Square-Root 方式による LQG 問題の解法[†]

西 村 敏 充*

Solution of LQG Problem via Square-Root Method

Toshimitsu NISHIMURA*

The square-root method is applied to the LQG problem that derives the optimal estimate and control using a quadratic performance index in large-scale linear systems.

First a square-root solution of the regulator problem similar to that for the Kalman filter is derived. Then it is combined with the square-root solution of the estimation problem and a unified approach to the LQG problem is presented. By means of this square-root scheme, significant enhancement of accuracy in numerical computation is expected and the stability of the solution of Riccati type equations in estimation and control problems will be guaranteed.

1. は し が き

カルマンフィルタは広く推定の問題に利用されているが、大規模系とくに観測性の悪い系の場合には不安定であり、また観測の初期においてその共分散マトリクスが非対称となったり、正定であるべきものがそうでなくなるなど、数値計算上の問題を生ずることは経験上よく知られている。この問題を克服するため、共分散マトリクスまたはその逆マトリクスを、三角行列とその転置行列の積の形に分解するいわゆる square-root 方式が導入されている。

推定問題と双対 (dual) な関係にあるレギュレータ問題においても、制御性の悪い系ではやはり同様な不安定現象が見られる。これは推定の場合と同様の Riccati 形の微分方程式または差分方程式を解かねばならぬ関係上、当然予期される現象である。

本論文では、まずレギュレータ問題に関して、カルマンフィルタの場合と類似した square-root 方式を導

入した。さらに推定と制御を組合せたいわゆる LQG 問題に関しても、一貫した square-root 方式の解法を見出した。

2. LQG 問題

次式のごとき線形システムおよび観測値が与えられたとする。

$$x(k+1) = \Phi(k)x(k) + \Gamma(k)u(k) + G(k)w(k) \quad (1)$$

$$y(k) = H(k)x(k) + v(k) \quad (2)$$

x : 状態ベクトル (n 次元)

u : 制御ベクトル (l 次元)

y : 観測データベクトル (p 次元)

w : 白色プロセスノイズ (m 次元)

v : 白色データノイズ (p 次元)

Φ : せん移行列 ($n \times n$)

H : 観測行列 ($p \times n$)

Γ : 係数行列 ($n \times l$)

G : 係数行列 ($n \times m$)

$$E[w(k)] = 0 \quad E[w(k)w(j)^T] = Q(k)\delta_{kj} \quad (3)$$

$$E[v(k)] = 0 \quad E[v(k)v(j)^T] = R(k)\delta_{kj} \quad (4)$$

$E[\]$ はアンサンブル平均、 δ_{kj} はクロネッカデルタを示す。

このような線形系 (Linear) で、つぎのごとき 2 次形式 (Quadratic) の評価関数が与えられ、ノイズがすべてガウス雑音 (Gaussian) である場合の最適推定および最適制御を求める問題が、いわゆる LQG 問題である。

$$I_N = \min_{\{u(k)\}} E \left[x^T(N)Ax(N) + \sum_{k=0}^{N-1} (x^T(k)B(k)x(k) + u^T(k)C(k)u(k)) \right] \quad (5)$$

ここで A, B は対称行列であり、 C は正定行列であるとする。

この問題の解法は 1961~63 年頃、Joseph-Tou²⁾ お

[†] 第 19 回自動制御連合講演会で発表 (昭 51・11)

* 富士通 (株) 国際情報社会科学研究所 東京都大田区新蒲田 1-17-25

* International Institute for Advanced Study of Social Information Science, Fujitsu Ltd., Ohta-ku, Tokyo (Received October 8, 1976)

よび Gunkel-Franklin³⁾ によって求められており、有名な分離定理によって最適フィルタと最適レギュレータを別々に求め、両者を組合せることによって得られる。

最適レギュレータ問題の解は⁴⁾

$$u^*(k) = -L(k)\Phi(k)x^*(k) \quad (6)$$

$$L(k) = [C(k) + \Gamma^T S(k+1)\Gamma]^{-1}\Gamma^T S(k+1) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}(k) &= (I - \Gamma L(k))^T S(k+1) (I - \Gamma L(k)) \\ &\quad + L^T C L(k) \\ &= [S(k+1)^{-1} + \Gamma C^{-1}(k)\Gamma^T]^{-1} \end{aligned} \quad (8)$$

$$S(k) = \Phi^T \tilde{S}(k) \Phi + B(k) \quad (9)$$

であり、終端条件

$$S(N) = A \quad (10)$$

より時間軸の逆方向に (8), (9) 式を計算し, (6), (7) 式に代入して最適制御 $u^*(k)$, $k = N-1, \dots, 1, 0$, を求める。

ここで $x^*(k)$ は、時刻 t_k における最適推定値であって、以下のカルマンフィルタより得られる^{1), 4)}。

データ処理

$$x^*(k) = \hat{x}^*(k) + K(k)[y(k) - H(k)\hat{x}^*(k)] \quad (11)$$

$$K(k) = \tilde{P}(k)H^T(k)[H\tilde{P}H^T(k) + R]^{-1} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} P(k) &= [I - KH(k)]\tilde{P}(k)[I - KH(k)]^T \\ &\quad + KRK^T(k) \\ &= [\tilde{P}(k)^{-1} + H^T R^{-1} H(k)]^{-1} \end{aligned} \quad (13)$$

予測および制御

$$\begin{aligned} \hat{x}^*(k+1) &= \Phi(k)\hat{x}^*(k) + \Gamma u^*(k) \\ &= (I - \Gamma L(k))\Phi(k)\hat{x}^*(k) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\tilde{P}(k+1) = \Phi P(k)\Phi^T + GQG^T(k) \quad (15)$$

(11)と(13)式の初期値はそれぞれ $\hat{x}^*(0)$, $\tilde{P}(0)$ である。

したがって、手順としては、最適制御問題の (7)~(9) 式を時間軸の逆方向に計算して $L(k)$ を記憶に留め、今度は t_0 より順方向に (7) 式および (11)~(15) 式のデータ処理、予測、制御を行うわけである。

以下の解析では、簡単のため A, B, C, Q, R の各マトリクスは正定対角行列であるとし、 $\tilde{P}(0)$ も正定であるとする。またシステムは可観測、可制御であるとする。より一般的な条件への拡張は、比較的容易である。

3. Square-root フィルタ

最適制御の入らない場合、すなわち推定のみの場合の square-root フィルタは、文献 5)~7) のごとく直交行列である Householder operator を用いてつきのごとき三角形化を行う。

i) 初期値設定

$$\tilde{P}(0) = \tilde{R}_x^{-1} \tilde{R}_x^{-T} \text{ (注1)} : \text{Cholesky 分解}^{6)} \quad (16)$$

$$\tilde{d} = \tilde{R}_x \hat{x}^*(0) \quad (17)$$

ii) データ処理

$$T \begin{bmatrix} \tilde{R}_x \\ R^{-1/2} H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_x \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$T \begin{bmatrix} \tilde{d} \\ R^{-1/2} y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ \varepsilon \end{bmatrix} \quad (19)$$

推定値および共分散

$$x^*(k) = R_x(k)^{-1} \tilde{d}(k) \quad (20)$$

$$P(k) = R_x^{-1}(k) R_x^{-T}(k) \quad (21)$$

iii) 予測

$$\tilde{T} \begin{bmatrix} -\tilde{R}_x \Phi^{-1} G Q^{1/2} & R_x \Phi^{-1} \\ I & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{R}_w & \tilde{R}_{wx} \\ 0 & \tilde{R}_x \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\tilde{T} \begin{bmatrix} d \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{d} \\ \varepsilon \end{bmatrix} \quad (23)$$

推定値および共分散

$$\hat{x}^*(k+1) = \tilde{R}_x^{-1}(k+1) \tilde{d}(k+1) \quad (24)$$

$$\tilde{P}(k+1) = \tilde{R}_x(k+1)^{-1} \tilde{R}_x(k+1)^{-T} \quad (25)$$

上式で、 $R_x, \tilde{R}_x, \tilde{R}_w$ は上三角行列であり、 $T, \tilde{T}$ は Householder operator で直交行列である^{6), 7)}。

4. Square-root 方式による最適制御

第2,3節で述べたことは、すでに文献 1)~7) で求められていることの再録であり、本論文の前提条件をなすものである。

そこで第4節では square-root 方式によるレギュレータの問題の解法を求め、さらに第5節でその結果を推定問題と組合せ、LQG 問題の全体的な解法について検討する。

解法としては、文献 5) のごとくダイナミックプログラミングを用いて最初から解くことも可能であるが、導入をわかりやすくするため第3節の推定および制御の式を出発点として、これを直接三角形化する方法を用いることにした。

まず第2節の $S(k+1)$, $\tilde{S}(k)$ をそれぞれつぎのごとく分解する。

$$S(k+1) = \Sigma_x^T(k+1) \Sigma_x(k+1) \quad (26)$$

$$\tilde{S}(k) = \tilde{\Sigma}_x(k)^T \tilde{\Sigma}_x(k) \quad (27)$$

$\tilde{\Sigma}_x, \Sigma_x$ はいずれも $(n \times n)$ の上三角行列である。これを用い、(8)式の両辺の逆行列を取って書き換えれば、

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}_x(k)^{-1} \tilde{\Sigma}_x(k)^{-T} \\ = \Sigma_x(k+1)^{-1} \Sigma_x(k+1)^{-T} + \Gamma C^{-1} \Gamma^T \end{aligned} \quad (28)$$

(注1) $\tilde{R}_x^{-T}$ は $(\tilde{R}_x^{-1})^T$ を意味する。

一方, 第3節の予測式(15)を, 情報形三角マトリクス $R_x, \tilde{R}_x$ を用いて書き改めれば,

$$\tilde{R}_x(k+1)^{-1}\tilde{R}_x(k+1)^{-T} = \Phi(k)R_x(k)^{-1}R_x(k)^{-T}\Phi^T + GQG^T \quad (29)$$

上式を(28)式と比較すれば, $\tilde{R}_x \leftrightarrow \tilde{\Sigma}_x$, $R_x \leftrightarrow \Sigma_x$, $\Phi \leftrightarrow I$, $G \leftrightarrow \Gamma$, $Q \leftrightarrow C^{-1}$ の対比のもとに, 同形の式であることがわかる. したがって, (28)式の三角形化は, 第3節の(22)式において, 上記の対比に注目しつつ直ちに実現することができ, その結果は後記のごとくである((33)式).

つぎに(9)式を同様に $\Sigma_x, \tilde{\Sigma}_x$ を用いて書き改めれば,

$$\Sigma_x(k)^T \Sigma_x(k) = \Phi^T \tilde{\Sigma}_x(k) \tilde{\Sigma}_x(k) \Phi + B(k) \quad (30)$$

となり, 他方第3節のデータ処理式(13)は,

$$R_x(k)^T R_x(k) = \tilde{R}_x(k)^T \tilde{R}_x(k) + H^T R^{-1} H \quad (31)$$

となる. ここで両式は $R_x \leftrightarrow \Sigma_x$, $\tilde{R}_x \leftrightarrow \tilde{\Sigma}_x$, $I \leftrightarrow \Phi^T$, $H^T R^{-1/2} \leftrightarrow B^{1/2}$ の対比のもとに同形の式であることがわかり, 同様に第3節のデータ処理の三角形化の方式(18)式をそのまま利用できる.

これらの結果より, レギュレータ問題に関してつぎの square-root 方式を導くことができる.

I. 初期(終端値)変換

終端時刻 t_N において Cholesky 分解を用い, 上三角行列 $\Sigma_x(N)$ を求める.

$$S(N) = A = \Sigma_x^T(N) \Sigma_x(N) \quad (32)$$

II. Householder operator T_s の適用によって, つぎの三角形化を行う.

$$T_s \left[\begin{array}{c|c} -\Sigma_x \Gamma & \Sigma_x \\ \hline C^{1/2} & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{\Sigma}_u & \tilde{\Sigma}_{ux} \\ \hline 0 & \tilde{\Sigma}_x \end{array} \right] \quad (33)$$

$\tilde{\Sigma}_u, \tilde{\Sigma}_x$ はともに上三角行列である.

III. Householder operator $\tilde{T}_s$ の適用により, 上で得られた $\tilde{\Sigma}_x$ を用いてつぎの三角形化を行う.

$$\tilde{T}_s \left[\begin{array}{c} \tilde{\Sigma}_x \Phi \\ \hline B^{1/2} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \Sigma_x \\ \hline 0 \end{array} \right] \quad (34)$$

Σ_x はやはり上三角行列である.

IV. つぎに III で得られた Σ_x を用い II に戻り, 同様のプロセスを $k=N-1, \dots, 1, 0$ まで時間軸の逆方向に繰返す. その間制御ベクトルのゲイン $L(k)$ の計算に必要な $\tilde{\Sigma}_u(k), \tilde{\Sigma}_{ux}(k)$ のみを記憶する. L の計算は次式による.

$$L(k) = -\tilde{\Sigma}_u(k+1)^{-1} \tilde{\Sigma}_{ux}(k+1) \quad (35)$$

本式の導入は(33)式の operator T_s を4ブロックに分解し, (33)式および T_s の直交条件を利用すれば容易に求められる.

5. Square-root 方式による LQG 問題の解法

第4節で求めた square-root 方式によるレギュレータ問題の解を, 終端時刻 t_N より時間軸の逆方向に順次計算して, $\tilde{\Sigma}_u(k), \tilde{\Sigma}_{ux}(k)$ を $k=N, \dots, 1$ まで記憶し, 今度は初期時刻 t_0 から, 第3節で述べた推定機構を時間軸の順方向に適用して終端時刻まで達すれば, LQG 問題の解法は完成する.

しかし, ここで一つの障害に遭遇する.

それは, 第3節の予測, 制御の段階において新たに Γu^* が加わるために, (23)式の d より $\tilde{d}$ への数値精度的な連続性が失われることがある. すなわち, 最適制御が加わった場合(14)式より

$$\tilde{x}^*(k+1) = (I - \Gamma L) \Phi \tilde{x}^*(k) \quad (36)$$

となるが, 第3節(22)式の三角形化において Φ の代わりに $(I - \Gamma L) \Phi$ を用いると, $\tilde{x}^*$ に関する誤差共分散が(15)式の値とは異なった値となり, 実際の状態を反映しなくなる.

それは, 予測後の $\tilde{d}$ として必要な値は

$$\tilde{d} = \tilde{R}_x (I - \Gamma L) \Phi R_x^{-1} d \quad (37)$$

であるが, (22)式で Φ の代わりに $(I - \Gamma L) \Phi$ を用いると, 得られる値は

$$\tilde{d}' = \tilde{R}_x' (I - \Gamma L) \Phi R_x^{-1} d \quad (38)$$

となって, (37)式の $\tilde{d}$ とは異なってくる.

これは, 誤差共分散が分離定理によって制御とは無関係に,

$$\tilde{P} = \tilde{R}_x^{-1} \tilde{R}_x^{-T} = \Phi P \Phi^T + G Q G^T \quad (39)$$

となるべきなのに, Φ の代わりに $(I - \Gamma L) \Phi$ を用いたために

$$\begin{aligned} \tilde{P}' &= (\tilde{R}_x')^{-1} (\tilde{R}_x')^{-T} \\ &= \Phi (I - \Gamma L) P (I - \Gamma L)^T \Phi^T + G Q G^T \end{aligned} \quad (40)$$

と異なった値になってしまうためである.

そこで, $\tilde{R}_x$ および $\tilde{R}_x'$ の両方を計算して

$$\tilde{d} = \tilde{R}_x (\tilde{R}_x')^{-1} \tilde{d}' \quad (41)$$

とする方法も考えられるが, これは $(n \times n)$ の三角行列 $\tilde{R}_x'$ の逆行列の計算が必要となり, 数値精度の連続性が失われる.

また(23)式で Φ をそのまま用いて得られる値 $\tilde{d}''$

$$\tilde{d}'' = \tilde{R}_x \Phi^{-1} R_x^{-1} d \quad (42)$$

を使って

$$\tilde{d} = \tilde{R}_x (I - \Gamma L) \tilde{R}_x^{-1} \tilde{d}'' \quad (43)$$

と計算することも可能であるが, 再び $(n \times n)$ の三角行列 $\tilde{R}_x$ の逆行列計算のため, 数値誤差を生ずる可能性を伴う.

そこで, $\tilde{R}_x'$ の逆行列を

$$(\tilde{R}_x')^{-1} = \tilde{L}_x' \quad (44)$$

とにおいて、これを最初から直接計算する方法を以下に考える。これを用いれば、(38)式で得られた $\tilde{d}'$ に $\tilde{A}_x'$ を掛け、さらに $\tilde{R}_x$ を掛けることによって、(41)式より

$$\tilde{d} = \tilde{R}_x \tilde{A}_x' \tilde{R}' \quad (45)$$

となって $(n \times n)$ マトリクスの逆行列計算を行わずにすみ、数値精度を維持することが可能となる。

この目的のため、まず時刻 t_k で

$$\tilde{R}_x^{-1}(k) = \tilde{A}_x(k) \quad (46)$$

なる関係が成り立っていると仮定する。

第3節のデータ処理のステップにおいて、(18)式の operator T の右の行列が、正方行列となるように単位行列 $I(p \times p)$ を加えて、つぎのごとく三角化する。

$$T \left[\begin{array}{c|c} \tilde{R}_x & 0 \\ \hline R^{-1/2}H & I \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} R_x & R_{xv} \\ \hline 0 & R_v \end{array} \right] \quad (47)$$

上式の T は (18) 式の T とは異なるが簡単のため同じ記号を用いる。

この両辺の逆行列をとれば、

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{R}_x^{-1} & 0 \\ \hline -R^{-1/2}H\tilde{R}_x^{-1} & I \end{array} \right] T^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} R_x^{-1} & -R_x^{-1}R_{xv}R_v^{-1} \\ \hline 0 & R_v^{-1} \end{array} \right] \quad (48)$$

ここで $\tilde{R}_x^{-1}$ を $\tilde{A}_x$ で置き換え、 T の逆行列を T_R と記せば

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}_x & 0 \\ \hline -R^{-1/2}H\tilde{A}_x & I \end{array} \right] T_R = \left[\begin{array}{c|c} A_x & A_{xv} \\ \hline 0 & A_v \end{array} \right] \quad (49)$$

ここで明らかに

$$A_x = R_x^{-1} \quad (50)$$

$$A_{xv} = -R_x^{-1}R_{xv}R_v^{-1} \quad (51)$$

$$A_v = R_v^{-1} \quad (52)$$

文献 6), 7) に見るごとく、 T は $(n+p) \times (n+p)$ の直交行列であるから

$$T_R = T^{-1} = T^T \quad (53)$$

となり、 T がその右側のマトリクスを第1列から順次右へ三角化して行くのに対し、 T_R はその左側のマトリクスを、一番下の行から順次上方へ三角化して行く operator である。これは左側 operator である T を計算するサブルーティンの簡単な修正によって導入することが可能である。

つぎに予測の段階においては、第3節の(22)式の両辺の逆行列をとれば

$$\left[\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline \Phi R_x^{-1} & GQ^{1/2} \end{array} \right] \tilde{T}^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{R}_w^{-1} & -\tilde{R}_w^{-1}\tilde{R}_{wx}\tilde{R}_x^{-1} \\ \hline 0 & \tilde{R}_x^{-1} \end{array} \right] \quad (54)$$

ここで R_x^{-1} を A_x で置き換え、 $\tilde{T}$ の逆行列を $\tilde{T}_R$ と記し、さらに必要とされるのは下段の行のみである点

に注目すれば、

$$[\Phi A_x | GQ^{1/2}] \tilde{T}_R = [0, A_x] \quad (55)$$

上の $\tilde{T}_R$ は $\tilde{T}^{-1}$ とは異なるが簡単のためやはり $\tilde{T}_R$ と記す。ここで

$$\tilde{A}_x = \tilde{R}_x^{-1} \quad (56)$$

である。このようにして、 $R_x, \tilde{R}_x$ の逆行列である $A_x, \tilde{A}_x$ は、右側 Householder operator T_R および $\tilde{T}_R$ の適用によって求められることがわかった。また(44)式の $\tilde{R}_x'$ の逆行列も必要となるが、同様にして次式より求められる。

$$[(I - \Gamma L)\Phi A_x | GQ^{1/2}] \tilde{T}_R' = [0 | \tilde{A}_x'] \quad (57)$$

ここで

$$\tilde{A}_x' = (\tilde{R}_x')^{-1} \quad (58)$$

となることは自明である。

以上の結果を第3節の方式と組合せれば、第4節のレギュレータ問題の解を求め、必要な情報を記憶に留め、つぎに t_0 より出発して順方向のステップをたどることによって、推定および制御のプロセスを完結することができる。

以下に順方向のプロセスを記述する。

V. 初期値設定

Cholesky 分解の適用によって、情報形三角行列 $\tilde{R}_x$ および共分散形三角行列 $\tilde{A}_x$ を求める。

$$\tilde{P}(0) = \tilde{A}_x \tilde{A}_x^T \quad (59)$$

$$\tilde{R}_x = \tilde{A}_x^{-1} \quad (60)$$

$$\tilde{d} = \tilde{R}_x^{-1} \tilde{x}^*(0) = \tilde{A}_x \tilde{x}^*(0) \quad (61)$$

VI. データ処理

$$T \left[\begin{array}{c|c} \tilde{R}_x & \\ \hline R^{-1/2}H & \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} R_x & \\ \hline 0 & \end{array} \right] \quad (62)$$

$$T \left[\begin{array}{c|c} \tilde{d} & \\ \hline R^{-1/2}y & \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} d & \\ \hline \varepsilon & \end{array} \right] \quad (63)$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}_x & 0 \\ \hline -R^{-1/2}H\tilde{A}_x & I \end{array} \right] T_R = \left[\begin{array}{c|c} A_x & A_{xv} \\ \hline 0 & A_v \end{array} \right] \quad (64)$$

推定値および共分散

$$x^*(k) = R_x^{-1}d = A_x d \quad (65)$$

$$P(k) = R_x^{-1}R_x^{-T} = A_x A_x^T \quad (66)$$

VII. 予測および制御

$$\tilde{T}' \left[\begin{array}{c|c} -R_x \Phi^{-1}(I - \Gamma L)^{-1} GQ^{1/2} & R_x \Phi^{-1}(I - \Gamma L)^{-1} \\ \hline I & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{R}_w' & \tilde{R}_{wx'} \\ \hline 0 & \tilde{R}_x' \end{array} \right] \quad (67)$$

$$\tilde{T}' \left[\begin{array}{c|c} d & \\ \hline 0 & \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{d}' & \\ \hline \varepsilon' & \end{array} \right] \quad (68)$$

$$[(I - \Gamma L)\Phi A_x | GQ^{1/2}] \tilde{T}_R' = [0 | \tilde{A}_x'] \quad (69)$$

その後第3節の予測と同じ三角化を行う。

$$\tilde{T} \begin{bmatrix} -R_x \Phi^{-1} G Q^{1/2} & R_x \Phi^{-1} \\ I & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{R}_w & \tilde{R}_{wx} \\ 0 & \tilde{R}_x \end{bmatrix} \quad (70)$$

$$[G Q^{1/2} \mid \Phi A_x] \tilde{T}_R = [0 \mid A_x] \quad (71)$$

ここで $\tilde{d}$ の計算は第3節と異なり次式による。

$$\tilde{d} = \tilde{R}_x \tilde{A}_x' \tilde{d}' \quad (72)$$

推定値および共分散

$$\hat{x}^*(k+1) = \tilde{R}_x^{-1} \tilde{d} = \tilde{A}_x' \tilde{d}' \quad (73)$$

$$\tilde{P}(k+1) = \tilde{R}_x^{-1} \tilde{R}_x^{-T} = \tilde{A}_x \tilde{A}_x^T \quad (74)$$

VIII. ここでVIIで求められた $\tilde{R}_x, \tilde{A}_x, \tilde{d}$ を用い, VIに戻り, つぎのサイクルの計算を行い, 以下 $k=0, 1, \dots, N-1$ までデータ処理, 予測, 制御のプロセスを繰返す。

上記(67)式の L は記憶された $\tilde{\Sigma}_w, \tilde{\Sigma}_{wx}$ を用いて, (35)式で計算する。また, (67)式の $(I - \Gamma L)^{-1}$ に関しては, $(I - \Gamma L)$ の逆行列を計算する必要はなく, (35)式と同様の手法でつぎの関係式を容易に導くことができる。

$$(I - \Gamma L(k))^{-1} = I + \Gamma C^{-1}(k) \tilde{R}_w(k+1)^T \tilde{R}_{wx}(k+1) \quad (75)$$

C は $(l \times l)$ マトリクスで通常次元も小さく, また本文の仮定では対角行列であるから, その逆行列の計算は容易である。

6. おわりに

square-root 方式を用いて, レギュレータ問題およびこれと推定問題を組合せた, いわゆる LQG 問題の解法を導いた。この導入に関し注意を要する点は, 推定および制御の主要な情報を伝達する三角行列 $R_x, \tilde{R}_x$ あるいは $\Sigma_x, \tilde{\Sigma}_x$ などのマトリクスの逆行列演算

を, 初期値設定時以外は避けることである。実際の推定値 x^* あるいは制御量 u^* を求める際, これらの三角行列の逆行列を計算することは, 逐次計算におけるつぎのステップの計算には, いわばオフラインの計算であるため影響を与えない。

この一貫した square-root 方式によって, 計算精度の飛躍的向上が期待され, 制御および推定問題における Riccati 形方程式の解の安定性を保証することが可能となると考えられる。

参 考 文 献

- 1) R.E. Kalman: A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, ASME, J. of Basic Eng. Ser. D, **82**, 35/45 (1960)
- 2) P.D. Joseph and J.T. Tou: On Linear Control Theory, AIEE Trans. Application and Industry, **80**, 193/196 (1961)
- 3) T.L. Gunkel and G.F. Franklin: A General Solution for Linear Sampled Data Control, ASME Trans. Basic Eng., Ser. D, **85**, 197/201 (1963)
- 4) J.S. Meditch; Stochastic Optimal Linear Estimation and Control, McGraw-Hill, New York (1969)
- 5) P. Dyer and S. McReynolds: Extension of Square-Root Filtering to Include Process Noise; J. of Optimization Theory and Applications, **3-6** (1969)
- 6) P.G. Kaminski and A.E. Bryson Jr.: Discrete Square-Root Filtering, A. Survey of Current Technique, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-16-6** (1971)
- 7) 西村: Square-Root Filter/Smoothen と Sensitivity Analysis, システムと制御, **19-7** (1975)
- 8) 西村: Square-Root 方式による LQG 問題の解法, 第19回自動制御連合講演会前刷 (1976)