あるいは修理などの措置が行われ、システムの機能を極力、低下させない努力が払われている。このような観点から、本論文においてつぎのような特徴を有するシステムを制御することを考える。

- i) システムの要素の寿命は確率変数として与えられる。
- ii) 要素が破損すると、修理されるまでシステムは

他の特性を有する。

iii) 修理に要する時間は確率変数として与えられる。

iv) 要素が修理されたのち、システムの特性は必ずしも破損以前と一致しない。

v) 新しく修理された要素も破損の可能性を有する。

従来の研究として、確率事象が指数分布を有するシステムに対して D.D. Sworder が最適制御方策を与えている¹⁾。また、R.S. Ratner らは 1 次元のシステムに対してではあるが、修理時間をも最適に決定する方法を与えている²⁾。

本研究では、従来の研究^{1)~3)}が確率事象として指数分布に限定していたのに対し、任意の確率事象に対して考察を進める。そして、システムのパラメータ状態の観測可能性、制御方策の実現可能性を考慮して、二つの場合に制御方策を求める。

2. 問題の記述

制御するシステムはつぎの線形微分方程式により記述されるものとする、

$$\dot{x}(t) = A_i(t)x(t) + B_i(t)u(t) \quad (2.1)$$

$$t \in [t_0, t_f], i = 0, \dots, V$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (2.2)$$

ここで、 $x(t)$ は n 次元状態ベクトル、 $u(t)$ は m 次元入力ベクトル、 x_0 は初期状態ベクトル、添字 i はシステムがいかなるパラメータ状態かを示す。 x_0 は指定されているとし、状態ベクトル $x(t)$ は破損、回復の時点において連続と仮定する。また、パラメータ $A_i(t)$, $B_i(t)$ ($i = 0, \dots, V$) は区間 $[t_0, t_f]$ において連続な可制御対とする。システムはつぎのように挙動する。最初の破損が生じるまで、パラメータ状態 $i = 0$ 、破損後 $i = 1$ となる。つぎの修理により $i = 2$ となる。同様な挙動を時刻 t_f まで繰返す。その様子を Fig. 1 に示す。ただし、時刻 t_f までに生じるパラメータ状態の変化は、たかだか V 回であると仮定する。ま

[†] 第 15 回計測自動制御学会学術講演会で発表 (昭 51・8)

* 九州大学工学部 福岡市東区箱崎 6-10-1

* Faculty of Engineering, Kyushu University, Fukuoka

(Received April 30, 1976)

Fig. 1 Operation of the system that may fail

た、各パラメータ状態の持続時間は分布関数 $P_i(\tau)$ にて表わされるとする。

以上の記述により、システムはそれぞれの持続時間が確率変数として与えられる複数のサブシステムにより構成されていると考えられる。以後、破損、修理の明確な区別を行わず単にパラメータ状態の変化と考える。パラメータ状態が A_i, B_i であるときをモードが i であると呼ぶ。

以上のシステムに対し問題は、定められた区間 $[t_0, t_f]$ で2次評価コスト、

$$J = E \left\{ \int_{t_0}^{t_f} [x'(t)Qx(t) + u'(t)Ru(t)] dt + x(t_f)'S_f x(t_f) \right\} \quad (2.3)$$

を極力、小さな値とする制御入力 $u(t)$ を決定することである。ただし、(2.3)式において Q, R はそれぞれ $n \times n$ 半正定値マトリクスおよび $m \times m$ 正定値マトリクスである。

以上の問題をつぎの二つの場合について解く。

- i) 制御区間 $[t_0, t_f]$ において、モードは観測可能。
- ii) 制御区間 $[t_0, t_f]$ において、モードは観測不能。

以上の i) では、制御者がパラメータ状態を情報として得て、それを積極的に制御に取入れる。ii) では、制御者はパラメータ状態を情報として得ることなく制御を行う。

3. モード観測可能な場合

任意時刻 t にてモード観測可能な場合に、指定された区間 $[t_0, t_f]$ で最適解と実用的な近似解を求める。

3.1 最適解

$V=1$ の場合には、すでに最適解が求まっておりつぎの定理により述べられる。

《定理》²⁾

(2.1)~(2.3)式で示される問題の最適制御入力は、モードが0であるときには、

$$u(t) = -R^{-1}B_0'(t)S_0(t)x(t) \quad (3.1)$$

モードが1であるときには、

$$u(t) = -R^{-1}B_1'(t)S_1(t)x(t) \quad (3.2)$$

にて与えられる。ただし、 $S_0(t), S_1(t)$ は次式を満足する。

$$\begin{aligned} -\dot{S}_0(t) &= \frac{q_0(t-t_0)}{1-P_0(t-t_0)}[S_1(t)-S_0(t)] \\ &\quad + A_0'(t)S_0(t) + S_0(t)A_0(t) \\ &\quad - S_0(t)B_0(t)R^{-1}B_0'(t)S_0(t) \\ &\quad + Q, S_0(t_f) = S_f \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} -\dot{S}_1(t) &= A_1'S_1(t) + S_1(t)A_1(t) \\ &\quad - S_1(t)B_1(t)R^{-1}B_1'(t)S_1(t) + Q, \\ S_1(t_f) &= S_f \end{aligned} \quad (3.4)$$

ここで、 $q_i(t-t_0) = dP_i(t-t_0)/dt$ (分布関数は微分可能とする) であり、最適コストは

$$J = x(t_0)'S_0(t_0)x(t_0) \quad (3.5)$$

にて与えられる (付録1参照)。

$V \geq 2$ に対しては、定理より容易につきのことが得られる。

モードが $V+1$ 個存在するとき、第 i モードに対する最適制御入力は、

$$u(t) = -R^{-1}B_i'(t)S_i(t|t_i)x(t) \quad (3.6)$$

である。ただし、 t_i はモードが i となった時刻であり、 $S_i(t|t_i)$ は次式を満たす (注1)。

$$\begin{aligned} -\dot{S}_i(t|t_i) &= \frac{q_i(t-t_i)}{1-P_i(t-t_i)}[S_{i+1}(t|t_i) - S_i(t|t_i)] \\ &\quad + A_i'(t)S_i(t|t_i) + S_i(t|t_i)A_i(t) \\ &\quad - S_i(t|t_i)B_i(t)R^{-1}B_i'(t)S_i(t|t_i) \\ &\quad + Q, S_i(t_f|t_i) = S_f, i=0, \dots, V-1 \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} -\dot{S}_V(t) &= A_V'(t)S_V(t) + S_V(t)A_V(t) \\ &\quad - S_V(t)B_V(t)R^{-1}B_V'(t)S_V(t) + Q, \\ S_V(t_f) &= S_f, S_V(t|t) = S_V(t) \end{aligned} \quad (3.8)$$

最小コストは、

$$J = x(t_0)'S_0(t_0|x(t_0)) \quad (3.9)$$

にて与えられる。

(3.7)式において $P_i(t)$ として指数分布関数、

$$P_i(t) = 1 - e^{-r_i t} \quad (3.10)$$

に限定すると、右辺第1項が、

$$r_i[S_{i+1}(t|t_i) - S_i(t|t_i)] \quad (3.11)$$

となり、 $S_i(t|t_i)$ が t_i に依存しない関数となる。その結果、区間 $[t_0, t_f]$ にて Riccati の微分方程式を $V+1$ 回解くことにより最適解が得られる。しかし、

(注1) $x(t)'S_i(t|t_i)x(t)$ は時刻 t_i にてモード変化 ($i-1 \rightarrow i$) が生じたときの時刻 t 以降のコストの期待値である。 $\dot{S}_i(t|t_i)$ は $S_i(t|t_i)$ の t に関する微分を表わす。

$P_i(t)$ として一般の分布関数を取扱う場合、最適制御を行うためには、前もって時刻 t 、モード状態 i 、モード変化時刻 t_i のすべての組合せに対して (3.7) 式で求まるフィードバックゲインを記憶しておく必要がある。それは膨大な記憶容量を必要とするために実用的でない。つぎの 3.2 節において制御入力として時刻 t モード状態 i 、状態 $x(t)$ のみの陽な関数を得て、

$$\dot{P}_i^*(t) = \frac{\text{Prob}(t=t_{i+1})}{\text{Prob}(t_i \leq t \leq t_{i+1})} \frac{\int_0^{t-t_0} \int_0^{t-t_0-\tau_0} \dots \int_0^{t-t_0-\tau_{i-2}-\dots-\tau_0} \dot{P}_0(\tau_0) \dot{P}_1(\tau_1) \dots \dot{P}_{i-1}(\tau_{i-1}) \dot{P}_i(t-t_0-\tau_{i-1}-\dots-\tau_0) d\tau_{i-1} \dots d\tau_0}{\int_0^{t-t_0} \dots \int_0^{t-t_0-\tau_{i-2}-\dots-\tau_0} \dot{P}_0(\tau_0) \dot{P}_1(\tau_1) \dots \dot{P}_{i-1}(\tau_{i-1}) \{1-P_i(t-t_0-\tau_{i-1}-\dots-\tau_0)\} d\tau_{i-1} \dots d\tau_0} \quad (3.12)$$

本節では第 i モードの制御入力を決定する際に、システムは $\dot{P}_i^*(t)$ なる分布関数でモード変化 ($i \rightarrow i+1$) を生じると考える。その時、つぎのことが述べられる。

システムのモードが i であるとする。時刻 t においてモードが $i+1$ に変わると、区間 $[t, t_f]$ のコストは、

$$J(x, t) = x(t)' Z_{i+1}(t) x(t) \quad (3.13)$$

であるとする。その時、第 i モードでの最適制御入力は (注 2)、

$$u(t) = -R^{-1} B_i'(t) S_i(t) x(t) \quad (3.14)$$

である。ただし、 $S_i(t) (i \neq V)$ は次式を満たす。

$$\begin{aligned} -\dot{S}_i(t) &= A_i'(t) S_i(t) + S_i(t) A_i(t) \\ &\quad - S_i(t) B_i(t) R^{-1} B_i'(t) S_i(t) + Q \\ &\quad + \dot{P}_i^*(t) [Z_{i+1}(t) - S_i(t)], \quad S_i(t_f) = S_f \end{aligned} \quad (3.15)$$

$Z_i(t) (i \neq V)$ は次式を満たす。

$$\begin{aligned} Z_i(t') &= S_i^0(t'|t_i) \quad (t_0 \leq t' \leq t_f) \\ -\dot{S}_i^0(t|t_i) &= \{A_i(t) - B_i(t) R^{-1} B_i'(t) S_i(t)\}' S_i^0(t|t_i) \\ &\quad + S_i^0(t|t_i) \{A_i(t) \\ &\quad - B_i(t) R^{-1} B_i'(t) S_i(t)\} \\ &\quad + S_i(t) B_i(t) R^{-1} B_i'(t) S_i(t) + Q \\ &\quad + \frac{\dot{P}_i(t-t_i)}{1-P_i(t-t_i)} \{Z_{i+1}(t) - S_i^0(t|t_i)\}, \\ S_i^0(t_f|t_i) &= S_f \quad (t_i \leq t \leq t_f) \end{aligned} \quad (3.16)$$

$S_V(t)$, $Z_V(t)$ は次式を満たす。

$$\begin{aligned} -\dot{S}_V(t) &= A_V'(t) S_V(t) + S_V(t) A_V(t) \\ &\quad - S_V(t) B_V(t) R^{-1} B_V'(t) S_V(t) + Q, \end{aligned} \quad \nearrow$$

(注 2) 以下、この節で述べる最適とは第 i モードでシステムは $\dot{P}_i^*(t)$ なるモード変化をするとした場合に対してである。

それを本章の問題に対する実用的な制御入力とすることを考える。

3.2 実用的な近似解

時刻 t においてモードが i であり、 $t_j (1 \leq j \leq i)$ 、モードが j となった時刻は知らないとする。その時、区間 $[t, t+\Delta t]$ でモードが $i+1$ となる確率を $\dot{P}_i^*(t) \Delta t$ とすると、 $\dot{P}_i^*(t)$ は次式により示される。

$$Z_V(t) = S_V(t), \quad S_V(t_f) = S_f \quad (3.17)$$

以上の証明を以下に示す。

時刻 t においてモード状態が $i (i < V)$ のときに $J(x, t)$ を時刻 t から t_f までの最適コストとする。最適性の原理より、

$$\begin{aligned} J(x, t) &= \min_u E \left\{ \int_t^{t+\Delta t} (x' Q x + u' R u) dt \right. \\ &\quad \left. + J(x + \Delta x, t + \Delta t) \right\} \\ &= \min_u \left\{ (x' Q x + u' R u) \Delta t \right. \\ &\quad \left. + [1 - \dot{P}_i^*(t) \Delta t] \left[J(x, t) + \left(\frac{\partial J}{\partial t} \right) \Delta t \right] \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial J}{\partial x} \right) \Delta x + \dot{P}_i^*(t) \Delta t x' Z_{i+1}(t) x \right\} \end{aligned} \quad (3.18)$$

(3.18) 式にて $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ とすると、

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial J}{\partial t} \right) &= \min_u \left\{ x' Q x + u' R u + \left(\frac{\partial J}{\partial x} \right) (A_i x + B_i u) \right. \\ &\quad \left. + \dot{P}_i^*(t) [x' Z_{i+1}(t) x - J(x, t)] \right\} \end{aligned} \quad (3.19)$$

(3.19) 式の解は

$$J(x, t) = x'(t) S_i(t) x(t) \quad (3.20)$$

として与えられ、(3.15) 式が成立する。最適制御入力は (3.14) 式により与えられる。

$x(t)' Z_i(t) x(t)$ はモード変化 ($i-1 \rightarrow i$) が時刻 t で生じたときの時刻 t 以降のコストであるから、フィードバックゲインを (3.14) 式で与えるならば (3.16) 式が成立する (付録 2 参照)。

モードが V であるときには、もはやモード変化しないから明らかに (3.17) 式が成立する。

以上により、一般の分布関数 $P_i(t)$ に従ってモード

変化するシステムに対しての制御方策が求まる。(3.14)式で示されるように、求めた制御方策を行うためには、時間 t とモード状態に対して定まるフィードバックゲインを記憶することが必要である。その計算のために各時刻 t において(3.16)式を解かねばならず、前節と同様にかなりの計算量を要するが、必要な記憶容量は少なく、前節の制御に比べてはるかに実用的である。

本節(3.12)式で求めた $\dot{P}_i^*(t)$ は、第 i モードにおけるモード変化の確率 $\dot{P}_i(t-t_i)$ を区間 $(t_0 \leq t_i \leq t)$ で平均化したものであり、本節の制御方策は前節の問題に対して明らかに最適ではない。しかし $P_i(t)$ を(3.10)式で示される指数分布とするならば(3.15)、(3.16)式、また $\dot{P}_i^*(t) = \dot{P}_i(t-t_i) / \{1 - P_i(t-t_i)\} = r_i$ となることよりここで求めた制御方策は最適制御方策である。

4. モード観測不能の場合

任意時刻 t において、モードの状態を知ることのない場合に区間 $[t_0, t_f]$ で最適制御入力を求める。ただし、制御入力状態変数の線形結合で与えられると仮定する。

4.1 最適解

簡単のために $V=1$ の場合を考える。フィードバックゲインを $G(t)$ とするとコストは

$$J = x_0' S_0(t_0) x_0 \quad (4.1)$$

となる(注3)。ただし、 $S_0(t)$ は次式により与えられる。

$$\begin{aligned} -\dot{S}_1(t) &= \{A_1(t) - B_1(t)G(t)\}' S_1(t) + S_1(t) \{A_1(t) \\ &\quad - B_1(t)G(t)\} + Q + G'(t)RG(t), \\ S_1(t_f) &= S_f \\ -\dot{S}_0(t) &= \{A_0(t) - B_0(t)G(t)\}' S_0(t) + S_0(t) \{A_0(t) \\ &\quad - B_0(t)G(t)\} + Q + G'(t)RG(t) \\ &\quad + \frac{\dot{P}_0(t-t_0)}{1-P_0(t-t_0)} \{S_1(t) - S_0(t)\}, \\ S_0(t_f) &= S_f \end{aligned} \quad (4.2)$$

以上より、最適フィードバックゲインは(4.2)、(4.3)式の条件下で(4.1)式の値を最小とする $G(t)$ である。ハミルトニアンをつぎのように定義する。

$$\begin{aligned} H = tr \left[\sum_{i=1}^1 \phi_i(t) \{ \dot{S}_i(t) + [A_i - B_i G(t)]' S_i(t) \right. \\ \left. + S_i(t) [A_i - B_i G(t)] + Q + G'(t)RG(t) \right. \\ \left. + \frac{\dot{P}_0(t-t_0)}{1-P_0(t-t_0)} \phi_0(t) \{ S_1(t) - S_0(t) \} \right] \end{aligned} \quad (4.4)$$

ここで、 $\phi_i(t)$ は随伴マトリクスである。

(注3) 付録2と同様に証明が可能

Fig. 2 Two-level structure to obtain the optimal solution

最適のための必要条件式として次式が求まる。

$$\sum_{i=0}^1 \{RG(t)\phi_i(t) - B_i'(t)S_i(t)\phi_i(t)\} = 0 \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_0(t) &= (A_0 - B_0 G)\phi_0(t) + \phi_0(t)(A_0 - B_0 G)' \\ &\quad - \frac{\dot{P}_0(t-t_0)}{1-P_0(t-t_0)} \phi_0(t), \quad \phi_0(t_0) = X_0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1(t) &= (A_1 - B_1 G)\phi_1(t) + \phi_1(t)(A_1 - B_1 G)' \\ &\quad + \frac{\dot{P}_0(t-t_0)}{1-P_0(t-t_0)} \phi_0(t), \quad \phi_1(t_0) = 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

ここで、 $X_0 = x_0 x_0'$ である。区間 $[t_0^+, t_f]$ にて、

$$\phi_1(t) + \phi_2(t) \quad (4.8)$$

が正則ならば、最適フィードバックゲインは(4.5)式により、

$$G(t) = R^{-1} \sum_{i=0}^1 \{B_i'(t)S_i(t)\phi_i(t)\} \left\{ \sum_{i=0}^1 \phi_i(t) \right\}^{-1} \quad (4.9)$$

しかし、解析的に最適解を求めることは容易でなく、この配法により解を求める。(4.5)式の左辺は $(\partial J / \partial G(t))$ を表わしている。 $G(t)$ を協調変数とすることにより、Fig. 2 に示す2レベルの計算法となる。

この2レベルの計算手順を以下に示す。

- 1) 第2レベルで $G(t)$ を仮定する。
- 2) 第1レベルで分割した二つの部分問題を解く。
(部分問題・1) (4.2)、(4.3)式より S_0, S_1 を求める。
(部分問題・2) (4.6)、(4.7)式より ϕ_0, ϕ_1 を求める。
- 3) 第2レベルでは評価コストの減少方向に $G(t)$ を修正する。
- 4) $G(t)$ が最適となるまで2)、3)を繰り返す。

$V \geq 2$ の場合にも、以上の方法の適当な修正により最適解が求まる。

5. 計算例

モード変化回数 $V=3$ 、制御区間が $[0, 1.0]$ である例題を考える。分布関数は

$$P_i(t) = t, \quad t \in [0, 1.0]$$

なる一様分布とし、システムならびに評価コストは、

Fig. 3 Feedback gains for Case 1 (Solid line...with mode variation, chain line...without mode variation)

Table 1 Expected costs of the optimal and approximate control

Case	a_0	Parameter a_1	a_2	a_3	Approximate control	Optimal control
1	2.0	1.5	1.0	0.5	3.791	3.791
2	0.5	1.0	1.5	2.0	1.844	1.844
3	2.0	-2.0	3.0	-1.0	3.127	3.126
4	3.0	-3.0	2.0	-2.0	4.823	4.822

Fig. 4 Feedback gains without mode inspection (solid line...with mode variation, chain line...without mode variation)

$$\dot{x}(t) = a_1 x(t) + u(t), \quad x(0) = 1.0$$

$$J = E \left\{ \int_0^{1.0} (x^2 + u^2) dt + x(1.0)^2 \right\}$$

とする。

$a_0 = 2.0$, $a_1 = 1.5$, $a_2 = 1.0$, $a_3 = 0.5$ (Case 1) なるシステムに関して、モード観測可能な場合の各モードに対する実用的なフィードバックゲインを Fig. 3 に示す(実線)。また、比較のためにモード変化がない場合の各パラメータに対する最適フィードバックゲ

インも Fig. 3 に示す(破線)。モード変化がある場合は、モード変化がない場合に比べてフィードバックゲインが減少している。

3.2 節で求めた制御方策の妥当性を示すために、3.1 節で求めた最適制御方策との比較を種々のモード変化に対して行った。その結果を Table 1 に示す。Table 1 に示した各モード変化に対する実用的な近似解は最適解にきわめて近い。それゆえ、ここで取扱ったシステムはすべての t_i に対してフィードバックゲインを記憶する必要はなく、各モードに対して一つのフィードバックゲインを記憶するのみで良好な制御を行うことが可能である。

つぎに $V=1$, $P_1(t)=1-e^{-0.5t}$, $a_0=2.0$, $a_1=0.5$ とした場合のモード観測不能時の最適解(実線)と、モード変化がないとしたときの最適解(破線)を Fig. 4 に示す。モード観測可能な場合と同様にフィードバックゲインが減少している。最適コストは $J=3.89$ であった。

6. あとがき

従来、主な研究は取扱いやすい指数分布を対象としてきた。本論文では、より一般の分布関数を対象として、つぎの二つの場合に最適制御方策を求めた。

- i) 制御者はモード状態を知りうる。
- ii) 制御者はモード状態を知らない。

i) では、最適解は膨大な計算と記憶を必要とし非実用的である。そのため、システムのモード変化時間の分布関数の修正(平均化)により、必要な記憶容量が少ない実用的な制御方策を得た。その制御方策はモード変化に対応してフィードバックゲインの切替えを行うものである。また、その方策はモード変化が指数分布に従う場合は最適制御方策となる。

ii) では、最適解が解析的に求まらず、こう配法などを用いることが必要である。本論文では、フィードバックゲイン $G(t)$ を協調変数にとり、2レベルの最適解計算法を得た。

最後に、例題により実用的な近似解の妥当性を示した。

参考文献

- 1) D.D. Swonder: Feedback Control of a Class of Linear Systems with Jump Parameters, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-14-1**, 9/14(1969)
- 2) R.S. Ratner and D.G. Luenberger: Performance Adaptive Renewal Policies for Linear Systems, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-14-4**, 344/351 (1969)
- 3) D.D. Swonder: Uniform Performance-Adaptive

Renewal Policies for Linear Systems, IEEE Trans.
on Automatic Control, AC-15-5, 581/583 (1970)

《付 録》

付録1—(3.1)～(3.5)式の導出

R. S. Ratner らが求めた(3.1)～(3.5)式はダイナミックプログラミングにより同様に求まる。

時刻 t において、システムのモードが1であるならば最適制御入力(3.2), (3.4)式にて与えられることは明らかである。

時刻 t において、システムのモードが0であるならば、区間 $[t, t_f]$ における最適コストを $J(x, t)$ とすると、

$$J(x, t) = \min_u E \left[\int_t^{t+\Delta t} (x'Qx + u'Ru) dt + J(x + \Delta x, t + \Delta t) \right] \quad (A.1)$$

$\Delta x, \Delta t$ に関して Taylor 展開すると右辺は

$$\begin{aligned} & \min_u \left[(x'Qx + u'Ru) \Delta t \right. \\ & + \frac{P_0(t + \Delta t - t_0) - P_0(t - t_0)}{1 - P_0(t - t_0)} x' S_1(t) x \\ & + \frac{1 - P_0(t + \Delta t - t_0)}{1 - P_0(t - t_0)} \left\{ J(x, t) + \left(\frac{\partial J}{\partial x} \right) (A_0 x \right. \\ & \left. + B_0 u) \Delta t + \left(\frac{\partial J}{\partial t} \right) \Delta t + O(\Delta t^2) \right\} \left. \right] \quad (A.2) \end{aligned}$$

ここで、

$$\frac{P_0(t + \Delta t - t_0) - P_0(t - t_0)}{1 - P_0(t - t_0)} \left(\frac{1 - P_0(t + \Delta t - t_0)}{1 - P_0(t - t_0)} \right) \quad (A.3)$$

は区間 $[t, t + \Delta t]$ にてモード変化が起る(起らない)確率である。(A.2)式にて $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ とすると

$$-\left(\frac{\partial J}{\partial t} \right) = \min_u \left\{ x'Qx + u'Ru + \left(\frac{\partial J}{\partial x} \right) (A_0 x + B_0 u) \right.$$

$$\left. + \frac{\dot{P}_0(t - t_0)}{1 - P_0(t - t_0)} (S_1(t) - J) \right\} \quad (A.4)$$

(A.4)式にて $J(x, t) = x' S_0(t) x$ とおくと(3.1), (3.3)式を得る。

付録2—(3.16)式の導出

(3.16)式の導出を以下に行う。

定義より、

$$\begin{aligned} & x(t_i)' Z_i(t_i) x(t_i) \\ & = E \left\{ \int_{t_i}^{t_{i+1}} (x'Qx + u'Ru) dt \right. \\ & \quad \left. + x(t_{i+1})' Z_{i+1}(t_{i+1}) x(t_{i+1}) \right\} \\ & = \int_{t_i}^{t_f} \left\{ \int_{t_i}^{t_{i+1}} (x'Qx + u'Ru) dt \right. \\ & \quad \left. + x(t_{i+1})' Z_{i+1}(t_{i+1}) x(t_{i+1}) \right\} \dot{P}_i(t_{i+1} - t_i) dt_{i+1} \\ & \quad + \{1 - P_i(t_f - t_i)\} \left\{ x(t_f)' Z_{i+1}(t_f) x(t_f) \right. \\ & \quad \left. + \int_{t_i}^{t_f} (x'Qx + u'Ru) dt \right\} \\ & = \int_{t_i}^{t_f} [x' [Q(1 - P_i(t - t_i)) + Z_{i+1}(t) \dot{P}_i(t - t_i)] x \\ & \quad + u'R \{1 - P_i(t - t_i)\} u] dt + \{1 - P_i(t_f - t_i)\} x(t_f)' Z_{i+1}(t_f) x(t_f) \quad (A.5) \end{aligned}$$

ここで $u(t) = -G(t)x(t)$ とすると

$$\begin{aligned} -\dot{Z}_i &= (A_i - B_i G)' Z_i + Z_i (A_i - B_i G) \\ & \quad + Q \{1 - P_i(t - t_i)\} + \dot{P}_i(t - t_i) Z_{i+1} \\ & \quad + G' R G \{1 - P_i(t - t_i)\}, \quad Z_i(t_f) \\ & = \{1 - P_i(t_f - t_i)\} Z_{i+1}(t_f) \quad (A.6) \end{aligned}$$

上式にて $Z_i(t) = \{1 - P_i(t - t_i)\} S_i(t | t_i)$, $G = R^{-1} B_i' S_i(t)$ とすると(3.16)式が導かれる。