むだ時間のある線形システムの安定化[†]

—安定化可能条件の拡張—

廖 貴 勇*・池 田 雅 夫**・北 村 新 三**

Stabilization of Linear Systems with Delay

—Extended Stabilizability Condition—

Kiyu Ryo*, Masao IKEDA** and Shinzo KITAMURA**

This paper considers the problem of stabilizing a linear time-invariant system with delay

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Dx(t-h) + Bu(t), \quad h > 0$$

by means of a linear feedback without delay

$$u(t) = Kx(t)$$

to obtain a sufficient condition less restrictive than those obtained so far for such stabilization.

The result is as follows. The system is stabilizable, if (i) (A, B) is a completely controllable pair, and (ii) when (A, B) is written in a Luenberger's canonical form, $D = D_1 + D_2$ where the columns of D_1 are linear combinations of those of B and D_2 is a lower triangular matrix.

The stabilization law stated in this paper is applicable even if the delay time h is not known precisely.

1. はじめに

むだ時間のあるシステムはプロセス制御システムなどに多く見られるもので、数学的には差分微分方程式で記述され、ある時刻での運動は、その時刻のみでなく過去の内部変数にも依存する特性をもつ。また、通常の常微分方程式で記述されるシステムの状態空間が有限次元空間であるのに対して、むだ時間のあるシステムの状態空間は無次元関数空間である。

このようなむだ時間のあるシステムに状態フィードバックを施して安定なシステムを実現する問題に関しては、すでにいくつかの研究^{1)~5)}がなされており、安定化可能条件や安定化法が得られている。このうち、Osipov¹⁾, Ross²⁾, Nazarov³⁾らによって得られている

条件や安定化法は、その適用のために超越方程式を解く必要があったり、フィードバックにむだ時間分だけ過去の値がいるものである。前田らの安定化法⁴⁾は、むだ時間要素からなるフィードバック補償器を用いるものである。そして、以上の安定化法はいずれもむだ時間が正確にわかっている場合に限って適用できない。

一方、池田ら⁵⁾は、むだ時間が正確にわかっている場合でも適用できる、内部変数のその時刻の値のみのフィードバックによる簡単な安定化法を得ているが、その安定化可能条件はやや厳しいものと思われる。本稿では、この点に注目して、このようなフィードバックによって安定化できるための条件をゆるめることを目的とする。得られた条件は、むだ時間の項以外をLuenbergerの可制御標準形に表わしたとき、むだ時間の項の係数行列がある形をしていなければならないというもので、5)の条件に比べてかなりゆるくなっている。

なお、本稿ではベクトルのノルムは任意の l_p ($p = 1, 2, \dots, \infty$) ノルムとし、マトリクスのノルムはベクトルのノルムから誘導されたものとする。

2. システムの記述

本稿では、差分微分方程式

$$S_0: \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Dx(t-h) + Bu(t), & t \geq 0 \\ x(t) = \phi(t), & t \in [-h, 0] \end{cases} \quad (1)$$

によって記述される、むだ時間のある線形時間不変システムを対象とする。ここに、 $x(t)$ は n 次元内部変数、 $u(t)$ は r 次元入力、 $\phi(\cdot)$ は内部変数の初期関数で、 t に関して連続である。 A, D および B はそれぞれ $n \times n$, $n \times n$ および $n \times r$ 実行列、 h はむだ時間を表す正の実数である。任意の時刻 t において、内部変数 $x(t)$ は直接測定できるものとする。

このシステム S_0 を安定化するために、フィードバックとしては、内部変数のその時刻の値のみの線形フ

† 第 18 回自動制御連合講演会で発表 (昭 50・11)

* シャープ(株) 大和郡山市美濃庄町 492

** 神戸大学工学部 神戸市灘区六甲台町 1

* Sharp Co., Yamatokoriyama

** Faculty of Engineering, Kobe University, Kobe

(Received April 7, 1976)

フィードバック

$$u(t) = Kx(t)$$

を考える。ここに、フィードバックゲイン K は $r \times n$ 実行列である。この結果、つぎの差分微分方程式で表わされるシステムが閉ループになる。

$$S_c: \begin{cases} \dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + Dx(t-h), & t \geq 0 \\ x(t) = \phi(t), & t \in [-h, 0] \end{cases} \quad (2)$$

3. 安定度と安定条件

本稿でいう安定化とは、 S_c の解が指定された安定度をもつようにフィードバックゲイン K を構成することである。ここでは、安定度をつぎのように定義する。

【定義】 正数 α に対して、 S_c の任意の初期関数 $\phi(\cdot)$ に対する解 $x(\cdot)$ がすべての $t(\geq 0)$ について

$$\|x(t)\| \leq \alpha(\alpha) \sup_{-h \leq \tau \leq 0} \|\phi(\tau)\| e^{-\alpha t} \quad (3)$$

を満足するような正数 $\alpha(\alpha)$ が存在するとき、 S_c は安定度 α で漸近安定であると呼ぶ。

また、 S_c についてはつぎの安定条件が知られている。

【補題 1】⁶⁾ S_c が安定度 α で漸近安定であるための十分条件は、特性方程式

$$\det[sI - (A + BK) - De^{-sh}] = 0 \quad (4)$$

の根の実部がすべて $-\alpha$ よりも小さいことである。

4. 安定化可能条件と安定化法

以下では、対象とするシステム S_0 がいかなる条件のもとで、内部変数のその時刻の値のみの線形フィードバックによって、任意に安定度を指定して安定化が可能かを考え、そのような安定化法を求める。

いま、システム S_0 において、 (A, B) は完全可制御対であるとし、ここでは簡単のために、 $\text{rank } B = r$ とする。このとき、 A と B はつぎの Luenberger の可制御正準形⁷⁾ に表わすことができる。

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & \cdots & A_{rr} \end{bmatrix} \quad (5. a)$$

$$A_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * \end{bmatrix}_{\sigma_i-1} \quad A_{ij} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ * \end{bmatrix}_{\sigma_i-1} \quad (i, j=1, 2, \dots, r; i \neq j)$$

$$B = \hat{B}Q \quad (5. b)$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} e_1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & e_r \end{bmatrix} \quad e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{\sigma_i-1} \quad (i=1, 2, \dots, r)$$

ここに、 σ_i ($i=1, 2, \dots, r$) は正整数で、 $\sum_{i=1}^r \sigma_i = n$ を満たし、 $*$ は 0 や 1 とは限らない実数を表わす。また、 Q は $r \times r$ の正則実行列である。

《定理》 システム S_0 において、 (A, B) が完全可制御対で、 (A, B) が (5) 式の形に表わされているときに、 D が、 B の各列の結合で表わされる行列と下三角行列とからなる行列、すなわち

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & \cdots & D_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{r1} & \cdots & D_{rr} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$D_{ii} = \begin{bmatrix} * & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * \end{bmatrix}_{\sigma_i} \quad (i=1, 2, \dots, r)$$

$$D_{ij} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ * \end{bmatrix}_{\sigma_j-1} & (i, j=1, 2, \dots, r; i < j) \\ \text{任意} & (i, j=1, 2, \dots, r; i > j) \end{cases}$$

の形をしているならば、 S_0 は内部変数のその時刻の値のみの線形フィードバックによって、任意に安定度を指定して安定化可能である。また、この安定化法は、むだ時間が正確にわかっていなくても、その上界さえわかっていたら適用できる。

この定理の証明のためには、つぎの補題が必要である。なお、この補題の条件が成立すれば、補題 1 より、 S_0 が内部変数のその時刻の値のみの線形フィードバックによって、任意に安定度を指定して安定化できることがわかる。

【補題 2】 1 入力システム S_0 において、 (A, B) が完全可制御対で、 A と B が (5) 式で表わされているとき (可制御正準形で表わされているとき) に、 D が下三角行列、すなわち

$$D = \begin{bmatrix} * & 0 \\ \vdots & \vdots \\ * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

の形をしているならば、任意の $\alpha (\geq 0)$ に対して、 K を適当に選ぶことによって、 $\text{Re}(s) \geq -\alpha$ なるすべての s について

$$\det[sI - (A + BK) - De^{-sh}] \neq 0 \quad (7)$$

が成立するようにすることができる (注)。

(証明) この場合、 A と B は (5) 式より

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(注) $\text{Re}(s)$ は s の実部を表わす。

の形をしている。

$K=[k_n \ k_{n-1} \cdots k_1]$ とすれば

$$\hat{A} = A + BK = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\hat{a}_n & -\hat{a}_{n-1} & -\hat{a}_{n-2} & \cdots & -\hat{a}_1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}_i = a_i - k_i, \quad i=1, 2, \dots, n$$

であるから、この A と D の形に注目して、 $\det[sI - \hat{A} - De^{-sh}]$ を展開すれば

$$\begin{aligned} \det[sI - \hat{A} - De^{-sh}] \\ = \det[sI - \hat{A}] \\ + \sum_{i=1}^n q_i(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{i-1}, e^{-sh}) s^{n-i} \end{aligned} \quad (8)$$

と表わせる。ここに、 $q_i(\cdot)$ ($i=1, 2, \dots, n$) は、 e^{-sh} の関数である $g_{ij}(e^{-sh})$ ($i=1, 2, \dots, n$; $j=0, 1, \dots, n-1$; $i > j$) を使って、つぎの形に表わされる。

$$\begin{aligned} q_i(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{i-1}, e^{-sh}) \\ = \sum_{j=1}^{i-1} \hat{a}_j g_{ij}(e^{-sh}) + g_{i0}(e^{-sh}) \quad i=2, 3, \dots, n \\ q_1(e^{-sh}) = g_{10}(e^{-sh}) \end{aligned}$$

したがって、補題 1 の条件は、 $\operatorname{Re}(s) \geq -\alpha$ なる s に対して

$$\begin{aligned} \det[sI - \hat{A}] \\ + \sum_{i=1}^n q_i(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{i-1}, e^{-sh}) s^{n-i} \neq 0 \end{aligned} \quad (9)$$

が成立することと同値である。

いま、 $\hat{A}$ の固有値の実部がすべて $-\alpha$ よりも小さいとすれば、 $\operatorname{Re}(s) \geq -\alpha$ のとき、 $\det[sI - \hat{A}] \neq 0$ が成り立つので、このとき、(9)式は

$$\frac{\sum_{i=1}^n q_i(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{i-1}, e^{-sh}) s^{n-i}}{\det[sI - \hat{A}]} \neq -1 \quad (10)$$

と等価である。そして、 $\hat{a}_i > 0$ ($i=1, 2, \dots, n$) である。また、(10)式は

$$\frac{\left| \sum_{i=1}^n q_i(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{i-1}, e^{-sh}) s^{n-i} \right|}{|\det[sI - \hat{A}]|} < 1 \quad (11)$$

が成立すれば、成り立つ。

ここで、 f_{ij} を、 $\operatorname{Re}(s) \geq -\alpha$ のとき、 $|e^{-sh}| \leq e^{\alpha h} \leq e^{\alpha \hat{h}}$ ($\hat{h}$ は h の上界) であることを使って $|g_{ij}(e^{-sh})|$ を評価して得られる正数、すなわち、 $|g_{ij}(e^{-sh})| \leq f_{ij}$ 、 $\operatorname{Re}(s) \geq -\alpha$ を満たす正数とし、

$$d_i \triangleq \sum_{j=1}^{i-1} \hat{a}_j f_{ij} + f_{i0}, \quad i=2, 3, \dots, n$$

$$d_1 \triangleq f_{10}$$

とおくと、 $\operatorname{Re}(s) \geq -\alpha$ のとき、任意の正数 β に対して

$$\begin{aligned} \frac{\left| \sum_{i=1}^n q_i(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{i-1}, e^{-sh}) s^{n-i} \right|}{|\det[sI - \hat{A}]|} \\ \leq \frac{d_1 |s|^{n-1} + d_2 |s|^{n-2} + \cdots + d_{n-1} |s| + d_n}{|\det[sI - \hat{A}]|} \\ \leq \frac{\beta |s|^n + d_1 |s|^{n-1} + \cdots + d_{n-1} |s| + d_n}{|\det[sI - \hat{A}]|} \end{aligned} \quad (12)$$

である。

さて、つぎの不等式を満足するように正の定数 c を求めよう。

$$\frac{1}{2^n + 1} {}_n C_i (c + \alpha)^i \geq \sum_{j=0}^{i-1} f_{ij} {}_n C_j (c + 2\alpha)^j \quad (13)$$

$$i=1, 2, \dots, n$$

この c は必ず存在する。そして、この c に対して

$$\hat{a}_i = {}_n C_i (c + 2\alpha)^i, \quad i=1, 2, \dots, n$$

すなわち

$$k_i = a_i - {}_n C_i (c + 2\alpha)^i, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (14)$$

となるように k_i ($i=1, 2, \dots, n$) を定める。すると

$$\beta = \frac{1}{2^n + 1}$$

とおいて、(12) 式の右辺を評価すると、 $\operatorname{Re}(s) \geq -\alpha$ なる s に対して

$$\begin{aligned} \frac{\beta |s|^n + d_1 |s|^{n-1} + \cdots + d_{n-1} |s| + d_n}{|\det[sI - \hat{A}]|} \\ \leq \frac{1}{2^n + 1} \left\{ \frac{|s| + (c + \alpha)}{|s + c + 2\alpha|} \right\}^n \\ = \frac{1}{2^n + 1} \left\{ \frac{|s|}{|s + c + 2\alpha|} + \frac{c + \alpha}{|s + c + 2\alpha|} \right\}^n \\ \leq \frac{1}{2^n + 1} \left\{ 1 + \frac{c + \alpha}{c + \alpha} \right\}^n \\ = \frac{2^n}{2^n + 1} < 1 \end{aligned} \quad (15)$$

が成り立つので、(11) 式が成立する。以上より、 $\operatorname{Re}(s) \geq -\alpha$ なる s に対して (7) 式を満たす K が存在することが証明された。(証明終)

(定理の証明) 1 入力の場合は補題 1 と補題 2 より明らかであるので、多入力の場合を証明する。

内部変数

$$x(t) = [x_1(t) \cdots x_n(t)]^T$$

の成分を並べ変えて

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= [\tilde{x}_1^T(t) : \tilde{x}_2^T(t)]^T \\ &\quad \begin{matrix} n-r & r \end{matrix} \\ &\triangleq \underbrace{[x_1(t) \cdots x_{\sigma_1-1}(t) x_{\sigma_1+1}(t) \cdots x_{n-1}(t)]}_{n-r} : \\ &\quad \underbrace{x_{\sigma_1}(t) x_{\sigma_1+\sigma_2}(t) \cdots x_n(t)}_r \end{aligned}$$

としよう。この $\tilde{x}(t)$ について S_0 を書き直せば

$$S_0: \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1(t) \\ \dot{\tilde{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{bmatrix} \\ \quad + \begin{bmatrix} \tilde{D}_{11} & \tilde{D}_{12} \\ \tilde{D}_{21} & \tilde{D}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t-h) \\ \tilde{x}_2(t-h) \end{bmatrix} \\ \quad + \begin{bmatrix} 0 \\ Q \end{bmatrix} u(t), \quad t \geq 0 \\ \\ \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_1(t) \\ \tilde{\phi}_2(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [-h, 0] \end{cases} \quad (16)$$

となる。ここに $\tilde{A}_{ij}, \tilde{D}_{ij}$ ($i, j=1, 2$) はつぎの形をしている。

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{11} &= \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11}^1 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{11}^r \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_{11}^i = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{\sigma_i-2}^{1 \quad \sigma_i-2} \\ &\quad (i=1, 2, \dots, r) \\ \tilde{A}_{12} &= \begin{bmatrix} \tilde{e}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{e}_r \end{bmatrix}, \quad \tilde{e}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\sigma_i-2}^{1 \quad \sigma_i-2} \\ &\quad (i=1, 2, \dots, r) \end{aligned}$$

$\tilde{A}_{21}$: 任意

$\tilde{A}_{22}$: 任意

$$\tilde{D}_{11} = \begin{bmatrix} \tilde{D}_{11}^{11} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \tilde{D}_{11}^{r1} & \tilde{D}_{11}^{rr} \end{bmatrix}, \quad \tilde{D}_{11}^{ii} = \begin{bmatrix} * & 0 \\ \vdots & \vdots \\ * & * \end{bmatrix}_{\sigma_i-1}^{\sigma_i-1} \quad (i=1, 2, \dots, r)$$

$\tilde{D}_{11}^{ij}$: 任意, ($i, j=1, 2, \dots, r; i > j$)

$$\tilde{D}_{12} = \begin{bmatrix} \tilde{D}_{12}^{11} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \tilde{D}_{12}^{r1} & \tilde{D}_{12}^{rr} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{D}_{12}^{ii} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{\sigma_i-1} \quad (i=1, 2, \dots, r)$$

$\tilde{D}_{12}^{ij}$: 任意 ($i, j=1, 2, \dots, r; i > j$)

$\tilde{D}_{21}$: 任意

$\tilde{D}_{22}$: 任意

さらに, 新しい変数

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix} &\triangleq \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\tilde{K} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{bmatrix} \\ \tilde{K} &= \begin{bmatrix} \hat{k}_1 & 0 \\ 0 & \hat{k}_r \end{bmatrix}, \quad \hat{k}_i \in \mathbb{R}^{1 \times (\sigma_i-1)} \\ &\quad i=1, 2, \dots, r \end{aligned} \quad (17)$$

を定めて, この変数について $\tilde{S}_0$ を書き換える。

$$\tilde{S}_0: \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1(t) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} + \tilde{A}_{12}\tilde{K} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} - \tilde{K}\tilde{A}_{11} + (\tilde{A}_{22} - \tilde{K}\tilde{A}_{12})\tilde{K} & \tilde{A}_{22} - \tilde{K}\tilde{A}_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix} \\ \quad + \begin{bmatrix} \tilde{D}_{11} + \tilde{D}_{12}\tilde{K} & \tilde{D}_{12} \\ \tilde{D}_{21} - \tilde{K}\tilde{D}_{11} + (\tilde{D}_{22} - \tilde{K}\tilde{D}_{12})\tilde{K} & \tilde{D}_{22} - \tilde{K}\tilde{D}_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t-h) \\ \hat{x}_2(t-h) \end{bmatrix} \\ \quad + \begin{bmatrix} 0 \\ Q \end{bmatrix} u(t), \quad t \geq 0 \\ \\ \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\phi}_1(t) \\ \hat{\phi}_2(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [-h, 0] \end{cases} \quad (18)$$

このシステム $\tilde{S}_0$ に状態フィードバック

$$u(t) = Q^{-1}[-\tilde{A}_{21} + \tilde{K}\tilde{A}_{11} - (\tilde{A}_{22} - \tilde{K}\tilde{A}_{12})\tilde{K} : K_3 - \tilde{A}_{22} + \tilde{K}\tilde{A}_{12}] \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} -(\alpha + \lambda) & 0 \\ 0 & -(\alpha + \lambda) \end{bmatrix}_r, \quad \lambda > 0$$

を施そう。ここに, λ は後に定める正の定数である。その結果, 閉ループシステムはつぎようになる。

$$\hat{S}_c: \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1(t) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} + \tilde{A}_{12}\tilde{K} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & K_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix} \\ \quad + \begin{bmatrix} \tilde{D}_{11} + \tilde{D}_{12}\tilde{K} & \tilde{D}_{12} \\ \tilde{D}_{21} - \tilde{K}\tilde{D}_{11} + (\tilde{D}_{22} - \tilde{K}\tilde{D}_{12})\tilde{K} & \tilde{D}_{22} - \tilde{K}\tilde{D}_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t-h) \\ \hat{x}_2(t-h) \end{bmatrix}, \quad t \geq 0 \\ \\ \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\phi}_1(t) \\ \hat{\phi}_2(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [-h, 0] \end{cases} \quad (20)$$

ここで $\tilde{D}_{12}$ の形に注目しよう。そうすれば, $\hat{k}_i$ ($i=1, 2, \dots, r$) をどのように与えても $\tilde{D}_{12}\tilde{K}$ は

$$\tilde{D}_{12}\tilde{K} = \begin{bmatrix} \tilde{D}_{12}^{11}\hat{k}_1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \tilde{D}_{12}^{r1}\hat{k}_1 & \tilde{D}_{12}^{rr}\hat{k}_r \end{bmatrix}$$

の形をしており、その対角ブロックは零行列である。したがって、 $\tilde{D}_{11} + \tilde{D}_{12}\tilde{K}$ は $\tilde{D}_{11}$ と同じ形をした下三角行列であって、その対角ブロックは $\tilde{D}_{11}$ の対角ブロックに一致する。このことより

$$\begin{aligned} & \det[sI - (\tilde{A}_{11} + \tilde{A}_{12}\tilde{K}) - (\tilde{D}_{11} + \tilde{D}_{12}\tilde{K})e^{-sh}] \\ &= \prod_{i=1}^r \det[sI - (\tilde{A}_{11}^i + \tilde{e}_i \hat{k}_i) - \tilde{D}_{11}^i e^{-sh}] \end{aligned} \quad (21)$$

が成り立つ。 $\tilde{A}_{11}^i, \tilde{e}_i$ と $\tilde{D}_{11}^i$ ($i=1, 2, \dots, r$) の形に注意しよう。これらはそれぞれ1入力の場合の A, B, D と同じ形をしている。したがって、補題2より $\hat{k}_i$ ($i=1, 2, \dots, r$) を適当に選ぶことによって、 $\operatorname{Re}(s) \geq -\alpha$ なる s について

$$\det[sI - (\tilde{A}_{11}^i + \tilde{e}_i \hat{k}_i) - \tilde{D}_{11}^i e^{-sh}] \neq 0, \quad \nearrow$$

$$\begin{aligned} & \det \left\{ sI - \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}_{11} + \tilde{A}_{12}\tilde{K} & \tilde{A}_{12} \\ \hline 0 & K_3 \end{array} \right] \right. \\ & \quad \left. - \left[\begin{array}{c|c} \tilde{D}_{11} + \tilde{D}_{12}\tilde{K} & \tilde{D}_{12} \\ \hline \tilde{D}_{21} - \tilde{K}\tilde{D}_{11} + (\tilde{D}_{22} - \tilde{K}\tilde{D}_{12})\tilde{K} & \tilde{D}_{22} - \tilde{K}\tilde{D}_{12} \end{array} \right] e^{-sh} \right\} \\ &= \det[sI - (\tilde{A}_{11} + \tilde{A}_{12}\tilde{K}) - (\tilde{D}_{11} + \tilde{D}_{12}\tilde{K})e^{-sh}] \cdot \det[sI - K_3] \\ & \quad \times \det\{I - (sI - K_3)^{-1}[\tilde{D}_{22} - \tilde{K}\tilde{D}_{12} + [\tilde{D}_{21} - \tilde{K}\tilde{D}_{11} + (\tilde{D}_{22} - \tilde{K}\tilde{D}_{12})\tilde{K}]] \\ & \quad \times [sI - (\tilde{A}_{11} + \tilde{A}_{12}\tilde{K}) - (\tilde{D}_{11} + \tilde{D}_{12}\tilde{K})e^{-sh}]^{-1}(\tilde{A}_{12} + \tilde{D}_{12}e^{-sh})\} e^{-sh}\} \\ & \neq 0 \end{aligned} \quad (24)$$

が成立することである。 $\operatorname{Re}(s) \geq -\alpha$ なる s に対して、(19)式が成立することと、 K_3 の固有値がすべて $-(\alpha + \lambda)$ であるので、 $\operatorname{Re}(s) \geq -\alpha$ のとき

$$\det[sI - K_3] \neq 0$$

が成立することに注意すれば、補題1の条件は $\operatorname{Re}(s) \geq -\alpha$ なる s に対して

$$\begin{aligned} & \det\{I - (sI - K_3)^{-1}[\tilde{D}_{22} - \tilde{K}\tilde{D}_{12} \\ & \quad + [\tilde{D}_{21} - \tilde{K}\tilde{D}_{11} + (\tilde{D}_{22} - \tilde{K}\tilde{D}_{12})\tilde{K}] \\ & \quad \times [sI - (\tilde{A}_{11} + \tilde{A}_{12}\tilde{K}) - (\tilde{D}_{11} + \tilde{D}_{12}\tilde{K})e^{-sh}]^{-1} \\ & \quad \times (\tilde{A}_{12} + \tilde{D}_{12}e^{-sh})\} e^{-sh}\} \\ & \neq 0 \end{aligned} \quad (25)$$

が成立すれば満足される。この条件は $\operatorname{Re}(s) \geq -\alpha$ なる s に対して

$$\begin{aligned} & \|(sI - K_3)^{-1}\| \cdot \{\|\tilde{D}_{22} - \tilde{K}\tilde{D}_{12}\| \\ & \quad + \|\tilde{D}_{21} - \tilde{K}\tilde{D}_{11} + (\tilde{D}_{22} - \tilde{K}\tilde{D}_{12})\tilde{K}\| \\ & \quad \times \|[sI - (\tilde{A}_{11} + \tilde{A}_{12}\tilde{K}) - (\tilde{D}_{11} + \tilde{D}_{12}\tilde{K})e^{-sh}]^{-1}\| \\ & \quad \times (\|\tilde{A}_{12}\| + \|\tilde{D}_{12}\|e^{\alpha h})\} e^{\alpha h} \\ & \leq \frac{e^{\alpha h}}{\lambda} \{\|\tilde{D}_{22} - \tilde{K}\tilde{D}_{12}\| \\ & \quad + \delta(\tilde{K})\|\tilde{D}_{21} - \tilde{K}\tilde{D}_{11} + (\tilde{D}_{22} - \tilde{K}\tilde{D}_{12})\tilde{K}\| \\ & \quad \times (\|\tilde{A}_{12}\| + \|\tilde{D}_{12}\|e^{\alpha h})\} \\ & < 1 \end{aligned} \quad (26)$$

とできる。すなわち $\tilde{K}$ を適当に選ぶことによって、 $\operatorname{Re}(s) \geq -\alpha$ なる s について

$$\det[sI - (\tilde{A}_{11} + \tilde{A}_{12}\tilde{K}) - (\tilde{D}_{11} + \tilde{D}_{12}\tilde{K})e^{-sh}] \neq 0 \quad (22)$$

とできるのである。

ここではこのように $\tilde{K}$ を選ぶ。このとき、 $\operatorname{Re}(s) \geq -\alpha$ なる s について

$$\begin{aligned} & \|[sI - (\tilde{A}_{11} + \tilde{A}_{12}\tilde{K}) - (\tilde{D}_{11} + \tilde{D}_{12}\tilde{K})e^{-sh}]^{-1}\| \\ & \leq \delta(\tilde{K}) \end{aligned} \quad (23)$$

なる正の定数 $\delta(\tilde{K})$ が存在する (付録参照)。

さて、 $\tilde{S}_e$ が安定度 α で漸近安定となるための十分条件は、補題1より、 $\operatorname{Re}(s) \geq -\alpha$ なる s に対して

が成立すれば満足される。すなわち、 λ が

$$\begin{aligned} & \lambda > e^{\alpha h} \{\|\tilde{D}_{22} - \tilde{K}\tilde{D}_{12}\| \\ & \quad + \delta(\tilde{K})\|\tilde{D}_{21} - \tilde{K}\tilde{D}_{11} + (\tilde{D}_{22} - \tilde{K}\tilde{D}_{12})\tilde{K}\| \\ & \quad \times (\|\tilde{A}_{12}\| + \|\tilde{D}_{12}\|e^{\alpha h})\} \end{aligned} \quad (27)$$

を満たせばよい。したがって、このように λ を選んでやると、 $\tilde{S}_e$ は安定度 α で漸近安定になる。つまり、 $\tilde{S}_e$ が安定度 α で漸近安定になる。 (証明終)

上の定理の条件が成り立つとき、実際に安定化を行うには証明に述べた方法に従えばよい。

ところで、池田らの安定化可能条件に、 D の列が B の列の線形結合で表わされるという条件が含まれていることを考えると、本稿で得られた結果のほうが条件としてゆるいことがわかる。

5. む す び

本稿では、むだ時間のある線形時間不変システムを対象とし、内部変数のその時刻の値のみの線形フィードバックによって、任意に安定度を指定して安定化する問題を考えた。そして、

- (1) 超越方程式を解く必要がなく、
- (2) フィードバックにむだ時間要素を必要とせず、
- (3) むだ時間 h が正確にわかっていなくても、そ

の上界さえわかっているならば適用できるような安定化法によって、任意に指定された安定度を閉ループシステムに実現することができるための十分条件を求めた。この安定化可能条件は、上の特徴をもつ安定化法によるものとしては、これまでに得られている条件よりゆるい。

参考文献

- 1) Y.S. Osipov: Stabilization of Controlled Systems with Delays, Differential Equations, 1-5, 463/475 (1965)
- 2) D.W. Ross: Controlled Design for Time Lag Systems via a Quadratic Criterion, IEEE Trans. on Automatic Control, AC-16-6, 664/672 (1971)
- 3) G.J. Nazarov and G.A. Hewer: Stabilization of Linear; Autonomous Differential Delay Systems, IEEE Trans. on Automatic Control, AC-18-6, 673/674 (1973)
- 4) 前田, 山田: むだ時間を含む線形システムの安定化, 計測自動制御学会論文集, 11-4, 444/450 (1975)
- 5) 池田, 太田: 時間おくれのある線形システムの安定化, システムシンポジウム, 201/206 (1975)
- 6) N.N. Krasovskii: Stability of Motion, 133/143, Stanford Univ. Press (1963)
- 7) D.G. Luenberger: Canonical Forms for Linear Multivariable Systems, IEEE Trans. on Automatic Control, AC-12-3, 290/293 (1967)

《付 録》

(23)式の導出: いま

$$[sI - (\tilde{A}_{11} + \tilde{A}_{12}\tilde{K}) - (\tilde{D}_{11} + \tilde{D}_{12}\tilde{K})e^{-sh}]^{-1}$$

$$= p^{-1}(s, e^{-sh})F(s, e^{-sh})$$

$$p(s, e^{-sh})$$

$$\triangleq \prod_{i=1}^r \det[sI - (\tilde{A}_{11}^i + \tilde{e}_i \tilde{k}_i) - \tilde{D}_{11}^{ii} e^{-sh}]$$

と表わせることに注意しよう。ここに、行列 $F(s, e^{-sh})$ は各要素が s と e^{-sh} の多項式で、 s についてはたかだか $(n-r-1)$ 次である $(n-r) \times (n-r)$ の行列である。ところで、補題2の証明と同様にして、 $\operatorname{Re}(s) \geq -\alpha$ のとき

$$\begin{aligned} & |\det[sI - (\tilde{A}_{11}^i + \tilde{e}_i \tilde{k}_i) - \tilde{D}_{11}^{ii} e^{-sh}]| \\ &= |\det[sI - (\tilde{A}_{11}^i + \tilde{e}_i \tilde{k}_i)]| \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\sigma_i-1} q_j^i(\cdot) s^{\sigma_i-1-j}| \\ &= |\det[sI - (\tilde{A}_{11}^i + \tilde{e}_i \tilde{k}_i)]| \\ &\quad \times \left| 1 + \frac{\sum_{j=1}^{\sigma_i-1} q_j^i(\cdot) s^{\sigma_i-1-j}}{\det[sI - (\tilde{A}_{11}^i + \tilde{e}_i \tilde{k}_i)]} \right| \\ &\geq |\det[sI - (\tilde{A}_{11}^i + \tilde{e}_i \tilde{k}_i)]| \\ &\quad \times \left\{ 1 - \frac{\left| \sum_{j=1}^{\sigma_i-1} q_j^i(\cdot) s^{\sigma_i-1-j} \right|}{\det[sI - (\tilde{A}_{11}^i + \tilde{e}_i \tilde{k}_i)]} \right\} \\ &\geq |s + c_i + 2\alpha| \sigma_i^{-1} \times \frac{1}{2\sigma_i - 1} \end{aligned}$$

が成立することが示される。ここに、 $q_j^i(\cdot)$ は(8)式の $q_j(\cdot)$ に対応する e^{-sh} の関数、 c_i は(13)式の c に対応する正数である。したがって、 $\operatorname{Re}(s) \geq -\alpha$ のとき

$$\begin{aligned} & \| [sI - (\tilde{A}_{11} + \tilde{A}_{12}\tilde{K}) - (\tilde{D}_{11} + \tilde{D}_{12}\tilde{K})e^{-sh}]^{-1} \| \\ &= |p^{-1}(s, e^{-sh})| \cdot \|F(s, e^{-sh})\| \\ &\leq \left\{ \prod_{i=1}^r (2\sigma_i^{-1} + 1) \right\} \cdot \frac{\|F(s, e^{-sh})\|}{\prod_{i=1}^r |s + c_i + 2\alpha| \sigma_i^{-1}} \\ &\leq \delta(\tilde{K}) \end{aligned}$$

なる正の定数 $\delta(\tilde{K})$ が存在することがわかる。