倒立振子の姿勢制御†

——質量の横方向移動による安定化——

林 節 八*・嘉 納 秀 明*・増 淵 正 美*

Postural Control of the Inverted Pendulum

——Stabilization by Moving Weight Horizontally——

Setsuya HAYASHI*, Hideaki KANOH* and Masami MASUBUCHI*

This paper presents a stabilization control of inherently unstable systems in their nature. An inverted pendulum which is a typical, unstable mechanical system, is considered and stabilized by moving a weight horizontally through a feedback control. A stabilization problem in this system corresponds to that in the postural control of a man.

It is shown that, so far as the dry friction at the bearings etc. is negligible, this inverted pendulum is stabilizable when the linearized system is controllable and observable. At the experiment, the output, the weight position r and the pendulum angle θ , and the estimated state $(\hat{x}, \hat{\theta})$ by a minimum order observer or an approximate differentiator are fed back. Experimental results show that stabilization was possible in spite of the existence of the dry friction at the bearings etc..

1. ま え が き

不安定な制御対象をフィードバック制御によって安定化させる問題は、古くからよく取上げられてきた。倒立振子の安定化制御はその一つの例である。元来、倒立振子を安定に倒立させる方法は、支点を移動させる方法（たとえば、Fig. 1(a)）と内部で質量を相対的に移動させる方法（たとえば、Fig. 1(b), (c)）との二つが考えられる。内部で質量を移動させる形式の倒立振子は、人間などにおける姿勢制御のモデルとして考えることができる。たとえば、Fig. 1(b)のおもりを左右に移動させる形式の倒立振子は、人が重い棒をもって綱渡りするときの左右の姿勢制御を、棒の上

Fig. 1 Inverted pendulums

下運動を無視してモデル化したものと考えることができる。

支点を移動させる形式の倒立振子は、古くから多くの研究があるが、内部で質量を移動させる形式のものについては、まだ少ないようである。Fig. 1(b), (c)は、内部で質量を移動させる形式のうち、最も基本的なものであるが、従来の研究としては、二足歩行のモデルとして倒立二重振子 Fig. 1(c)を解析しているもの^{1)~3)}、上部振子の重心がその回転軸に一致する場合を支点移動形と比較して取扱っているもの⁴⁾などがある。Fig. 1(b)のおもりを左右に移動させる形式のものについては、まだ研究されていない。

以上の観点から、著者らは倒立振子の姿勢制御に関して最も基本的な形式である、おもりを左右に移動させる方法による姿勢制御について、理論的かつ実験的検討を行った。

2. 主 な 記 号

- r : おもりの中央からの移動距離 [m]
- θ : 倒立振子の傾き角 [rad]
- u : 直流電力増幅器の入力端電圧 [V]
- m_1 : 倒立振子のおもり以外の部分の質量 [kg]
- l_1 : 倒立振子のおもり以外の部分の重心の高さ [m]
- I_1' : 倒立振子のおもり以外の部分の重心のまわり

† 第5回制御理論シンポジウムで発表(昭51・5)

* 大阪大学工学部 吹田市字山田上

* Faculty of Engineering, Osaka University, Suita
(Received October 16, 1976)

の慣性率 $[\text{kg} \cdot \text{m}^2]$

$$I_1 = m_1 l_1^2 + I_1' \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^2]$$

m_2 : 移動するおもりの質量 $[\text{kg}]$

l_2 : おもりの重心の通る軌道の高さ $[\text{m}]$

I_2' : おもりの重心のまわりの慣性率 $[\text{kg} \cdot \text{m}^2]$

$$I_2 = m_2 l_2^2 + I_2' \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^2]$$

m_{2a} : 駆動系のおもり以外の部分の等価質量 $[\text{kg}]$

m_{2b} : 駆動系のおもり以外の部分の等価定数 $[\text{kg} \cdot \text{m}]$

$$m_a = m_2 + m_{2a} \quad [\text{kg}]$$

$$m_b = m_2 l_2 + m_{2b} \quad [\text{kg} \cdot \text{m}]$$

c_1 : 倒立振子の支持軸受の粘性摩擦定数 $[\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{sec}]$

C_1 : 倒立振子の支持軸受における固体摩擦によるモーメント $[\text{N} \cdot \text{m}]$

c_2 : おもりを駆動する装置各部の粘性摩擦と直流電動機の逆起電力効果とを含む等価粘性摩擦定数 $[\text{kg}/\text{sec}]$

C_{2s} : 駆動系の等価固体摩擦力 $[\text{N}]$

G : 直流電力増幅器の入力端から見たゲイン定数 $[\text{N}/\text{V}]$

Fig. 2. Experimental system

Fig. 3 Weight driving system

g : 重力加速度 $[\text{m}/\text{sec}^2]$

$$I = I_1 + I_2 \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^2]$$

$$M_0 = m_1 l_1 + m_2 l_2 \quad [\text{kg} \cdot \text{m}]$$

$$D = m_a I - m_b^2$$

3. 実験系と基礎方程式

本研究の対象とするシステムは、Fig. 2 に示すように、支持台に取付けられた軸受で支えられる倒立振子（高さ1.09 m）が、左右に移動しうのおもりとこれを駆動する他励直流電動機および伝達系とをその内部に含む電気-機械系である。おもりを駆動する部分の概略図を、Fig. 3 に示す。おもりはタイミングベルトおよびスチールワイヤを介して駆動される。電動機は 50 W の直流サーボモータで電機子制御を行っており、界磁側は直流 100 V 電源、電機子側は直流電力増幅器に接続され、その入力端電圧 u [V] がこのシステムの操作量である。電力増幅器は出力 ± 40 V, ± 5 A, 200 W のハイブリッド IC パワーアンプを用いている。おもりの中央からの距離を r [m] 倒立振子の傾き角を θ [rad] とすると、このシステムは $[r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}]$ を状態量とする 4 次系であり、これを制御するうえでこれらの状態量をすべて検出するのが望ましいが困難なので、ここでは出力として r と θ を選び、ともにポテンショメータを用いて検出している。安定に倒立している状態の倒立振子の外景を Photo. 1,

Photo. 1 View of the experimental system

Photo. 2 View of the power amplifier and power supplies (DC ± 10 V, and DC 100 V)

電力増幅器ならびに電源を **Photo. 2** に示す。

実験装置の製作に当っては、つぎの諸点を考慮した。操作部の選択については、線形特性を考慮して、直流サーボモータの電機子制御方式を採用した。移動質量に働く力を直接に操作量にするのが理想的であり、電磁粉体クラッチを用いれば可能であるが、重量が大になる欠点があった。また、モータを用いる場合、力を操作量とする場合に速度のフィードバックが付け加わっているのと等価であり、解析上ほとんど同じであることも考慮した。倒立振子の構造については、4ノ

節で示す可制御条件を考慮して、移動質量の軌道が、倒立振子の支点に対する打撃の中心から十分離れた高さになるようにした。すなわち軌道の高さが、重心よりできるだけ低くなるようにした。伝達系については、歯車はバックラッシュが問題になるので、タイミングベルトとワイアによる方式を採用した。

電動機の電氣的時定数が十分小さく、ベルトとワイアの伸びがないと仮定し、軸受などの粘性摩擦と固体摩擦を考慮すると、実験系はつぎの微分方程式で記述される。

$$\begin{bmatrix} m_2 l_2 + m_{2b} & I_1 + I_2 + m_2 r^2 \\ m_2 + m_{2a} & m_2 l_2 + m_{2b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 \dot{\theta} - C_{1s} \operatorname{sgn}(\dot{\theta}) + (m_1 l_1 + m_2 l_2) g \sin \theta + m_2 g r \cos \theta - 2m_2 r \dot{r} \dot{\theta} \\ -c_2 \dot{r} - C_{2s} \operatorname{sgn}(\dot{r}) + m_2 g \sin \theta + m_2 r \dot{\theta}^2 + G u \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\left(\dot{\cdot} = \frac{d}{dt}, \quad \ddot{\cdot} = \frac{d^2}{dt^2} \right)$$

なお、おもりに働く力を操作量とする理想的な操作部をもつ場合は、(1)式で $m_{2a} = m_{2b} = 0$ とし、 c_2 に逆起電力効果によるものを含めず、 $G u$ を操作量(力)と考えればよい。したがって本研究の解析は、このような考慮のもとでもおもりに働く力を操作量とする場合にも適用できる。

簡単のため、以下つぎの記号を用いる。

$$\begin{aligned} m_a &= m_2 + m_{2a}, & m_b &= m_2 l_2 + m_{2b}, \\ M_0 &= m_1 l_1 + m_2 l_2, & I &= I_1 + I_2, & D &= m_a I - m_b^2 \end{aligned} \quad (2)$$

$D + m_2 m_a r^2 \neq 0$ ならば、(1)式の左辺の行列は正則で、(1)式より

$$\dot{x} = f(x, u) \quad x = [r \ \theta \ \dot{r} \ \dot{\theta}]^T \quad (3)$$

で表される非線形の状態方程式が得られる。ベクトル値関数 f の形は、(1)式から明らかである。

固体摩擦による抵抗がない場合すなわち $C_{1s} = C_{2s} = 0$ のとき、 $f(x, u)$ は $(x, u) = 0$ のまわりでテイラ一展開可能であり、これを行うことにより(3)式はつぎの形に表わすことができる。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A x + b u + g(x, u) \\ A &= \frac{\partial}{\partial x} \left[f(x, u) \right]_{\substack{C_{1s}=0 \\ C_{2s}=0}} \bigg|_{\substack{x=0 \\ u=0}}, \\ b &= \frac{\partial}{\partial u} \left[f(x, u) \right]_{\substack{C_{1s}=0 \\ C_{2s}=0}} \bigg|_{\substack{x=0 \\ u=0}} \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 $g(x, u)$ は $C_{1s} = C_{2s} = 0$ のとき (x, u) の2次以上の項からなるような関数である。この g を無視することにより、線形化した状態方程式が得られる。

行列 A, b は特別な形をしているので、その部分行列を用いると、線形化した状態方程式はさらにつぎの形に書くことができる。

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad x_1 = [r \ \theta]^T \quad \nearrow$$

$$\dot{x}_2 = A_{21} x_1 + A_{22} x_2 + b_2 u \quad x_2 = [\dot{r} \ \dot{\theta}]^T \quad (5)$$

$$\begin{aligned} A_{21} &= \frac{g}{D} \begin{bmatrix} -m_2 m_b & m_2 I - m_b M_0 \\ m_2 m_a & m_a M_0 - m_2 m_b \end{bmatrix}, \\ A_{22} &= \frac{1}{D} \begin{bmatrix} -c_2 I & c_1 m_b \\ c_2 m_b & -c_1 m_a \end{bmatrix}, \quad b_2 = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} I \\ -m_b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(5)式より、伝達関数はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \frac{x(s)}{u(s)} &= (sE - A)^{-1} b = \frac{1}{d(s)} \begin{bmatrix} n_1(s) \\ n_2(s) \\ s n_1(s) \\ s n_2(s) \end{bmatrix} \\ n_1(s) &= \frac{IG}{D} \left(s^2 + \frac{c_1}{I} s - \frac{M_0 g}{I} \right) \triangleq \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} n_2(s) &= -\frac{m_b G}{D} \left(s^2 - \frac{m_2 g}{m_b} \right) \triangleq \beta_1 s^2 + \beta_2 s + \beta_3 \\ d(s) &= s^4 + \frac{m_a c_1 + I c_2 s^3}{D} \\ &\quad - \frac{(m_a M_0 - 2m_2 m_b) g - c_1 c_2 s^2 - \frac{M_0 c_2 g}{D}}{D} s \\ &\quad - \frac{m_2^2 g^2}{D} \triangleq s^4 + d_1 s^3 + d_2 s^2 + d_3 s + d_4 \end{aligned}$$

ここで、 E は単位行列、 $d(s)$ は開ループの特性多項式、 $n_1(s), n_2(s)$ は u から r, θ への伝達関数の分子多項式である。

4. 安定化制御

本節では、前節で述べた倒立振子に関して、フィードバック制御によりこれを安定に倒立させる問題を理論的に検討する。この倒立振子システムは、通常の仮定のもとで(3)式により記述されるが、非線形であるのでこの安定化を直接検討するのは困難である。そこで、まず線形化した(5)式について考え、つぎに非線

形系として取扱う。

4.1 線形系としての安定化

4.1.1 全状態フィードバック

線形系(5)において、全状態量が検出可能な場合を考える。良く知られているように、定数線形系では完全可制御性と状態フィードバックにより閉ループ極を任意に設定できることとは等価である⁹⁾。したがって、系(5)が完全可制御なら、状態フィードバックにより安定化できる。系(5)が完全可制御であるための必要十分条件は、可制御行列 $[b, Ab, A^2b, A^3b]$ が正則であること、したがって、

$$(m_2I - m_b M_0)^2 g - c_1^2 m_2 m_b \neq 0 \quad (7)$$

が成立することである ((7)式は、実際上 $G \neq 0$ であるということを考慮している)。

つぎに、線形系(5)に状態フィードバック制御

$$u = -k^T x \quad k = [k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4]^T \quad (8)$$

を行う場合に、閉ループ系の特性多項式が

$$(s^2 + 2\sigma_1 s + \omega_1^2)(s^2 + 2\sigma_2 s + \omega_2^2) \quad (9)$$

になるようなフィードバック係数 k を求める式を導びく。閉ループ特性多項式は

$$\begin{aligned} \det(sE - A + bk^T) &= \det[(sE - A) \cdot \{E + (sE - A)^{-1}bk^T\}] \\ &= \det(sE - A) \cdot \det\{E + (sE - A)^{-1}bk^T\} \\ &= \det(sE - A) \cdot (1 + k^T(sE - A)^{-1}b) \\ &= d(s) + k_1 n_1(s) + k_2 n_2(s) + k_3 n_1(s) + k_4 n_2(s) \end{aligned} \quad (10)$$

と計算されるから、(9)式と(10)式が恒等的に等しいことより次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} 2(\sigma_1 + \sigma_2) \\ \omega_1^2 + \omega_2^2 + 4\sigma_1\sigma_2 \\ 2(\sigma_1\omega_2^2 + \sigma_2\omega_1^2) \\ \omega_1^2\omega_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \alpha_3 & \beta_3 \\ \alpha_3 & \beta_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} \quad (11)$$

ここで、 α_i, β_i, d_i は(6)式で定義されるものである。可制御条件(7)は、(11)式の右辺の 4×4 行列が正則であるための条件でもある。したがって、条件(7)が成り立つとき、求める k は次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \alpha_3 & \beta_3 \\ \alpha_3 & \beta_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2(\sigma_1 + \sigma_2) - d_1 \\ \omega_1^2 + \omega_2^2 + 4\sigma_1\sigma_2 - d_2 \\ 2(\sigma_1\omega_2^2 + \sigma_2\omega_1^2) - d_3 \\ \omega_1^2\omega_2^2 - d_4 \end{bmatrix} \quad (12)$$

4.1.2 不完全状態フィードバック

状態量の一部しか検出できない場合、線形系(5)の安定化について考える。まず、定数フィードバック制御で安定化できるかどうかが問題である。特別の場合

すなわち $m_{2a} = m_{2b} = c_1 = c_2 = 0$ の場合に対しては、どの一つの状態が欠けても定数フィードバックでは安定化できないという結論が、閉ループ特性多項式の係数に関する考察から容易に得られる。一般の場合は困難な問題であって、しかも上記の事実からもし安定化可能であったとしても、十分な安定度を与えるのは困難であろうと予想される。

つぎに、オブザーバを用いたフィードバック制御により安定化させる問題を考える。この場合、システムの可観測性が問題になる。線形系(5)の可観測性について調べると、つぎの結果が得られた。

1) r または $\dot{r}$ または $\ddot{r}$ を出力とするとき、系(5)が完全可観測であるための必要十分条件は、可制御条件と一致し、不等式(7)が成り立つことである。

2) θ または $\dot{\theta}$ または $\ddot{\theta}$ を出力するとき、系(5)が完全可観測であるための必要十分条件は、

$$m_2 m_a^2 g - c_2^2 m_b \neq 0 \quad (13)$$

が成り立つことである。

3) 対 (r, θ) または対 $(\dot{r}, \dot{\theta})$ を出力とするとき、系(5)は無条件で完全可観測である。

なお、ここでは $m_2 \neq 0$ を暗黙に仮定している。

良く知られているように、一般に定数線形系は完全可制御かつ完全可観測なら、オブザーバを用いたフィードバック制御により安定化可能である。ここでは、系(5)で $x_1 = [r \ \theta]^T$ を出力とする場合について、具体的に考えると、4状態2出力であるから、最小次元オブザーバの次元は、 $4 - 2 = 2$ である。これには、つぎの Gopinath による最小次元オブザーバ⁶⁾を用いるのが、設計に便利である。

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A_{21}x_1 + (A_{22} - L)\hat{x}_2 + b_2u \\ \hat{x}_2 &= z + Lx_1 \end{aligned} \quad (14)$$

ここで、 $\hat{x}_2$ は x_2 の推定値、 L は 2×2 行列で設計パラメータである。操作量は、推定された状態量を用いて(8)式で構成する。このとき閉ループ系の方程式は、(5)、(8)、(14)式をまとめるとつぎの形になる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A - bk^T & -bk_{(2)}^T \\ 0 & A_{22} - L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \\ e &\triangleq \hat{x}_2 - x_2, \quad k_{(2)} = [k_3, k_4]^T \end{aligned} \quad (15)$$

したがって、閉ループ極は行列 $A - bk^T$ と $A_{22} - L$ の固有値からなる。この二つの行列のすべての固有値の実部が負になるように、パラメータ k, L を定めると、閉ループ系を安定化できる。このような k の選択は、可制御条件(7)が満たされていれば、(12)式により可能であり、また L の選択は明らかに可能である。

4.2 非線形系としての安定化

非線形系(3)または(4)をフィードバック制御によ

り安定化させる問題を考える。軸受などに固体摩擦が存在しない場合すなわち $C_1=C_2=0$ の場合に対し、4.1 で述べた線形系(5)を安定化させる制御方策が、非線形系(3)または(4)をも安定化させることを示すことができる。状態フィードバックの場合と $x_1=[r, \theta]^T$ のオブザーバを用いたフィードバックの場合について、このことを示す。

非線形系(4)に状態フィードバック制御(8)を行う場合、および x_1 を出力として最小次元オブザーバ(14)を用いたフィードバック制御(8)を行う場合、閉ループ系はそれぞれつぎの(16)、(17)式で表わされる。

$$\dot{x} = (A - bk^T)x + g(x, -k^T x) \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - bk^T & -bk_{(2)}^T \\ 0 & A_{22} - L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g(x, -k^T x - k_{(2)}^T e) \\ -g_{(2)}(x, -k^T x - k_{(2)}^T e) \end{bmatrix} \quad (17)$$

ここで、

$$g_{(2)} \triangleq [g_3, g_4]^T, \quad g = [g_1, g_2, g_3, g_4]^T$$

3節で述べたように、 $g(x, u)$ は $C_1=C_2=0$ のとき $(x, u)=0$ のまわりにテイラー展開可能で2次以上の項からなる。したがって、このとき系(16)、(17)の非線形項もそれぞれ、状態量の2次以上の項からなる。このような場合、線形部分のすべての固有値が負の実部をもつならば、非線形系(16)、(17)の平衡点である原点は漸近安定である⁷⁾。

軸受などに固体摩擦が存在する場合には、非線形項 $g(x, u)$ が $x=0$ で不連続となり上の議論は成り立たないが、固体摩擦は小さいものと考えられるから、これを無視した考察による安定化制御の方式で、一応安定化が達成できるものと思われる。固体摩擦の影響に

Table 1 Estimated parameters of the experimental system

Pendulum	
Mass moment	M_0 6.29 kg·m
Moment of inertia	I 0.03 kg·m ²
Friction coefficient	c_1 0.115 kg·m ² /sec
Moment by dry friction	C_1 0.0410 N·m
(Mass	m_1 about 9 kg)
(Length to the gravity center	l_1 about 0.63 m)
Weight	
Mass	m_2 1.21 kg
Length to the gravity center	l_2 0.5176 m
Equivalent mass	m_a 2.27 kg
Equivalent mass moment	m_b 0.643 kg·m
Equivalent friction constant	c_2 24.6 kg/sec
Force by dry friction	C_2 3.08 N
Equivalent gain constant	G 80.7 N/V

Table 2 Coefficients of linearized state equation

$$A_{21} = \frac{g}{D} \begin{bmatrix} -m_2 m_b & m_2 I - m_b M_0 \\ m_2 m_a & m_a M_0 - m_2 m_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.573 (1/\text{sec}) & 2.39 (\text{m/sec}) \\ 2.03 (1/\text{m} \cdot \text{sec}) & 9.97 (1/\text{sec}) \end{bmatrix}$$

$$A_{22} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} -c_2 I & c_1 m_b \\ c_2 m_b & -c_1 m_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11.2 (1/\text{sec}) & 0.00554 (\text{m/sec}) \\ 1.19 (1/\text{m} \cdot \text{sec}) & -0.0196 (1/\text{sec}) \end{bmatrix}$$

$$b_2 = \frac{G}{D} \begin{bmatrix} I \\ -m_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36.6 (\text{m/sec} \cdot \text{V}) \\ -3.90 (1/\text{sec} \cdot \text{V}) \end{bmatrix}$$

ついては、実験で調べてみることにする。

最後に、本節で述べた安定化制御の存在の前提である可制御条件(7)は等式が不成立という条件であるから、ほとんどの場合この条件は満たされ、したがって安定化可能であるといえる。しかし、これは操作量の大きさに制限がないと考えた議論であり、実際には増幅器の飽和や電動機の能力により、操作量に拘束があるので(7)式の左辺がゼロに近い場合には、(12)式で計算されるフィードバック係数が非常に大きな値となり、実際上安定化できないことが生ずる。

5. 安定化制御実験と考察

実験に用いた倒立振子のパラメータの測定値を Table 1 に示す。 I, c_1, C_1 は微小角自由振動から、 c_2, C_2 はステップ応答から求めた。線形化した状態方程式のパラメータを Table 2 に、伝達関数のパラメータを Table 3 に示す。

実験は $x_1=[r, \theta]^T$ を出力として検出しているのので、最小次元オブザーバ(14)をアナログ計算機(NEC A-300)で構成して、フィードバック制御を行った。安定化制御器のパラメータ k, L は閉ループ極を設定することにより定めた。安定に倒立した振子の応答の例を Fig. 4 に、これに用いた制御器のパラメータを Table 4 に、そのアナログ計算機の回路図の例を Fig. 5 に示す。

Fig. 4 は、オブザーバの極を $-12, -15$ に固定し、閉ループ極を $-3, -4, -5$ (それぞれ4重根)と変化したときの応答を示している。固体摩擦によるものと考えられる持続振動が生じているが、極を s 平面のより左に設定すると、この振幅は小さくなる傾向がある。また、(b)、(c)の高い波形の部分は、外乱を与えたために生じたものであり、外乱に対し十分な安定度をもっていることを示している。

同じオブザーバを用いた閉ループ極が -2 のときには

Table 3 Transfer function

$$\frac{r(s)}{u(s)} = \frac{36.6(s+3.21)(s-3.19)}{(s+11.1)(s+3.20)(s+0.09)(s-3.20)}$$

$$\frac{\theta(s)}{u(s)} = \frac{-3.90(s+4.29)(s-4.29)}{(s+11.1)(s+3.20)(s+0.09)(s-3.20)}$$

Fig. 4 Practical response
 r : weight position
 θ : pendulum angle

Table 4 Parameters of minimum order observer controller

Observer parameters	$L = \begin{bmatrix} 3.84 & 0.006 \\ 1.19 & 12.0 \end{bmatrix}$			
Observer poles -12, -15				
	Feedback law			
Closed loop poles	k_1	k_2	k_3	k_4
	(V/m)	(V/rad)	(V/(m/s))	(V/(rad/s))
-3 (multiplicity 4)	4.148	22.87	0.7803	7.111
-4 (multiplicity 4)	7.277	41.57	1.511	12.95
-5 (multiplicity 4)	11.77	70.14	2.559	21.75

Fig. 5 Analog circuit of the observer-controller when the closed loop poles are all -5 and observer poles -12, -15

Potentiometers: ①: 0.1276, ②: 0.5092, ③: 0.1500, ④: 0.3660, ⑤: 0.0573, ⑥: 0.2390, ⑦: 0.3840, ⑧: 0.0006, ⑨: 0.3900, ⑩: 0.1200, ⑪: 0.2030, ⑫: 0.9970, ⑬: 0.1200, ⑭: 0.1190, ⑮: 0.2559, ⑯: 0.1177, ⑰: 0.7014, ⑱: 0.2175

安定とならなかった。これは持続振動の振幅が大きくて、実験装置の拘束 $|u| \leq \text{約 } 0.6 \text{ [V]}$, $|r| \leq \text{約 } 0.8 \text{ [m]}$ およびアナログ計算機の電圧制限 ($\pm 10 \text{ V}$) のいずれかを超えたためと考えられる。また一般に安定化できた場合も、初期状態として倒立の平衡状態もしくはこれに近い状態を選ばないと安定に倒立させることはできなかった。これも同様にこれらの拘束のためと考えられる。

$\dot{r}, \dot{\theta}$ を微分器を用いて求め、状態フィードバックを行う場合についても、実験を行った。ここでは、 $\dot{r}, \dot{\theta}$ は近似微分 $s/(1+T_i s)$ で求め、操作量はフィルタ $1/(1+T_o s)$ を通して入力とした。安定化できるかどうかは、 T_i, T_o の値に依存し、 T_i が $0.1 \sim 0.01$ 秒、 T_o が 0.05 秒の時には良い応答が得られた。 T_i, T_o の値を変えて行った実験の結果を Table 5 に示す。

Fig. 4 の応答に見られるように、オブザーバを用いたフィードバック制御においても微分器を用いたフィードバック制御のどちらにおいても、持続振動の中心が $r=\theta=0$ からずれるということが生じた。これは、ポテンシヨのゼロ点設定の誤差、アナログ計算機の精度、摩擦の不均一性などによるものと考えられるが、この原因を除去するのは、非常に困難である。積分補償で偏差をゼロにすることができることは、古典的制御論で良く知られており、ここでも、制御系に θ の積分フィードバックを追加することにより、このずれをゼロにすることができた。さらに、 $\theta_d - \theta$ の積分フィードバックを行う場合には、持続振動の中心点を、目標値 θ_d に従って可能な範囲で自由に変えることができた。

最後に、倒立振子の応答に生じた持続振動は、固体摩擦によるものと考えられるので、記述関数法を用いてこれを解析する。操作部系統の固体摩擦力を $F_r \triangleq -C_2 \text{sgn}(\dot{r}) \text{ [N]}$, 支持軸の固体摩擦トルクを $F_\theta \triangleq -C_1 \text{sgn}(\dot{\theta}) \text{ [N}\cdot\text{m]}$ とする。 F_r/G から $\dot{r}$ への伝達関数は、状態フィードバック制御(8)を行っている時には、

$$S_r(s) \triangleq \frac{\dot{r}(s)}{F_r(s)/G} = \frac{sm_1(s)}{d_c(s)} \quad (18)$$

オブザーバ(14)を用いたフィードバック制御(8)の時には、

$$S_r(s) = \frac{sm_1(s)\{1 + k_{(2)}T(sI - A_{22} + L)^{-1}b_2\}}{d_c(s)} \quad (19)$$

となる。ここで $d_c(s)$ は閉ループ系の特性多項式、 $m_1(s), A_{22}$ はそれぞれ、(6)式、および(5)式で与えられる。また、 $\dot{r}$ から $-F_r/G$ への記述関数は、

$$N_r(a) = \frac{4C_2}{\pi Ga} \quad (20)$$

となる。ここで a は $\dot{r}$ の振幅である。 $S_r(j\omega)$ のナイキスト軌跡と $N_r(a)$ の逆記述関数軌跡を Fig. 6 に

Table 5 Experimental result for the case of state feedback where r , θ is computed by approximate differentiator $s/(1+T_i s)$ and control is filtered by $1/(1+T_o s)$ when closed loop poles are all -5

$T_o \backslash T_i$	0.1 sec	0.01 sec	0.005 sec
0.05 sec	Stable Limit cycle (0.037 m, 1.69 sec)	Stable Stand still	Stable Stand still
0.005 sec	Stable Stand still	Stable, but high frequency, small amplitude oclation exists. Unstable for large disturbance	Unstable High frequency, small amplitude oclation exists.
0 sec	Stable Stand still	Stable, but high frequency, small amplitude severe oclation exists. Limit cycle of large amplitude also exists. Unstable for small disturbance.	Unstable Violent oclation

Fig. 6 Nyquist locus of $S_r(j\omega)$ and inverse describing function locus of $N_r(a)$ when the closed loop poles are all -3 to curve (1), all -4 to curve (2), and all -5 to curve (3)

Table 6 Comparison between experimental result and analysis by the describing function method, of the limit cycle. At describing function analysis, dry friction $C_{ss}=3.08 N$ is only considered. At state feedback experiment using differentiator, T_i is 0.01 sec and T_o is 0.05 sec. At observer-controller case, observer poles are -12 , -15

Closed loop poles		State feedback		Observer-controller	
		Experiment Using differentiator	Describing function method	Experiment	Describing function method
all -3	Period	8 sec	5.06 sec	11 sec	4.59 sec
	Amp. of r	0.19 m	0.188 m	0.085 m	0.112 m
	Amp. of θ	0.036 rad	0.034 rad	0.02 rad	0.02 rad
all -4	Period	6 sec	3.80 sec	2.5 sec	2.98 sec
	Amp. of r	0.04 m	0.066 m	0.023 m	0.036
	Amp. of θ	0.008 rad	0.011 rad	0.004 rad	0.006 rad
all -5	Period	—	3.04 sec	1.9 sec	1.77 sec
	Amp. of r	—	0.030 m	0.012 m	0.019 m
	Amp. of θ	—	0.0050 rad	0.002 rad	0.0028 rad

示す。両軌跡の交点から、持続振動の周期と振幅が推定できる。この解析結果と実験との比較を **Table 6** に示す。解析結果は実験に、だいたい良く合っているといえる。

つぎに、 F_θ から θ への伝達関数は、状態フィードバック制御 (8) を行っている時には、

$$S_\theta(s) \triangleq \frac{\dot{\theta}(s)}{F_\theta(s)/G} = \frac{s \{ f_\theta(s) + \frac{G}{D}(k_1 + k_3 s) \}}{d_c(s)} \quad (21)$$

オブザーバ(14)を用いたフィードバック制御 (8) の時には、

$$S_\theta(s) = \frac{s \{ f_\theta(s) + \frac{G}{D}(k_1 + k_3 s) + n_2(s)k_{(2)}^T(sI - A_{22} + L)^{-1}b_\theta \}}{d_c(s)} \quad (22)$$

となる。ここで、 $f_\theta(s)$ は、 F_θ から θ への開ループ伝達関数の分子多項式、また $b_\theta^T \triangleq [-m_0/D \ m_a/D]$ である。 θ から $-F_\theta$ への記述関数は、

$$N_\theta(a) = \frac{4C_{11}}{\pi a} \quad (23)$$

となる。ここで a は θ の基本波の振幅である。 $S_\theta(j\omega)$ のナイキスト軌跡と $N_\theta(a)$ の逆記述関数軌跡を **Fig. 7** に示す。この場合交点がないので、リミットサイクルは生じない。

(a) State feedback case (b) Observer-controller case

Fig. 7 Nyquist locus of $S_0(j\omega)$ and inverse describing function locus of $N_r(a)$ when the closed loop poles are all -3 to curve (1), all -4 to curve (2), and all -5 to curve (3)

以上の記述関数による解析から、つぎの事が推定される。リミットサイクルが生ずる主な原因は、操作部系統の固体摩擦 F_r であり、支持軸の固体摩擦トルク F_θ のみの存在ではリミットサイクルは生じない。リミットサイクルの振幅は、 F_r の大きさ C_{2r} に比例し、周期は C_{2r} によっては変化しない。また、閉ループ極を s 平面でより左に移動させることにより、リミットサイクルの振幅は小さくできる。

6. む す び

内部でおもりを左右に移動させる方式による倒立振子の姿勢制御について、理論的かつ実験的検討を行った。ここでは、この形式の倒立振子が軸受などに固体摩擦がないならば、ほとんどの場合満たされる条件のもとで、理論的に安定化可能であることを示した。この条件とは、線形化した状態方程式の可制御条件(7)および可観測条件(7), (13)であり、可制御条件が満たされるならば状態フィードバックにより、可観測条件が満たされるならば出力のオブザーバを用いたフィードバックにより、安定化することができる。ただし、実際には操作量に拘束があるので、(7)式の左辺がゼロに近い場合安定化が困難であると考えられる。

実験では (r, θ) を出力とし、2次の最小次元オブザーバを用いて、 $(\hat{r}, \hat{\theta})$ を推定し、フィードバック制御を行った。この結果、安定に倒立させることができ、軸受などの固体摩擦は小さく安定化に影響を与えない程度であろうとの予想が裏付けられた。またオブザーバも有効に働いたものと考えられる。

微分器を用いて $\dot{r}$ と $\dot{\theta}$ を求めて、状態フィードバック制御を行う場合も検討した。近似微分 $s/(1+T_i s)$ の T_i が $0.1 \sim 0.01$ 、操作量のフィルタ $1/(1+T_0 s)$ の T_0 が 0.05 などの値で、安定に倒立させることができた。 T_i, T_0 がこれより小さな値の時には、高周波

微小振幅の振動が生じ、安定に倒立した場合も小さな外乱で倒れた。オブザーバを用いたフィードバック制御は、このようなフィルタの問題を考えずにストレートに設計可能で、しかも外乱に対し十分安定であるので、設計手法として非常に有効であると考えられる。

安定化された倒立振子の応答には持続振動が生じたが、記述関数法による解析から、この主な原因は、操作部系統における固体摩擦であることがわかった。また、閉ループ極を s 平面でより左に移動させると、この振幅は小さくなる。しかし、操作量には拘束があるので、むやみに根を左に移動させるわけにはいかない。したがって、振幅を小さくするか、振動をなくする別の方法が必要である。摩擦は温度や接触面の状態などによって変化するので、適応的な補償が望ましく、今後の課題である。

単なる状態フィードバックなどでは、持続振動の中心点が $r=\theta=0$ からずれたが、これは、 θ の積分フィードバックを付加することにより解決した。

安定化の重要な前提である可制御条件(7)は、 $m_{2a} = m_{2b} = I_2' = c_1 = 0$ のとき $I_1' \triangleq m_1 R_1^2$ とすると $l_1(l_2 - l_1) \neq R_1^2$ の形になる。これは、おもりの移動する軌道が、振子の支点に対する打撃の中心を通らないということであり、支点の反力の水平方向の成分が、安定化の重要な要因であることを示唆している。

最後に、倒立振子の制御について貴重なご意見をくださった東京工業大学 古田勝久氏ならびに森正三氏に深く感謝する。また、本研究に協力を得た大阪大学大学院生 平子敬一君に感謝する。

参 考 文 献

- 1) H. Hemami, W.C. Weimer and S.H. Koozekanami: Some Aspect of the Inverted Pendulum Problem for Modelling of Locomotion Systems, JACC Preprint, 132/140 (1973)
- 2) C.L. Golliday and H. Hemami: Postural Stability of the Two-Degree-of-Freedom Biped by General Linear Feedback, IEEE Trans. on Automatic Control, AC-21-1, 74/79 (1976)
- 3) 酒井, 江村: 重心移動による倒立振子の姿勢制御, 精密機械学会東北支部講演会前刷, 9/12 (1972)
- 4) 酒井, 江村: 反動力によって立位を維持する倒立振子の研究「バイオメカニズム 2」, 321/328 (1973)
- 5) W.H. Wonham: On Pole Assignment in Multi-Input Controllable Linear Systems, IEEE Trans. on Automatic Control, AC-12-6, 660/665 (1967)
- 6) 有本: 線形システム理論, 180, 産業図書 (1974)
- 7) J. LaSalle and S. Lefschetz 著, 山本訳: リアプノフの方法による安定性理論, 41, 産業図書 (1975)