非線形計画問題の罰関数法による数値解の誤差範囲

伊 藤 輝 生*

Error Bound of Numerical Solution of Nonlinear Programming Problems by Penalty Function Method

Teruo Itoh*

Numerical solutions of nonlinear programming problems by the penalty function method are, in general, approximate solutions. An error in these solutions consists of two parts: one is the error between the approximate solution and the true extremal solution of the penalty function, and the other is the error between its true extremal solution and the true solution of the nonlinear programming problem. Urabe's theorem can give the error bound for the former error. In this paper, the error bound theorem for the latter error is given and a numerical technique and a numerical example are given.

1. ま え が き

最適制御, 推定, 同定などにおける問題は, 非線形計画問題に帰着される場合がしばしばある。この場合の数値解法として, 罰関数法により制限なしの極値問題に帰着して, 制限なしの極値問題として解を求めるほうが, 手法の単純さと収束の速さの点で有効である場合がしばしば経験された⁵⁾。しかしながら, これまで罰関数法による理論解の真の解への収束性は示されているが, 数値解は極値といっても一般にこの配関数を厳密に零にしないし, もともと有限2進による近似解にすぎない。本論文は, 近似解の真の解からの誤差範囲を与える定理を示し, これによって, 罰関数法による解に定量的な信頼性を与えることができることを示す。このためには, 占部の定理¹⁾が有用で, 近似解と罰関数の真の解との誤差範囲がこの定理により与えられるので, 本論文は, 罰関数の真の極値解と最初の非線形計画問題の真の解との誤差範囲を与え, 具体的な数値計算技術を示し数値例を示す。

なお, 罰関数法は文献²⁾を中心に議論するが, 文献⁴⁾のいわゆる“SUMT”に対しても同様な議論

が成立することをことわっておく。

2. 罰関数法における誤差

つぎのような非線形計画問題を考える。

$$\text{最小化評価} \quad f(x), \quad x \in R^n \quad (1)$$

$$\text{等式制限条件} \quad g_i(x)=0, \quad i=1, \dots, m_1 \quad (2)$$

$$\text{不等式制限条件} \quad g_i(x) \geq 0, \quad i=m_1+1, \dots, m_2 \quad (3)$$

本論文においては, 局所的極値解についてのみ考察し, また, 詳細な仮定は後述することにする。

(1)~(3)式の問題は, 罰関数法²⁾によれば,

$$p(x, \varepsilon) = (f(x) + \frac{1}{2\varepsilon} \left\{ \sum_{i=1}^{m_1} (g_i(x))^2 + \sum_{i=m_1+1}^{m_2} H(-g_i(x))(-g_i(x))^2 \right\}) \quad (4)$$

$H(\cdot)$: ヘビサイドのステップ関数

において, ある仮定のもとに

$$\varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \dots > \varepsilon_k > \dots > 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0 \quad (5)$$

に対して

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \min p(x, \varepsilon_k) = p^* = f^*: \text{最適値} \quad (6)$$

となることが示されている。 $f(\cdot)$, $g_i(\cdot)$, $i=1, \dots, m_2$ がなめらかな関数であれば, $p(x, \varepsilon)$ もなめらかであるから, いま, $x(\varepsilon_k)$ を $p(x, \varepsilon_k)$ の局所的最小解とすれば,

$$\partial p(x, \varepsilon) / \partial x |_{x(\varepsilon_k)} = 0 \quad (7)$$

を満足する。しかし, 数値解 $\bar{x}$ は近似解であり, 一般に $x(\varepsilon_k)$ と厳密に一致しない。さらに, 厳密解 x^* は罰関数法による解であるから, 真の局所的最小解 $\bar{x}$ とは一致しない。このように, $\bar{x}$ の誤差は2種類にわけることができる。一般に

$$\|\bar{x} - x^*\| \leq \|x(\varepsilon_k) - \bar{x}\| + \|\bar{x} - x(\varepsilon_k)\| \quad (8)$$

であるから, (8)式右辺の各項の誤差範囲を別々に計算すれば, 誤差の評価ができる。

3. 仮定および記号の定義

一般に, スカラー関数 $g(x)$ の1次導関数およびへ

* 九州工業大学工学部 北九州市戸畑区仙水町 1-1

* Faculty of Engineering, Kyushu Institute of Technology, Kitakyushu

(Received June 12, 1976)

シアン行列を,

$$g_x(x) \triangleq \partial g(x)/\partial x, \quad G_{xx}(x) \triangleq \partial^2 g(x)/\partial x^2 \quad (9)$$

と書く。対角行列は、対角要素 $a_1, \dots, a_n$ に対して $\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$

と書く。ベクトル x のノルム $\|x\|$ は,

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \quad (10)$$

および、実行列 A のノルム $\|A\|$ は,

$$|\lambda_{\max}| = \max_x \sqrt{\frac{x' A' A x}{x' x}} \quad (11)$$

とする。ここで、 $'$ はベクトルまたは行列の転置を表す。

[A-0] (1)~(3)式の問題の解は存在するものとする。

[A-1] $f(x)$, $g_i(x)$, $i=1, \dots, m_2$ は2階連続微分可能とする。

[A-2] $\hat{x}$ において、束縛に関する不等式条件は等式条件となり、他の不等式条件は考慮する必要はない。ここでは、問題の性質から、もしくは、近似解 $\hat{x}$ から、束縛に関する不等式は既知となる場合について考察することにする（この仮定は、問題が等式条件のみからなる場合は、必要でなくなる）。したがって、既知となる不等式条件を等式条件と考え、他の不等式条件を省略すれば、(4)式は

$$p(x, \varepsilon) = f(x) + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{i=1}^m (g_i(x))^2 \quad (12)$$

と書くことができる。ここで、 $m_1 \leq m \leq m_2$ および $m \leq n$ である。

[A-3] いま、

$$D_\varepsilon = \{x \mid \|x - \hat{x}\| \leq \delta\} \quad (13)$$

とすれば、 $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ に対して、 $P_{xx}(x, \varepsilon)$ は D_ε 上で正定値とする。すなわち、(12)式は D_ε 上で狭義の凸関数とする。

[A-4] $P_{xx}(x, \varepsilon)$ の一部分である

$$F_{xx}(x) + \sum_{i=1}^m (g_i(x)/\varepsilon) G_{ixx}(x) \quad (14)$$

は、 D_ε で正定値であるとする。

[A-5] $g_{ix}(x)$, $i=1, \dots, m$ は、各点 $x \in D_\varepsilon$ に対して、1次独立であるとする。

簡単のため、特にことわらないかぎり、

$$\Sigma \triangleq \sum_{i=1}^m$$

を意味するものとする。

4. 誤差評価

まず、(12)式の罰関数 $p(x, \varepsilon)$ に対して、

$$p_x(x, \varepsilon_0) = 0 \quad (15)$$

の真の解 $x(\varepsilon_0)$ と、近似解 $\hat{x}$ との誤差について述べる。

《定理1 (占部の定理¹⁾) (注1)》与えられた $\hat{x}$ に対して、以下の条件を満足する $n \times n$ 行列 L , δ_1 , $0 \leq \kappa < 1$, が存在するとする。すなわち、

(a) L^{-1} が存在する

$$(b) D_{\delta_1} = \{x \mid \|x - \hat{x}\| \leq \delta_1\} \quad (16)$$

に対して、 D_{δ_1} 上で

$$\|P_{xx}(x, \varepsilon_0) - L\| \leq \kappa/M_1 \quad (17)$$

$$(c) M_1 r_1 / (1 - \kappa) \leq \delta_1 \quad (18)$$

ここで、 M_1 , r_1 は次式を満足する値である。

$$\|p_x(\hat{x}, \varepsilon_0)\| \leq r_1 \quad (19)$$

$$\|L^{-1}\| \leq M_1 \quad (20)$$

このとき、

$$x_{k+1} = x_k - L^{-1} p_x(x_k, \varepsilon_0), \quad x_0 = \hat{x} \quad (21)$$

による系列 $\{x_k\}$ は D_{δ_1} 上で基本列をなし、さらに

$$\|x_k - \hat{x}\| \leq M_1 r_1 / (1 - \kappa) \quad (22)$$

を満足する。したがって、この場合は、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x(\varepsilon_0)\| = 0 \quad (23)$$

および

$$\|x(\varepsilon_0) - \hat{x}\| \leq M_1 r_1 / (1 - \kappa) \leq \delta_1 \quad (24)$$

となる。

この定理は、

$$L = P_{xx}(\hat{x}, \varepsilon_0) \quad (25)$$

とし、 δ_1 を小さく選べば、(17)式は満足されるような κ の選択が可能であろうから、 κ とは計算精度をあげることににより r_1 を小さくすれば、(18)式は満足されるであろう。具体的な L , δ_1 , κ の算出法については、後述する数値例において示す。

つぎに、 $\hat{x}$ と $x(\varepsilon_0)$ に関する誤差定理について述べる。 $x(\varepsilon)$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ は

$$p_x(x, \varepsilon) (\triangleq f_x(x) + \Sigma (g_i(x)/\varepsilon) g_{ix}(x)) = 0 \quad (26)$$

の理論解であり、[A-0]~[A-5]の仮定により、陰関数定理を適用すれば、 $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ に対し、

$$\frac{dx(\varepsilon)}{d\varepsilon} = -P_{xx}(x(\varepsilon), \varepsilon)^{-1} p_{x\varepsilon}(x(\varepsilon), \varepsilon) \quad (27)$$

を満足し、 ε の連続関数である。ここで、

$$p_{x\varepsilon}(x(\varepsilon), \varepsilon) \triangleq \partial p_x(x(\varepsilon), \varepsilon) / \partial \varepsilon \quad (28)$$

である。いま、

$$D_{\delta_2} = \{x \mid \|x - x(\varepsilon_0)\| \leq \delta_2\} \quad (29)$$

および

$$D_\delta \triangleq D_{\delta_1 + \delta_2} = \{x \mid \|x - \hat{x}\| \leq \delta_1 + \delta_2 = \delta\} \quad (30)$$

とする。 $x(\varepsilon_0)$ は D_{δ_2} の中心であるから、ある ε^* が

(注1) この定理の原文は、 x がバナッハ空間の要素である場合に成立する定理であるが、ここでは、有限次元ユークリッド空間に対して書換えたものである。

存在して,

$$0 < \varepsilon^* < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \quad (31)$$

に対して,

$$x(\varepsilon) \in D_{\delta_2} (\subset D_{\delta_1}) \quad (32)$$

とすることができるのはあきらかである.

《定理2》 (31)式の ε および δ_2 に対して, ε とは無関係な数 M_2 が存在し,

$$\|P_{xx}(x(\varepsilon), \varepsilon)^{-1} p_{xx}(x(\varepsilon), \varepsilon)\| \leq M_2 \quad (33)$$

とすることができる. さらに,

$$M_2 \varepsilon_0 \leq \delta_2 \quad (34)$$

を満足するならば, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ に対して,

$$x(\varepsilon) \in D_{\delta_2} \quad (35)$$

であり, (5)式の減少数列に対して,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(\varepsilon_k) = \hat{x} \in D_{\delta_2} \quad (36)$$

である.

定理の証明のまえに, いくつかの補題を証明する.

〔補題1〕 $n \times n$ 正定値対称行列 F および線形独立なベクトル g_i , $i=1, \dots, m$, $m \leq n$ および $\varepsilon > 0$ で

$$[\varepsilon F + \sum g_i g_i']^{-1} \sum c_i g_i, \quad c_i: \text{スカラー} \quad (37)$$

一様有界である.

(証明) 仮定により, 直交変換 R_1 に対して,

$$F = R_1 A_F R_1' = R_1 \sqrt{A_F} \sqrt{A_F} R_1' = R_F A_F R_F' \quad (38)$$

$$A_F = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad (39)$$

$$\sqrt{A_F} = \text{diag}(\sqrt{\alpha_1}, \dots, \sqrt{\alpha_n}) \quad (40)$$

$$R_F = R_1 \sqrt{A_F} \quad (41)$$

となるから, (37)式は

$$(R_F')^{-1} [\varepsilon I + \sum g_i^* g_i'^*]^{-1} \sum c_i g_i^* \quad (42)$$

$$g_i^* = R_F^{-1} g_i \quad (43)$$

となる. いま,

$$G^* = [g_1^* \dots g_m^*] \quad (44)$$

$$c = [c_1 \dots c_m]' \quad (45)$$

とおけば, 直交変換 R_g^* により

$$\sum g_i^* g_i'^* = G^* G'^* = R_g^* \begin{bmatrix} \Lambda_g^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R_g'^* \quad (46)$$

$$\Lambda_g^* = \text{diag}(\beta_1^* \dots \beta_m^*) \quad (47)$$

となるから, (42)式はつぎのように変形される.

$$(R_F')^{-1} R_g^* \left\{ \varepsilon I + \begin{bmatrix} \Lambda_g^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}^{-1} R_g'^* G c$$

$$= (R_F')^{-1} R_g^* \begin{bmatrix} \frac{1}{\varepsilon + \beta_1^*} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon + \beta_m^*} & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{\varepsilon} \end{bmatrix}$$

$$\times R_g'^* G^* c \quad (48)$$

ところが, (47)式より

$$R_g'^* G^* G'^* R_g^* = \begin{bmatrix} \Lambda_g^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (49)$$

であるから, $R_g'^* G^*$ の $m+1 \sim n$ 行の要素は零でなければならない. したがって, (48)式は

$$(R_F')^{-1} R_g^* \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta_1^* + \varepsilon} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \frac{1}{\beta_m^* + \varepsilon} & 0 \\ & 0 & & \ddots & \\ & & 0 & & \ddots & \\ & & & & & \frac{1}{\varepsilon} \end{bmatrix} R_g'^* G^* c \quad (50)$$

と書くことができる. (50)式は(37)式の変形であるから, (43)~(45)式によりもともにもどせば,

$$\|[\varepsilon F + \sum g_i g_i']^{-1} \sum c_i g_i\|$$

$$\leq \|R_F'^{-1} R_g^* \begin{bmatrix} (\beta_1^* + \varepsilon)^{-1} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & (\beta_m^* + \varepsilon)^{-1} & 0 \\ 0 & & & \ddots & \\ & & 0 & & \ddots & \\ & & & & & \frac{1}{\varepsilon} \end{bmatrix} R_g'^* G^* c\|$$

$$\times R_g'^* R_F'^{-1} \cdot \|\sum c_i g_i\| \quad (51)$$

となる. 一般に, 行列 A および準正定値行列 B において

$$\|A'BA\| = \max_x \frac{x' A' B A x}{x' x}$$

$$= \max_x \frac{y' B y}{y' y} \cdot \frac{x' A' A x}{x' x}$$

$$\leq \max_y \frac{y' B y}{y' y} \cdot \max_x \frac{x' A' A x}{x' x}$$

$$= \lambda_{B \max} \cdot \lambda_{A \max} \quad (52)$$

$\lambda_{B \max} = B$ の最大固有値

$\lambda_{A \max} = A' A$ の最大固有値

であることを考慮すれば, (51)式は,

$$\|[\varepsilon F + \sum g_i g_i']^{-1} \sum c_i g_i\|$$

$$\leq (\beta_{\min}^* + \varepsilon)^{-1} \alpha_{\min}^{-1} \|\sum c_i g_i\|$$

$$\leq \beta_{\min}^* \alpha_{\min}^{-1} \|\sum c_i g_i\| \quad (53)$$

$$\beta_{\min}^* = \min \{\beta_1^*, \dots, \beta_m^*\}$$

$$\alpha_{\min} = \min \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \quad (54)$$

となる. さらに, β_i^* , $i=1, \dots, m$ は, $G'^* G^*$ の固有値に一致するから, (38), (43)式および

$$G = [g_1 \dots g_m] \quad (55)$$

によって

$$G'^* G^* = G' F^{-1} G \quad (56)$$

となる. したがって, (52)式と類似の考察により,

$$\beta_{\min}^* \geq \beta_{\min} / \alpha_{\max} \quad (57)$$

を得る。ここで、 $\beta_{\min}$ は $G'G$ の最小固有値である。

(57)式を(53)式に代入すれば、

$$\begin{aligned} & \|[\varepsilon F + \Sigma g_i g_i']^{-1} \Sigma c_i g_i\| \\ & \leq \frac{1}{\beta_{\min}} \cdot \frac{\alpha_{\max}}{\alpha_{\min}} \cdot \|\Sigma c_i g_i\| \triangleq M_2 \end{aligned} \quad (58)$$

となり、補題1が証明された。

[補題2] $x(\varepsilon) \in D_\varepsilon$ ならば、

$$x^\varepsilon \triangleq 2[g_1(x(\varepsilon))/\varepsilon \cdots g_m(x(\varepsilon))/\varepsilon]' \quad (59)$$

は、 $\varepsilon > 0$ で一様有界である。

(証明)

$$G(x(\varepsilon)) \triangleq [g_{1x}(x(\varepsilon)) \cdots g_{mx}(x(\varepsilon))] \quad (60)$$

とおけば、

$$p_x(x(\varepsilon), \varepsilon) \triangleq f_x(x(\varepsilon)) + G(x(\varepsilon))x^\varepsilon = 0 \quad (61)$$

より

$$x^\varepsilon = -[G'(x(\varepsilon))G(x(\varepsilon))]^{-1}G'(x(\varepsilon))f_x(x(\varepsilon)) \quad (62)$$

となり、右辺は、 $x(\varepsilon) \in D_\varepsilon$ に対してあきらかに有界である。

(定理2の証明) いま、

$$G^\varepsilon = [g_{1x}(x(\varepsilon)) \cdots g_{mx}(x(\varepsilon))] \quad (63)$$

$$F^\varepsilon = F_{xx}(x(\varepsilon)) + \Sigma(2g_i(x(\varepsilon))/\varepsilon)G_{ixx}(x(\varepsilon)) \quad (64)$$

とすれば、(59)式も考慮して、

$$P_{xx}^{-1}(x(\varepsilon), \varepsilon) = [F^\varepsilon + (1/\varepsilon)G^\varepsilon G^{\varepsilon'}]^{-1} \quad (65)$$

$$p_{x\varepsilon}(x(\varepsilon), \varepsilon) (\triangleq \partial p_x(x(\varepsilon), \varepsilon)/\partial \varepsilon) = -(1/\varepsilon)G^\varepsilon x^\varepsilon \quad (66)$$

となるから、

$$\begin{aligned} & \|P_{xx}^{-1}(x(\varepsilon), \varepsilon)p_{x\varepsilon}(x(\varepsilon), \varepsilon)\| \\ & = \|-[F^\varepsilon + G^\varepsilon G^{\varepsilon'}]^{-1}G^\varepsilon x^\varepsilon\| \end{aligned} \quad (67)$$

となる。仮定[A-4]および補題2により(64)式は、 $\varepsilon_0 \geq \varepsilon > \varepsilon^* > 0$ に対して有界な正定値行列であるから、補題1により、

$$\begin{aligned} & \|P_{xx}^{-1}(x(\varepsilon), \varepsilon)p_{x\varepsilon}(x(\varepsilon), \varepsilon)\| \\ & \leq \frac{\|G^\varepsilon x^\varepsilon\|}{\beta_{\min}(x(\varepsilon))} \cdot \frac{\alpha_{\max}(x(\varepsilon))}{\alpha_{\min}(x(\varepsilon))} \end{aligned} \quad (68)$$

となる。ここで、 $\beta_{\min}(x(\varepsilon))$ は $G^{\varepsilon'}G^\varepsilon$ の最小固有値、および $\alpha_{\max}(x(\varepsilon))$ 、 $\alpha_{\min}(x(\varepsilon))$ は、それぞれ F^ε の最大および最小固有値である。さらに $x(\varepsilon) \in D_\varepsilon$ であるから、仮定[A-4]により

$$\beta_{\min}(x(\varepsilon)) \geq \min_{x \in D_\varepsilon} \beta_{\min}(x) \triangleq \beta_{\min}^* > 0 \quad (69)$$

$$\alpha_{\max}(x(\varepsilon)) \geq \max_{x \in D_\varepsilon} \alpha_{\max}(x) \triangleq \alpha_{\max}^* > 0 \quad (70)$$

$$\alpha_{\min}(x(\varepsilon)) \geq \min_{x \in D_\varepsilon} \alpha_{\min}(x) \triangleq \alpha_{\min}^* > 0 \quad (71)$$

となる。また、

$$p_x(x(\varepsilon), \varepsilon) = f_x(x(\varepsilon)) + G^\varepsilon x^\varepsilon = 0 \quad (72)$$

より、

$$\|G^\varepsilon x^\varepsilon\| = \|f_x(x(\varepsilon))\| \leq \max_{x \in D_\varepsilon} \|f_x(x)\| = f_x^* \quad (73)$$

であるから、(68)式に(69)~(71)、(73)式を代入して

$$\|P_{xx}^{-1}(x(\varepsilon), \varepsilon)p_{x\varepsilon}(x(\varepsilon), \varepsilon)\| \leq \frac{\|f_x^*\|}{\beta_{\min}^*} \cdot \frac{\alpha_{\max}^*}{\alpha_{\min}^*} \quad (74)$$

となり、

$$M_2 = (\|f_x^*\|/\beta_{\min}^*) \cdot (\alpha_{\max}^*/\alpha_{\min}^*) \quad (75)$$

を得る。

また、(27)式より、

$$x(\varepsilon) - x(\varepsilon_0) = - \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} P_{xx}^{-1}(x(\varepsilon), \varepsilon)p_{x\varepsilon}(x(\varepsilon), \varepsilon)d\varepsilon \quad (76)$$

であるから、 $\varepsilon_0 \geq \varepsilon > \varepsilon^* > 0$ に対して、

$$\|x(\varepsilon) - x(\varepsilon_0)\| \leq M_2(\varepsilon_0 - \varepsilon) < \delta_2 \quad (77)$$

である。いま、 $\varepsilon = \varepsilon^*$ で D_{ε^*} の境界に達したと仮定した場合、すなわち

$$\|x(\varepsilon^*) - x(\varepsilon_0)\| = \delta_2 \quad (78)$$

と仮定した場合、(77)式に矛盾する。したがって、任意の $\varepsilon_0 \geq \varepsilon > 0$ に対して、 $x(\varepsilon) \in D_{\varepsilon^*}$ である。また、 $x(\varepsilon) \in D_{\varepsilon^*} \subset D_\varepsilon$ ならば、(5)式の系列 $\{x_k\}$ に対して、(27)式より

$$\|x(\varepsilon_k) - x(\varepsilon_{k+1})\| \leq M_2(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) \quad (79)$$

であるから、 $\{x(\varepsilon_k)\}$ は、基本列をなす。したがって、

$$x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x(\varepsilon_k) \in D_{\varepsilon^*} \subset D_\varepsilon \quad (80)$$

である。ところが、文献2)の定理は、仮定[A-0]~[A-5]により、 D_ε 上ですべて成立するから、

$$\hat{x} = x^* \text{ (局所最小解)} \quad (81)$$

である。定理2の証明終り。

5. 具体的な誤差計算における検討

具体的計算において問題となるのは、固有値の計算および固有値の D_ε 上における最大化、最小化であるが、これには、つぎの定理が便利である。

《定理3》[Lévy-Hadamard] A の固有値 λ は、

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, \quad i=1, \dots, n \quad (82)$$

のいずれかを満足する。

いま、 $A(x)$ を対称行列とし、 $x \in D_\varepsilon$ における固有値の範囲を求めるとしよう。 $x = \bar{x}$ に対して、 A の近似直交変換(数値解)を $\bar{R}$ とすれば

$$\bar{R}'A(\bar{x})\bar{R} = \bar{\Lambda} + \Delta\bar{B} \quad (83)$$

となる。ここで、

$\bar{\Lambda}$: $\bar{R}'A(x)\bar{R}$ の対角要素のみからなる行列

$\Delta\bar{B}$: $\bar{R}'A(x)\bar{R}$ の対角以外の要素からなる行列で、各要素は小さい。

したがって、

$$A(\bar{x}) = \bar{R}\bar{A}\bar{R}' + \bar{R}\bar{A}\bar{B}\bar{R}' + (A(\bar{x}) - \bar{R}\bar{R}'A(\bar{x})\bar{R}\bar{R}') \quad (84)$$

となるが、最後の項も各要素の値は小さいと考えられるから、

$$\Delta A(\bar{x}) = \bar{R}\bar{A}\bar{B}\bar{R}' + (A(\bar{x}) - \bar{R}\bar{R}'A(\bar{x})\bar{R}\bar{R}') \quad (85)$$

とおけば、(84)式より、(52)式の公式を用いて、

$$\max_y \frac{y'A(\bar{x})y}{y'y} \leq \bar{\lambda}_{\max} \cdot \max_y \frac{y'\bar{R}\bar{R}'y}{y'y} + \max_y \frac{y'\Delta A(\bar{x})y}{y'y} \quad (86)$$

となる。ここで、

$$\bar{A} = \text{diag}(\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n) \quad (87)$$

$$\bar{\lambda}_{\max} = \max(\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n) \quad (88)$$

ここで、 $\bar{R}\bar{R}'$ は単位行列に近い行列、 $\Delta A(\bar{x})$ は、全要素が微小と考えられるから、定理3により、

$$\max_y \frac{y'\bar{R}\bar{R}'y}{y'y} = \max_i \left\{ r_{ii} + \sum_{j=1, j \neq i}^n |r_{ij}| \right\} r^* \approx 1 \quad (89)$$

$$\max_y \frac{y'\Delta A y}{y'y} = \max_i \left\{ \Delta \bar{\lambda}_{ii} + \sum_{j=1, j \neq i}^n |\Delta \bar{\lambda}_{ij}| \right\} \triangleq \Delta a^* \quad (90)$$

となり、

$$\max_y \frac{y'A(\bar{x})y}{y'y} \leq \bar{\lambda}_{\max} \cdot r^* + \Delta a^* \quad (91)$$

を得る。また、 $x \in D_\delta$ に対しては

$$\max_{x \in D_\delta} \max_y \frac{y'A(x)y}{y'y} \quad (92)$$

を求めるときには、一般に δ が小さいとして、前述の $\bar{R}$ と $\bar{A}$ を用いて、 $\Delta A(x) \triangleq A(x) - \bar{R}\bar{A}\bar{R}'$ とすれば、(90)式のみを

$$\max_i \left\{ \max_{x \in D_\delta} \{ \Delta a_{ii}(x) \} + \sum_{j=1, j \neq i}^n \max_{x \in D_\delta} \{ |\Delta a_{ij}(x)| \} \right\} \triangleq \Delta a^* \quad (93)$$

とすればよい。また、最小固有値も類似の手法でできることはあきらかであるから省略する。

また、定理1において、

$$L = P_{xx}(\bar{x}, \varepsilon_0) = [F^*(\bar{x}) + (1/\varepsilon_0) \sum g_{ix}(\bar{x}) g_{ix}'(\bar{x})] \quad (94)$$

とすれば、補題1の変形と同様にして、

$$\|L^{-1}\| = \left\| (R_F')^{-1} R_F \left[I + (1/\varepsilon_0) \begin{bmatrix} A_\theta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right]^{-1} R_F' R_F^{-1} \right\| \leq 1/\alpha_{\min}(\bar{x}) \quad (95)$$

となる。ここで $\varepsilon_0 \ll 1$ を考慮してある。また、定理1における κ の算定に対しては、

$$\|P_{xx}(x, \varepsilon_0) - P_{xx}(\bar{x}, \varepsilon_0)\| = \|\Delta A(x)\| \quad (96)$$

とすれば、定理3により

$$\|\Delta A(x)\| \leq \max_i \left\{ \sum_{j=1}^n \max_{x \in D_{\delta_1}} |\Delta a_{ij}(x)| \right\} \quad (97)$$

となる。特に、問題が、2次評価、線形制限のときは、 $G_{ixx}=0$ 、 $\sum g_{ix} g_{ix}' = \text{一定}$ となり、 $P_{xx}(x, \varepsilon_0)$ は x に無関係となり、 $\Delta A(x)=0$ である。

定理2においては、 F^* の固有値の計算において、 z^* の変化範囲が必要となる。そこで、いま、

$$\bar{p}_z \triangleq p_z(\bar{x}, \varepsilon_0) = \bar{f}_z + \bar{G}\bar{z} \quad (98)$$

$$\bar{G} \triangleq [g_{1z}(\bar{x}) \cdots g_{mz}(\bar{x})] \quad (99)$$

$$\bar{z} \triangleq 2[g_{1z}(\bar{x})/\varepsilon_0 \cdots g_{mz}(\bar{x})/\varepsilon_0] \quad (100)$$

$$\bar{f}_z \triangleq f_z(\bar{x}) \quad (101)$$

とおき、 δ^2 以上の項を無視し、 δ の1次の項のみからなる項を ΔG 、 Δf_z と書くことにすれば、

$$z^* - \bar{z} \approx -[\bar{G}'\bar{G}]^{-1}\bar{G}'\{\bar{p}_z + \Delta f_z + \Delta G\bar{z}\} \quad (102)$$

と計算される。ここで $\|\bar{p}_z\| \ll 1$ を考慮してある。

後述する例題からもあきらかなように、 $\alpha_{\max}^*$ 、 $\alpha_{\min}^*$ の計算に必要なのは、 $|z_i^* - \bar{z}_i|$ の存在範囲であり、これは、(102)式より

$$|z_i^* - \bar{z}_i| \leq \{ |[\bar{G}'\bar{G}]^{-1}\bar{G}'p_z| \}_i + \{ |[\bar{G}'\bar{G}]^{-1}\bar{G}'(\Delta f_z + \Delta G\bar{z})| \}_i \quad (103)$$

となる。ここで、 $\{ \}_i$ はベクトルの第 i 要素の意である。

6. 数値例 (Rosen-Suzuki Problem)

$$f(x) = x'Qx + b'x \quad (104)$$

$$g_1(x) = x'G_1x + c_1'x - 8 \leq 0 \quad (105)$$

$$g_2(x) = x'G_2x + c_2'x - 5 \leq 0 \quad (106)$$

$$g_3(x) = x'G_3x + c_3'x - 10 \leq 0 \quad (107)$$

とする。ここで、

$$x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]'$$

$$Q = \text{diag} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b' = [-5 \ -5 \ -21 \ 7]$$

$$G_1 = \text{diag} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c_1' = [1 \ -1 \ 1 \ -1]$$

$$G_2 = \text{diag} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c_2' = [2 \ -1 \ 0 \ -1]$$

$$G_3 = \text{diag} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$c_3' = [-1 \ 0 \ 0 \ -1]$$

である。計算の結果、 $g_3(x)$ は制限に関与せず、また

$$\varepsilon_0 = 0.8 \times 10^{-5}$$

$$\bar{x} = [0.15156551756602269 \times 10^{-5}$$

$$1.000000706545472812$$

$$2.000001572634557437$$

$$-0.9999979715482375020]'$$

を得たとする。定理1における δ_1 、 κ 、 M_1 を決めるた

めに, $L=P_{xx}(\bar{x}, \varepsilon_0)$ とおけば, (95)式より

$$\|L^{-1}\| \approx 0.5 \leq M_1 \quad (108)$$

$$\begin{aligned} \|P_{xx}(x, \varepsilon_0) - L\| = (2/\varepsilon_0) & \left\| \sum_{i=1}^2 (g_i(x) - g_i(\bar{x})) G_i \right. \\ & + \sum_{i=1}^2 \{G_i(x x' - \bar{x} \bar{x}') G_i' - c_i(x - \bar{x})' G_i' \\ & \left. - G_i(x - \bar{x}) c_i'\} \right\| \quad (109) \end{aligned}$$

となるが, (99)式を利用すれば, $\|x - \bar{x}\| \leq \delta_1$ を考慮し, δ_1^2/ε_0 以上の項を無視すれば,

$$\begin{aligned} \|P_{xx}(x, \varepsilon_0) - L\| & \leq 128\delta_1/\varepsilon_0 + M_3 \cdot \delta_1^2/\varepsilon_0 \\ & \leq 130\delta_1/\varepsilon_0 + M_3 \cdot \delta_1^2/\varepsilon_0 \quad (110) \end{aligned}$$

を得る。ここで, 128 を 130 にしたのは, 高次項の無視に対する配慮である。また, M_3 は δ_1^2/ε_0 の係数である。また,

$$r_1 \geq 0.1672 \times 10^{-11} \quad (111)$$

で, これは,

$$M_1 r_1 / (1 - \kappa) \leq \delta_1 \quad (112)$$

を満足しなければならない。すなわち, (108), (110), (112)式を満足し, かつ, δ_1 を小さくする値がよりよい誤差の推定となる。このためには, M_1 が小なるほどよいが, 計算誤差を考慮して, 十分余裕をみて

$$M_1 = 0.51 \quad (113)$$

とする。また, (110), (112)より,

$$M_1(130/\varepsilon_0)\delta_1^2 - \delta_1 + M_1 r_1 \leq 0 \quad (114)$$

を得るから, 計算誤差を考慮して

$$\delta_1 = 8.525 \times 10^{-13}$$

とすればよい。つぎに, $\delta = \delta_1 + \delta_2$ を求める。(103)式において,

$$\left. \begin{aligned} \bar{g}_1 & \approx [1 \quad 1 \quad 5 \quad -3]' \\ \bar{g}_2 & \approx [2 \quad 1 \quad 4 \quad -1]' \\ p_x & \approx [0.41874 \times 10^{-13} \quad 0.22296 \times 10^{-12} \\ & \quad 0.12959 \times 10^{-11} \quad 0.10310 \times 10^{-11}]' \\ \Delta f_x & = [\pm 2\delta \quad \pm 2\delta \quad \pm 4\delta \quad \pm 2\delta]' \\ \Delta G & = \begin{bmatrix} \pm \delta & \pm \delta & \pm \delta & \pm \delta \\ \pm 2\delta & \pm \delta & \pm \delta & 0 \end{bmatrix} \\ \bar{z} & \approx [1 \quad 2] \end{aligned} \right\} \quad (115)$$

であるから,

$$\begin{aligned} |z_1^e - \bar{z}_1| & \leq 3.0701 \times 10^{-13} + 1.4828\delta + 1.8966\delta \\ |z_2^e - \bar{z}_2| & \leq 1.9731 \times 10^{-12} + 2.1724\delta + 2.9655\delta \end{aligned} \quad (116)$$

となる。また, (64)式より,

$$\begin{aligned} F^e & = \text{diag} (1 \ 1 \ 2 \ 1) + z_1^e \text{diag} (1 \ 1 \ 1 \ 1) \\ & \quad + z_2^e \text{diag} (2 \ 1 \ 1 \ 0) \end{aligned} \quad (117)$$

であるから

$$\begin{aligned} \alpha_{\max}^* & \leq 6 + 4.2532 \times 10^{-12} + 8.5191\delta \\ \alpha_{\min}^* & \geq 2 - 3.0701 \times 10^{-13} - 3.3794\delta \end{aligned} \quad (118)$$

となる。また

$$\begin{aligned} G'G & \approx \bar{G}'\bar{G} + \Delta G'G + G'\Delta G \\ & = \begin{bmatrix} 36 \pm 20\delta & 26 \pm 18\delta \\ 26 \pm 18\delta & 22 \pm 18\delta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (119)$$

であるから, $G'G$ の最小固有値 $\beta_{\min}^*$ は,

$$\beta_{\min}^* \approx 2.074 - 41.33\delta \quad (120)$$

となる。したがって, $\|f_x\| \leq 15.10 + 5.292\delta$ を考慮して,

$$\begin{aligned} M_2 & = (15.10 + 5.292\delta)(6 + 4.2532 \times 10^{-12} \\ & \quad + 8.5191\delta) / \{(2 - 3.0701 \times 10^{-13} \\ & \quad - 3.3794\delta)(2.074 - 41.33\delta)\} \end{aligned} \quad (121)$$

となり, これを,

$$M_2 \varepsilon_0 \leq \delta_2 = \delta - \delta_1 \quad (122)$$

に代入して, δ を求めればよい。計算誤差を考慮して, 十分と思われる余裕をみて, 次式を得る。

$$\delta = 2 \times 10^{-4}$$

7. あとがき

数値例からあきらかなように, 計算精度をあげて, ε_0 および r_1 を小さくできるようにすれば, $\alpha_{\max}^*$, $\alpha_{\min}^*$, $\beta_{\min}^*$ などは, $\alpha_{\max}(\bar{x})$, $\alpha_{\min}(\bar{x})$, $\beta_{\min}(\bar{x})$ などでおきかえ, $x \in D_s$ 上のこれらの値の変動は, 適当な誤差考慮により, 保証できるので, その場合には, 誤差の推定がより簡単化される。特に, 2次形式の評価関数で, 線形制限ならば, F^e , G^e は一定となり, 誤差評価は非常に容易となる。

以上のように, 有限次元ユークリッド空間ならば具体的に誤差計算が可能ながわかる。一方, 定理1および定理2は l_2 空間においても成立するが, l_2 空間において定理の条件を数値的に照合する手法を確立するにいたっておらず, 今後の問題点の一つである。

また, F^e がある条件を満足する準正定値行列である場合への拡張も可能であるが, 別の機会にゆずりたい。

参考文献

- 1) M. Urabe: The Newton Method and Its Application to Boundary Value Problems with Nonlinear Boundary Condition, Proc. U.S. Japan Seminar on Differential and Functional Equations, Benjamin, New York 383/414 (1967)
- 2) W.I. Zangwill: Non-linear Programming via Penalty Functions, Management Science, 13-5, 344/358 (1967)
- 3) A.S. Householder: The Theory of Matrices in Numerical Analysis, New York, Blaisdell Publishing Co. (1964)
- 4) A.V. Fiocco and P. McCormic: The Sequential Unconstrained Minimization Technique for Nonlinear Programming, A Primal-Dual Method, Management Science 10-2, 360/366 (1964)
- 5) 伊藤：制限付非線形系の最短時間問題を含む最適制御問題の数値解法, 第18回自動制御連合講演会前刷, 1016 (1975)