λ -変動を有する系に対する適応オブザーバの一設計法[†]

岩井 善太*・川崎 義則**

A Design Method of Adaptive Observers for Systems with λ -Variation

Zenta IWAI* and Yoshinori KAWASAKI**

This paper deals with the problem of observing the state of control systems with a small positive parameter, λ , the small perturbation which can change the order of the system itself. This control system is called the λ -variation system or the singular perturbation system. From the technological point of view it is the most interesting problem among the problems of systems with parameter variations. The method for designing the adaptive observer that is presented here is considered not only for its order reduction to the λ -variation system, but also for its use for the non-linear system within the linearization.

The design method is applicable

- 1) to a non-linear system and also to cases in which the parameter λ of the system is small, although the real value is not known precisely.
- 2) to the $(n+m)$ -th order real physical system by use of the n -th order observer. In this latter application we can reduce the order of the observer and can also simplify the construction of the observer considerably.

1. 緒 言

制御系の解析, 設計に際し, 制御対象の数学モデルをなるべく低次元で近似しようとする試みは, これまで多くなされてきた. その中でも, 小さな時定数を有する部分システムの動特性を無視する近似手法のある種の一般化ともいえる λ -変動法 (または特異摂動法) は, ほとんどの低次元化手法がその近似精度を定量的

に与えることが困難ななかであって, それが可能な数少ない手法の一つであり, 最適問題に関連して多くの研究がなされてきた^{1)~4)}. ここに, λ は後述するように系の次元に係る微小正数であり $\lambda=0$ とおくことで低次元化が可能となるパラメータである.

さて, この場合, つぎの二つのことに注意する必要がある. それは, たとえ λ の値が微小であっても, λ の微小変動に対し最適解が非常な影響を受ける, すなわち解の λ に関する感度が高くなる場合がしばしばあることと^{2)~4)}, $\lambda=0$ とおいた低次元化はあくまで設計段階での単純化を主眼としたものであり, Sannuti ら²⁾ が指摘しているように, たとえば系の安定性を保証するため実際にはすべての状態変数をフィードバックする形式で制御系を構成しなければならぬ場合があることである. 前者はパラメータ λ の同定を正確に行う必要性を, また後者は状態観測の必要性をそれぞれ示しているといえよう.

この両者を同時に満足する手法として適応オブザーバが有効であろう^{5), 6), 13)}. しかしながら, λ -変動系に対し従来の適応オブザーバをそのまま適用するのであれば, 低次元化が可能であるという λ -変動系の利点がまったく失われてしまうことになる. さらに, それとは別に従来の適応オブザーバは線形系に対してのみ適用可能であるという制約があった.

本報告は, これらの諸点を考慮した適応オブザーバ, すなわち, λ -変動系に対し低次元化問題も考慮され, かつ非線形系に対してもその線形化の範囲で適用可能な適応オブザーバの設計法について一つの提案を行ったものである. 以下, それについて簡単に述べる. いま, 実在する制御系の高次数学モデルが一般の非線形の λ -変動系で表わされているものとする (注1). ただ

[†] 第13回計測自動制御学会学術講演会で発表 (昭49・8)
日本機械学会九州支部熊本地方講演会で発表 (昭50・5)

* 熊本大学工学部 熊本市黒髪 2-39-1

** 有明工業高等専門学校 大牟田市東萩尾町 150

* Faculty of Engineering, Kumamoto University,
Kumamoto

** Ariake Technical College, Omuta
(Received April 19, 1976)

(注1) 以後, 簡単のため, これを実在系と呼ぶ. もちろん, それ自体, 一つの数学モデルにすぎないが, 実際の制御対象を適切に表わしているものと仮定するのである. それに対応する $\lambda=0$ とおいて求まる低次元系を, モデル系と呼ぶことにする.

し、パラメータ λ は微小であることはわかっているがその正確な値は未知であると仮定する。その場合に λ の同定、および実在系とモデル系の状態量の差の推定を同時に行う適応オブザーバを構成する。このような適応オブザーバの構成は可能である。なぜなら実在系とモデル系の状態量差の挙動を規定する変分方程式系は、つねに線形系（ただし変係数系）であるので、従来の線形系に対する理論が多少の変更を加えるだけで適用可能となるからである。さらに、変分方程式系それ自体は低次元化された形で得られるので、対応する適応オブザーバも当然低次元構成が可能となるのである。この結果、実在系の状態量の推定値は、モデル系の状態量と適応オブザーバの状態量から定まることになる。なお、適応オブザーバ内のパラメータ調整則を PID 形式にとり適応性能の改善を試みている。また、適応性の保証には、Popov の超安定定理を用いている。なお、最近、モデル規範形適応制御系の場合に同様の扱いを行った報告¹⁶⁾がある。

以下、2. では問題を定式化し、3. で変分方程式系を導く。そして 4. において変分方程式系に対して適応オブザーバを構成する。また 5. では説明のために簡単な例題を示す。

2. 問題の定式化

制御対象の高次数学モデル（実在系）が、

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = f(\tilde{x}(t), \tilde{z}(t), t) & (1. a) \\ \lambda \dot{\tilde{z}}(t) = g(\tilde{x}(t), \tilde{z}(t), t) & (1. b) \\ \tilde{y}(t) = h(\tilde{x}(t), \tilde{z}(t), t) & (1. c) \end{cases}$$

$$\tilde{x}(0) = x_0, \quad \tilde{z}(0) = z_0$$

なる $(n+m)$ 次の一般の非線形常微分方程式で表わされている場合を考える。ここに、 $\tilde{x}(t), \tilde{z}(t), \tilde{y}(t)$ は、それぞれ n 次状態ベクトル、 m 次状態ベクトル、スカラー出力である。入力 $u(t)$ は明記していないが、既知であるとし右辺に含めて表わしている。出力 $\tilde{y}(t)$ のみが検出可能であるとし、系の初期状態量 x_0, z_0 は既知であると仮定しておく。また、(1. b) 式の左辺の λ が注目すべき正の微小なスカラー量である。ただし、このパラメータ λ の正確な値は不明であるとする。 λ は、たとえば微小な時定数、質量、慣性モーメントなどに相当するものと考えられる。(1. b) 式において、 λ を無視すれば、

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), \varphi(x(t), t), t) & (2. a) \\ y(t) = h(x(t), \varphi(x(t), t), t) & (2. b) \end{cases}$$

$$x(0) = x_0$$

なる次数が n 次に降下した系を得ることができる。ここに、 $\varphi(x(t), t)$ は (1. b) 式で $\lambda=0$ とおき $z(t)$ につ

いて解き出したものである。 g が一意解をもたぬ場合^{14), 15)}も考えられるが、ここでは問題を g が一意解をもつ場合に限定し、 $z(t)$ がこのように解き出せるものと仮定する。さらに $x(t), \forall t \in [0, \infty)$ は有界であるとする。系 (2) が実在系 (1) に対するモデル系である。実在系 (1) とモデル系 (2) の関係は、パラメータ λ が実際には零でないのにもかかわらずシステム設計の簡単化のために設計者により $\lambda=0$ とおかれる、いわゆる低次元設計がなされたとも解釈できるし、あるいは感度解析の見地から、当初 $\lambda=0$ でプラントを運転開始したが、その後 λ に微小変動が生じ、その影響が無視できぬものとなったと考えることもできよう。

本報告の目的は、前節で述べたように検出可能な出力 $\tilde{y}(t)$ から実在系の全状態量 $(\tilde{x}(t), \tilde{z}(t))$ を観測する問題を考察することにある。そのため、ここではモデル系の解を基準とし、実在系とモデル系の状態量の差、 $\Delta x(t) = \tilde{x}(t) - x(t), \Delta z(t) = \tilde{z}(t) - z(t)$ を観測することを試みる。 λ が微小であれば変動量は線形の変分方程式系に従うので、変動量の観測には線形系に対する観測器が使用可能となる。この場合、実在系の状態推定値を (モデル系状態量) + (観測器出力) の形で得ることができる。この観測器として、ここでは Narendra らによって定式化された適応オブザーバを採用する。この方針に基づいて具体的な観測器の構成法について述べることにする。そのために、まず変分方程式系を導いておく。

3. 変分方程式の導出

感度解析における λ -変動問題に対する考察により、つぎの仮定をおく。

$$z(t) = \phi(x(t), t) \text{ が補助方程式}$$

$$dz(\tau)/d\tau = g(x(\tau), z(\tau), t) \quad (3)$$

の Lyapunov の意味での漸近安定な平衡点である。ただし t および $x(t)$ はパラメータとして固定されている^{11), 12)}。 $f(x(t), z(t), t), g(x(t), z(t), t)$ および $h(x(t), z(t), t)$ がその要素につき 2 回までそれぞれ連続微分可能であり、 $|\partial g / \partial z| \neq 0, \forall t \in [0, \infty)$ である^{11), 12)}。

このとき、 λ が微小という仮定のもとで、実在系とモデル系の状態量、出力量の差は、

$$\begin{cases} \Delta x(t) = \tilde{x}(t) - x(t) = \xi(t)\lambda + O(\lambda^2) = \delta x(t) + O(\lambda^2) & (4. a) \\ \Delta z(t) = \tilde{z}(t) - z(t) = \zeta(t)\lambda + O(\lambda^2) = \delta z(t) + O(\lambda^2) & (4. b) \\ \Delta y(t) = \tilde{y}(t) - y(t) = \eta(t)\lambda + O(\lambda^2) = \delta y(t) + O(\lambda^2) & (4. c) \end{cases}$$

で表わせる。ここに、 $O(\lambda^2)$ は λ に関する 2 次以上の

高次項を示す。以下では、 $0(\lambda^2)$ が $t \in [0, \infty)$ で微小であり無視できるものとして議論する。また、 $\xi(t)$, $\zeta(t)$, $\eta(t)$ はつぎの λ -感度方程式, λ -感度出力方程式から求まる。

$$\dot{\xi}(t) = \mathbf{A}(t)\xi(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{v}^*(t) \quad (5. a)$$

$$\eta(t) = \mathbf{c}(t)\xi(t) + \mathbf{d}(t)\mathbf{v}^*(t) \quad (5. b)$$

$$\zeta(t) = \left\{ -\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{z}}\right)^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\right) \right\} \bigg|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{z}=\mathbf{z}(t)}} \xi(t) + \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{z}}\right)^{-1} \bigg|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{z}=\mathbf{z}(t)}} \mathbf{v}^*(t) \quad (5. c)$$

$$\mathbf{v}^*(t) = \dot{\mathbf{z}}(t) = \dot{\phi}(\mathbf{x}(t), t) \quad (5. d)$$

ただし

$$\mathbf{A}(t) = \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right) - \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}}\right) \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{z}}\right)^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\right) \right\} \bigg|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{z}=\mathbf{z}(t)}}$$

(以後 $(\cdot)$ は省略する)
 $\bigg|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{z}=\mathbf{z}(t)}}$

$$\mathbf{B}(t) = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}}\right) \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{z}}\right)^{-1},$$

$$\mathbf{c}(t) = \left(\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}\right) - \left(\frac{\partial h}{\partial \mathbf{z}}\right) \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{z}}\right)^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\right),$$

$$\mathbf{d}(t) = \left(\frac{\partial h}{\partial \mathbf{z}}\right) \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{z}}\right)^{-1}$$

である。また、初期条件は、

$$\xi(0) = \int_0^\infty \{ \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}(\tau), 0) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \phi(\mathbf{x}_0, 0), 0) \} d\tau \quad (6)$$

である。ここに $\mathbf{z}(\tau)$ は、補助方程式

$$\frac{d\mathbf{z}(\tau)}{d\tau} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}(\tau), 0), \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0 \quad (7)$$

の解である。なお、 $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{c}(t)$, $\mathbf{d}(t)$ はモデル系の解に沿って評価したものである。

さて、(4), (5)式から

$$\delta \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\delta \mathbf{x}(t) + \tilde{\mathbf{B}}(t)\lambda \quad (8. a)$$

$$\delta y(t) = \mathbf{c}(t)\delta \mathbf{x}(t) + \tilde{\mathbf{d}}(t)\lambda \quad (8. b)$$

$$\delta \mathbf{z}(t) = -\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{z}}\right)^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\right) \delta \mathbf{x}(t) + \lambda \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{z}}\right)^{-1} \mathbf{v}^*(t) \quad (8. c)$$

$$\delta \mathbf{x}(0) = \xi(0)\lambda$$

なる n 次の線形な変分方程式系を得る。ここに、

$$\tilde{\mathbf{B}}(t) = \mathbf{B}(t)\mathbf{v}^*(t), \quad \tilde{\mathbf{d}}(t) = \mathbf{d}(t)\mathbf{v}^*(t)$$

である。

つぎに系(8)に対して適応オブザーバを適用する準備として、系(8)を正準形式に変換しておく。そのためには、

1) $(d^j/dt^j)\mathbf{A}(t)$, $j=1, \dots, 2(n-1)$, $(d^k/dt^k)\mathbf{c}(t)$, $k=1, \dots, 2n-1$, $\forall t \geq 0$ が定義されて有界である。

2) 系(8)が一樣可観測である。すなわち、 $\text{rank } \mathbf{H}(t) = n$, $\forall t \geq 0$, $\det |\mathbf{H}(t)| \geq m > 0$ なる定数 m が存在する。ただし

$$\mathbf{H}(t) = [\mathbf{c}_1(t), \mathbf{c}_2(t), \dots, \mathbf{c}_n(t)]^T, \quad ("T" \text{ は転置を示す})$$

$$\mathbf{c}_1(t) = \mathbf{c}(t), \quad \mathbf{c}_i(t) = (d/dt)\mathbf{c}_{i-1}(t) + \mathbf{c}_{i-1}(t)\mathbf{A}(t), \quad i=2, \dots, n.$$

である。

の条件⁹⁾が満足されておればよい。この条件のもとに、Lyapunov 変換と呼ばれるすべての $t \geq 0$ に対して定義される正則変換行列 $\mathbf{T}(t)$ が存在し、

$$\delta \mathbf{x}(t) = \mathbf{T}(t)\delta \mathbf{x}^*(t) \quad (9)$$

により、系(8)はつぎの正準形式に変換される。

$$\delta \dot{\mathbf{x}}^*(t) = \mathbf{A}^*(t)\delta \mathbf{x}^*(t) + \mathbf{B}^*(t)\lambda \quad (10. a)$$

$$\delta y(t) = \mathbf{c}^*\delta \mathbf{x}^*(t) + \tilde{\mathbf{d}}(t)\lambda \quad (10. b)$$

$$\delta \mathbf{z}(t) = -\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{z}}\right)^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\right) \mathbf{T}(t)\delta \mathbf{x}^*(t) + \lambda \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{z}}\right)^{-1} \mathbf{v}^*(t) \quad (10. c)$$

$$\delta \mathbf{x}^*(0) = \mathbf{T}^{-1}(0)\xi(0)\lambda$$

ここに、

$$\mathbf{A}^*(t) = \mathbf{T}^{-1}(t) \{ \mathbf{A}(t)\mathbf{T}(t) - \dot{\mathbf{T}}(t) \}$$

$$= \left[-\mathbf{a}(t) \left| \begin{array}{c} \mathbf{I}_{n-1} \\ 0 \end{array} \right. \right], \quad (\mathbf{I}_{n-1}: (n-1) \text{ 次元単位行列})$$

$$\mathbf{B}^*(t) = \mathbf{T}^{-1}(t)\tilde{\mathbf{B}}(t), \quad \mathbf{c}^* = \mathbf{c}(t)\mathbf{T}(t) = [1, 0, \dots, 0]$$

である。

4. 適応オブザーバの構成

系(10)に対し、つぎのような形をした n 次の適応オブザーバを導入する。

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{s}}}(t) &= \mathbf{K}\hat{\mathbf{s}}(t) + (\mathbf{k} - \mathbf{a}(t))\Delta y(t) \\ &\quad + \{ \mathbf{B}^*(t) - (\mathbf{k} - \mathbf{a}(t))\tilde{\mathbf{d}}(t) \} \hat{\lambda}(t) + \mathbf{r}(t) \end{aligned} \quad (11)$$

ただし、

$$\mathbf{K} = \left[-\mathbf{k} \left| \begin{array}{c} \mathbf{I}_{n-1} \\ 0 \end{array} \right. \right], \quad \mathbf{k} = [k_1, \dots, k_n]^T$$

ここに、 $\mathbf{k}$ は n 次既知定数ベクトルであり、 $\mathbf{K}$ が安定行列となるように選ばれたものとする。 $\hat{\lambda}(t)$ は、パラメータ λ を同定する可変パラメータ、 $\mathbf{r}(t)$ はオブザーバに加えられる n 次信号ベクトルである。

(10), (11)式より、

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{s}}}(t) - \delta \dot{\mathbf{x}}^*(t) &= \mathbf{K} \{ \hat{\mathbf{s}}(t) - \delta \mathbf{x}^*(t) \} \\ &\quad + \{ \mathbf{B}^*(t) - (\mathbf{k} - \mathbf{a}(t))\tilde{\mathbf{d}}(t) \} (\hat{\lambda}(t) - \lambda) \\ &\quad + \mathbf{r}(t) + (\mathbf{k} - \mathbf{a}(t))0(\lambda^2) \end{aligned} \quad (12)$$

を得る。いま、

$$\mathbf{e}(t) = \hat{\mathbf{s}}(t) - \delta \mathbf{x}^*(t), \quad \beta(t) = \hat{\lambda}(t) - \lambda,$$

$$\mathbf{b}(t) = \mathbf{B}^*(t) - (\mathbf{k} - \mathbf{a}(t))\tilde{\mathbf{d}}(t)$$

とおき、また前述のとおり $0(\lambda^2)$ を無視すれば(12)式は、

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{K}\mathbf{e}(t) + \mathbf{b}(t)\beta(t) + \mathbf{r}(t) \quad (13)$$

で表わされる。目的は、漸近的に

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}(t) = \mathbf{0} \quad (14. a)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta(t) = 0 \quad (14. b)$$

となるように $\mathbf{k}$, $\lambda(t)$, $\mathbf{r}(t)$ を決定することである。ここに、 $\mathbf{e}(t) = [e_1(t), e_2(t), \dots, e_n(t)]^T$ である。そこで、いま(13)式を $e_1(t)$ に関する方程式として書き改めると、

$$p^n e_1(t) + \sum_{i=1}^n k_i p^{n-i} e_1(t) = p^{n-1} \sum_{i=1}^n \frac{b_i(t)\beta(t) + r_i(t)}{p^{i-1}} \quad (15) \nearrow$$

となる。ここに、 $p \triangleq d/dt$, $[b_i(t)] = \mathbf{b}(t)$ である。いま

$$\mathbf{r}(t) = -p \{ \beta(t) + \sigma e_1(t) w(t) + \gamma p(e_1(t) w(t)) \}$$

$$\sum_{i=1}^n D_i \mathbf{v}_i(t) + \sigma e_1(t) w(t) \sum_{i=1}^n A_i \mathbf{v}_i(t)$$

$$+ \gamma e_1(t) w(t) \sum_{i=1}^n F_i \mathbf{v}_i(t)$$

$$+ \gamma p(e_1(t) w(t)) \left[\frac{\mathbf{d}^{*T} \mathbf{v}_1 - w(t)}{\begin{bmatrix} v_2^1 \\ \vdots \\ v_n^1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d_2^* \\ \vdots \\ d_n^* \end{bmatrix} v_1^1} \right] \quad (16)$$

ただし、 $\rho > 0$, $\sigma, \gamma \geq 0$ なる定数であり、

$$D_i = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & \\ \hline 0 & \dots & 0 \quad -1 \\ \vdots & \ddots & -d_2^* \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \hline -1 & -d_2^* & \dots & -d_{i-1}^* \\ \hline 0 & & & d_{i+1}^* & d_{i+2}^* & \dots & d_n^* \\ & & & d_{i+2}^* & \ddots & & 0 \\ & & & \vdots & \ddots & & \vdots \\ & & & d_n^* & 0 & \dots & 0 \end{array} \right)_{i-1}^{n-i} \quad (17)$$

$$A_i = \left(\begin{array}{c|c|c} & -1 & \\ \hline 0 & -d_2^* & 0 \\ \vdots & \vdots & \\ \hline & -d_{i-1}^* & \\ \hline 1 & d_2^* \dots d_{i-1}^* & 0 & d_{i+1}^* \dots d_n^* \\ \hline 0 & -d_{i+1}^* & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline & -d_n^* & & 0 \end{array} \right)_{i-1}^{n-i} \quad (18)$$

$$F_i = \left(\begin{array}{c|c|c|c} & 1 & -d_2^* & \\ \hline & d_2^* & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ \hline & d_{i-2}^* & -d_{i-1}^* & \\ \hline 1 & d_2^* & \dots & d_{i-2}^* & 2d_{i-1}^* & 0 & 0 \\ \hline -d_2^* & -d_3^* & \dots & -d_{i-1}^* & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)_{i-1}^{n-i} \quad (19)$$

$\mathbf{v}_i(t) = [v_i^1(t), \dots, v_i^n(t)]^T$, $w(t) = \sum_{i=1}^n v_i^i(t)$, $\mathbf{d}^* = [1, d_2^*, d_3^*, \dots, d_n^*]^T$ である。ここに $\mathbf{v}_i(t)$ は、つぎの generating filter から得られる補助信号である。

$$\begin{cases} v_i^1(t) = b_i(t) - \sum_{l=2}^n d_l^* v_i^l(t) \\ \dot{v}_i^{l+1}(t) = v_i^l(t) \end{cases} \quad (17. a)$$

$$\dot{v}_i^{l+1}(t) = v_i^l(t) \quad (17. b)$$

$\mathbf{r}(t)$ をこのように選ぶとき、(15)式は、

$$p^n e_1(t) + \sum_{i=1}^n k_i p^{n-i} e_1(t) = p^{n-1} \sum_{i=1}^n \frac{d_i^* \beta(t) w(t)}{p^{i-1}} \quad (18)$$

のように書き改めることができる。ここで、

$$\begin{cases} \varepsilon_1(t) = e_1(t) \\ \dot{\varepsilon}_i(t) = -k_i \varepsilon_i(t) + \varepsilon_{i+1}(t) \\ + d_i^* \beta(t) w(t), \quad (i=2, \dots, n) \end{cases} \quad (19. a)$$

$$+ d_i^* \beta(t) w(t), \quad (i=2, \dots, n) \quad (19. b) \nearrow$$

とおけば、(18)式は、ベクトル形式

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = \mathbf{K}\boldsymbol{\varepsilon}(t) + \mathbf{d}^*(\beta(t)w(t)) \quad (20. a)$$

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = \mathbf{K}\boldsymbol{\varepsilon}(t) + \mathbf{d}^*(\beta(t)w(t)) \\ e_1(t) = \mathbf{c}^* \boldsymbol{\varepsilon}(t) = \varepsilon_1(t) \end{cases} \quad (20. b)$$

で表わされる。したがって系(20)の誤差空間 $(\boldsymbol{\varepsilon}, \beta)$ の原点に関する大域漸近安定性が保証されれば目的は達成される。

Popov の超安定定理によれば¹⁰⁾,

1) 系(20)において、 $\beta(t)w(t)$ を入力、 $e_1(t)$ を出力とみなしたときの伝達関数が強正実

$$2) \int_0^T e_1(t) \beta(t) w(t) dt \leq \rho_0^2, \quad \forall T \geq 0, \quad \forall \rho_0 > 0 \quad (21)$$

なる条件が満足されるならば、 $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ は原点に関して大域的漸近安定となる。1)については、

Fig. 1 Schematic diagram of overall scheme

$$G(s) = \mathbf{c}^*(s\mathbf{I} - \mathbf{K})^{-1}\mathbf{d}^* \quad (22)$$

であるから $(\mathbf{K}, \mathbf{d}^*)$ の要素を適当に選ぶことにより, $G(s)$ を強正実ならしめることができる¹¹⁾. また, 2) は, パラメータ調整則として,

$$\begin{aligned} \dot{\beta}(t) = & -\rho \int_0^t e_1(\tau)w(\tau)d\tau - \sigma e_1(t)w(t) \\ & - \gamma p \{e_1(t)w(t)\} + \beta_0 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\beta_0 \triangleq \sigma e_1(0)w(0) + \beta(0)$$

を用いることで満足される (付録 1. 参照). ここで, (23)式の右辺第 2, 第 3 項 (それぞれ, 比例項, 微分項) は, 系 (20) の安定性を保証するために必ずしも必要ではないが, σ, γ の値を適当に定めることにより, 誤差空間における原点への収束速度の改善を試みたものである.

$$\begin{aligned} (23) \text{ 式より } p[\dot{\beta}(t) + \sigma e_1(t)w(t) + \gamma p \{e_1(t)w(t)\}] \\ = -\rho e_1(t)w(t) \end{aligned} \quad (24)$$

を得る. (24) 式を (16) 式に代入することにより

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) = & \rho e_1(t)w(t) \sum_{i=1}^n D_i \mathbf{v}_i(t) + \sigma e_1(t)w(t) \sum_{i=1}^n A_i \mathbf{v}_i(t) \\ & + \gamma e_1(t)w(t) \sum_{i=1}^n F_i \mathbf{v}_i(t) \\ & + \gamma p \{e_1(t)w(t)\} \left[\begin{array}{c} \mathbf{d}^{*T} \mathbf{v}_1(t) - w(t) \\ \vdots \\ \mathbf{d}_2^{*T} \mathbf{v}_1(t) - \mathbf{d}_2^{*T} \mathbf{v}_1(t) \\ \vdots \\ \mathbf{d}_n^{*T} \mathbf{v}_1(t) - \mathbf{d}_n^{*T} \mathbf{v}_1(t) \end{array} \right] \end{aligned} \quad (25)$$

すなわち, 直接測定可能な $e_1(t), w(t)$ のみを用いて実現できる. 以上では $\beta(t)$ の漸近安定性については触れていないが,

$$\left. \{D(p)\mathbf{b}(t)\} \right|_{t=t_1} \neq 0, \quad t_1 \in \Omega \quad (26)$$

$$D(p) \triangleq [p^{n-1}, p^{n-2}, \dots, p, 1], \quad \Omega = \{t | \epsilon(t) \equiv 0\}$$

が成立しているならば, $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta(t) = 0$ も保証される (付録 2. 参照).

以上のことから, 実在系 (1) の状態量 $(\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{z}}(t))$ の推定値 $(\hat{\hat{\mathbf{x}}}(t), \hat{\hat{\mathbf{z}}}(t))$ として,

$$\hat{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{x}(t) + \mathbf{T}(t)\mathbf{s}(t) \quad (27. a)$$

$$\begin{aligned} \hat{\hat{\mathbf{z}}}(t) = & \mathbf{z}(t) + \left[-\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{z}} \right)^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \right) \mathbf{T}(t)\mathbf{s}(t) \right. \\ & \left. + \lambda(t) \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{z}} \right)^{-1} \mathbf{v}^*(t) \right] \end{aligned} \quad (27. b)$$

を得る. このようにして得られる全体の構造を Fig. 1 に示す.

5. 例 題

上述の構成法の適用例を示す. 実在系が, つぎのような 3 次の非線形系であるとする.

$$\dot{\hat{x}}_1(t) = \hat{x}_2(t), \quad \dot{\hat{x}}_2(t) = \hat{z}(t)$$

$$\lambda \dot{\hat{z}}(t) = -\hat{x}_1(t) + 2\epsilon(1 - \hat{x}_1^2(t))\hat{x}_2(t) - \hat{z}(t)$$

$$\hat{y}(t) = \hat{x}_1(t)$$

初期値は $\hat{x}_1(0) = 3.0, \hat{x}_2(0) = 3.0, \hat{z}(0) = 3.0$ とする.

$\epsilon(>0)$ は定数である. モデル系は 2 次の

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) + 2\epsilon(1 - x_1^2(t))x_2(t)$$

$$y(t) = x_1(t), \quad z(t) = \dot{x}_2(t)$$

$$x_1(0) = 3.0, \quad x_2(0) = 3.0$$

であり, Van der Pol の方程式となる. 変換行列 $\mathbf{T}(t)$, および正準形式化された変分方程式系は,

$$\mathbf{T}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2\epsilon(1 - x_1^2(t)) & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{x}_1^*(t) \\ \delta \dot{x}_2^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1(t) & 1 \\ -a_2(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1^*(t) \\ \delta x_2^*(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ v^*(t) \end{bmatrix} \lambda$$

$$\delta \dot{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1^*(t) \\ \delta x_2^*(t) \end{bmatrix}$$

(11) 式に対応する適応オブザーバは, 2 次の

$$\begin{bmatrix} \dot{s}_1(t) \\ \dot{s}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 - a_1(t) \\ k_2 - a_2(t) \end{bmatrix} \Delta y(t)$$

$$+ \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -v^*(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 - a_1(t) \\ k_2 - a_2(t) \end{bmatrix} 0 \right\} \lambda(t) + \begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{bmatrix}$$

である. ここで, $a_1(t) = -2\epsilon(1 - x_1^2(t))$, $a_2(t) = 1$, $\Delta y(t) = \hat{y}(t) - y(t)$, $v^*(t) = \hat{z}(t)$, また,

$$\begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{bmatrix} = \rho e_1(t)w(t) \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{d}_2^{*T} \mathbf{v}_1^2(t) - v_2^2(t) \end{bmatrix} + \sigma e_1(t)w(t)$$

$$+ \left[\begin{array}{c} \mathbf{d}_2^{*T} \mathbf{v}_1^2(t) - v_2^2(t) \\ -\mathbf{d}_2^{*T} \mathbf{v}_1^1(t) - v_2^1(t) \end{array} \right] + \gamma e_1(t)w(t) \begin{bmatrix} -\mathbf{d}_2^{*T} \mathbf{v}_1^1(t) + v_2^1(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \gamma p \{e_1(t)w(t)\} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_2^{*T} \mathbf{v}_1^2(t) - v_2^2(t) \\ v_2^1(t) - \mathbf{d}_2^{*T} \mathbf{v}_1^1(t) \end{bmatrix},$$

$$e_1(t) = s_1(t) - \Delta y(t), \quad w(t) = v_1^1(t) + v_2^2(t)$$

である. generating filter は,

$$\begin{cases} \dot{v}_1^1(t) = -\mathbf{d}_2^{*T} \mathbf{v}_1^2(t), & \dot{v}_1^2(t) = v_1^1(t) \\ \dot{v}_2^1(t) = -\hat{z}(t) - \mathbf{d}_2^{*T} \mathbf{v}_2^2(t), & \dot{v}_2^2(t) = v_2^1(t) \end{cases}$$

である. パラメータ調整則は,

$$\begin{aligned} \dot{\beta}(t) = & \dot{\lambda}(t) = -\rho e_1(t)w(t) - \sigma p \{e_1(t)w(t)\} \\ & - \gamma p^2 \{e_1(t)w(t)\} \quad \text{となる.} \end{aligned}$$

λ の真の値が 0.2, Van der Pol の方程式の定数 ϵ が 0.05 であるとしたときの実在系, モデル系のそれぞれの状態量を Fig. 2 に示す. $\lambda=0$ といったモデル系の応答波形が, 実在系のそれとかなり異なってい

Fig. 2 Simulation result of a non-linear system

ることがわかる。Fig. 3 では、適応オブザーバによる未知微小パラメータ λ の同定経過を示している。ただし、適応オブザーバの定数ベクトルを $k=[k_1, k_2]^T=[5.0, 10.0]^T$ 、また $d^*=[d_1^*, d_2^*]^T=[1.0, 5.0]^T$ とおいた場合で、パラメータ調整則において ρ の値を 1.0, 5.0, 10.0 ($\sigma=\gamma=0$) とおいた場合のそれぞれの $\hat{\lambda}(t)$ の同定経過を示す。ただしパラメータの初期値は $\hat{\lambda}(0)=0$ としている。この設定は、モデル系構成では $\lambda=0$ とおくという事実から考えても妥当であろう。同定誤差がみられるが、適応則があくまで第 1 近似に対して設計されているのに対し、実際にはプラントの高次項の影響を無視できないことを示している。図より、 ρ を増すにつれ速応性は増すが、次第に振動性が表われてくることがわかる。この例題の場合、 $\rho=5.0 \sim 10.0$ 程度が良好な同定を示しているといえる。つぎに、各種パラメータの値はそのままとし、 $\rho=10.0$ としたときの（実在系の状態量）-（適応オブザーバによる推定状態量）、すなわち状態観測誤差を Fig. 4 に

Fig. 3 Identification of λ

Fig. 4 observation errors

Fig. 5 Effect of parameters (k, d^*) on identification process of λ

示している。さらに Fig. 5 には $\rho=10.0$ の場合で、 k および d^* をそれぞれ 2, 3 変化させた場合のパラメータ λ の同定経過を示す。Fig. 6 は、これまでの積分項のみのパラメータ調整則に加え、比例項 ($\sigma=0.2$) を加えた場合、その同定経過への影響を示している。本例題に関して、いくつかの効果は認められるが、著しい改善はみられない。前述の ρ を含め、 σ , γ および各種パラメータ k, d^* の値如何により、同定経過は相当異なったものとなる。

6. 結 言

本報告では、パラメータ変動を有する系の中でも、工学的に興味のある問題である。システムの次元を変化させるパラメータ λ をもつ、いわゆる λ -変動を有する制御系の状態観測問題について述べた。ここで示した状態観測手法は、1) 非線形系にもその線形化の範囲内で適用しうること。2) $(n+m)$ 次の実在系に対して観測器を n 次で構成できること。すなわち観測器の低次元化と関連させること。3) それゆえ、観測器構成がかなり簡略化されること。4) パラメータ λ が微小であるということとはわかっている、その正確な値が不明な場合に適用できること。特に λ の微小値近傍で

Fig. 6 Effect of the proportional term on identification process of λ

の変動が系の解に大きく影響を及ぼす場合に有効であること。などを特長としてあげることができよう。

最後に、日頃ご援助と激励をいただいている京都大学工学部 得丸英勝教授に深く感謝いたします。

参考文献

- 1) P.V. Kokotović and P. Sannuti: Singular Perturbation Method for Reducing the Order in Optimal Control Design, IEEE Trans. on AC, **AC-13-4**, 377/384 (1968)
- 2) P. Sannuti and P.V. Kokotović: Near-Optimum Design of Linear Systems by a Singular Perturbation Method, IEEE Trans. on AC, **AC-14-1**, 15/21 (1969)
- 3) 榎木義一他: 階数を変化させるパラメータをもつ系の最適制御, 制御工学, **13-3**, 217/224 (1969)
- 4) P.V. Kokotović and R.A. Yackel: Singular Perturbation of Linear Regulators, Basic Theorems, IEEE Trans. on AC, **AC-17-1**, 29/37 (1972)
- 5) R.L. Carroll and D.P. Lindorff: An Adaptive Observer for Single-Input Single-Output Linear Systems, IEEE Trans. on AC, **AC-18-5**, 428/435 (1973)
- 6) P. Kudva and K.S. Narendra: Synthesis of an Adaptive Observer Using Lyapunov's Direct Method, Int. J. Control, **18-6**, 1201/1210 (1973)
- 7) A.B. Vasiléva: Asymptotic Behavior of Solutions to Certain Problems Involving Non-Linear Differential Equations Containing a Small Parameter Multiplying the Highest Derivatives, Russian Math. Surveys, **18-3**, 13/81 (1963)
- 8) 小野敏郎, 井上紘一: 制御系における感度解析, 制御工学, **13-3**, 167/178 (1969)
- 9) W.A. Wolovich: On State Estimation of Observable Systems, Preprints 1968 JACC, 210/220 (1968)
- 10) V.M. Popov: Hyperstability of Control Systems, Chapter 4, Springer-Verlag, 118/238 (1973)
- 11) 有本 卓: 線形システム理論, p. 233, 産業図書 (1974)
- 12) 鈴木 隆: Adaptive observer の応答特性の改善, 第13回 SICE 学術講演会予稿集, 47/48 (1974)
- 13) G. Lüders and K.S. Narendra: An Adaptive Observer and Identifier for a Linear System, IEEE Trans. on AC, **AC-18-5**, 496/499 (1973)
- 14) P.V. Kokotović, R.E. Omalley and P. Sannuti: Singular Perturbations and Order Reduction in Control Theory—An Overview, Automatica, **12**, 123/132 (1976)
- 15) P.C. Fife: Transition Layers in singular Perturbation Problems, J. Diff. Equations, 77/105 (1974)
- 16) H. Flashner and J. Dayan: Linearization Approach to Model Reference Adaptive Control Systems, Preprints 1976 JACC, 329/335 (1976)

《付 録》

1. (21)式の左辺に(23)式を代入して変形すれば

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T e_1(t) \left[-\rho \int_0^t e_1(\tau) w(\tau) d\tau - \sigma e_1(t) w(t) \right. \\
 & \quad \left. - \gamma p \{e_1(t) w(t)\} + \beta_0 \right] w(t) dt \\
 &= -\frac{\rho}{2} \left\{ \int_0^T e_1(t) w(t) dt \right\}^2 - \sigma \int_0^T \{e_1(t) w(t)\}^2 dt \\
 & \quad - \frac{\gamma}{2} \{ (e_1(T) w(T))^2 - (e_1(0) w(0))^2 \} \\
 & \quad + \beta_0 \int_0^T e_1(t) w(t) dt \\
 &= -\frac{\rho}{2} \left[\left\{ \int_0^T e_1(t) w(t) dt \right\}^2 - \frac{2\beta_0}{\rho} \int_0^T e_1(t) w(t) dt \right] \\
 & \quad - \sigma \int_0^T \{e_1(t) w(t)\}^2 dt \\
 & \quad - \frac{\gamma}{2} \{ (e_1(T) w(T))^2 - (e_1(0) w(0))^2 \} \\
 &= -\frac{\rho}{2} \left[\left\{ \int_0^T e_1(t) w(t) dt - \frac{\beta_0}{\rho} \right\}^2 - \left(\frac{\beta_0}{\rho} \right)^2 \right] \\
 & \quad - \sigma \int_0^T \{e_1(t) w(t)\}^2 dt - \frac{\gamma}{2} (e_1(T) w(T))^2 \\
 & \quad + \frac{\gamma}{2} (e_1(0) w(0))^2 \\
 &= \frac{\beta_0^2}{2\rho} + \frac{\gamma}{2} (e_1(0) w(0))^2 - \frac{\rho}{2} \left\{ \int_0^T e_1(t) w(t) dt - \frac{\beta_0}{\rho} \right\}^2 \\
 & \quad - \sigma \int_0^T \{e_1(t) w(t)\}^2 dt \leq \rho_0^2, \quad \forall T \geq 0.
 \end{aligned}$$

なる ρ_0 が存在する。ここに, $\rho_0 \triangleq \frac{\beta_0^2}{2\rho} + \frac{\gamma}{2} (e_1(0) w(0))^2$ である。(証明終)

2. (17)式より, $d(p)v_i(t) = p^{n-i}b_i(t)$, $i=1, \dots, n$ を得る。ただし, $d(p) = p^{n-1} + d_n^* p^{n-2} + \dots + d_1^*$ である。したがって

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^n d(p)v_i(t) = d(p)w(t) \\
 &= \sum_{i=1}^n p^{n-i}b_i(t) = D(p)b(t) \quad (A.1)
 \end{aligned}$$

$$D(p) = [p^{n-1}, p^{n-2}, \dots, p, 1]$$

を得る。(20), (23)式より, もし $\varepsilon(t) \equiv 0$, $t \in \Omega$ ならば $\beta(t)$ は定数値 β_0 をとり,

$$\beta_0 w(t) = 0, \quad t \in \Omega \quad (A.2)$$

が成立する。(A.1)式の両辺に β_0 を乗ずれば,

$$d(p)(\beta_0 w(t)) = D(p)b(t)\beta_0$$

となる。このとき, (A.2)式の成立を考慮すれば,

$$D(p)b(t)\beta_0 = 0, \quad t \in \Omega$$

となり, したがって(26)式の仮定のもとで,

$$\beta_0 = 0 \text{ が成立する。} \quad (\text{証明終})$$