離散値制御システムの標準構造†

宮 道 寿 —*

Canonical Form of Quantized Control System

Juichi MIYAMICHI*

Discrete control is widely found in various field, including the control by digital computers. Systems whose control inputs are restricted to discrete values are called the quantized control systems.

A state x is called reachable if there is an input sequence which carries the system from zero to x . In quantized control system, the best situation for reachability is that within any neighborhood of x there is a reachable state, in which case x is called to be "almost reachable".

In this paper, a structure analysis of the state space is developed for the linear, constant and discrete-time dynamical systems over the field of real numbers whose control inputs are restricted to the integer vectors:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

where $x(k) \in \mathbf{R}^n$, $u(k) \in \mathbf{Z}^m$ and A and B are real matrices.

Concerning with reachability, three A -invariant subspaces ($X_2 + X_3 + X_4$, $X_3 + X_4$ and X_4 below) are characterized, resulting the following canonical form of the quantized control system.

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & A_2 & 0 & 0 \\ * & A_{32} & A_3 & 0 \\ * & * & * & A_4 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix} u(k)$$

$\uparrow X_1$
 $\uparrow X_2$
 $\uparrow X_3$
 $\uparrow X_4$

$\downarrow X_1$
 $\downarrow X_2$
 $\downarrow X_3$
 $\downarrow X_4$

$X_2 + X_3 + X_4$: A -invariant subspace spanned by the set of reachable states.

$X_3 + X_4$: A -invariant subspace in which every state is almost reachable.

X_4 : A -invariant subspace in which

every state is almost reachable in finite time.

A_2, B_2 : matrices over the ring of all integers.

A_{32}, A_3, B_3 : matrices over the field of rational numbers, A_2 has no algebraic integers as its characteristic values.

A_4, B_4 : matrices over the field of real numbers.

1. はじめに

システムの制御入力として連続的な値が可能でも、実際に使用する制御入力は離散的な値だけに限られる場合は多い。連続実数値の制御入力に対して可制御なシステムでも、制御入力が連続実数値から非連続離散値に制限されれば、従前と同じ制御可能性は期待できない。しかしながら、このことに関しての、すなわちシステムの離散値制御に関してシステムの可到達性、可制御性、制御時間あるいはシステムの構造といった性質についての考察はあまりなされていない。

本論文は離散値制御の最も簡単なモデルである整数値制御システム、すなわち実数体上(注1)の定係数、離散時間、線形システムを整数値入力で制御することを考えシステムの特性とシステムの可到達性および制御時間との関連について調べたものである。

システムの状態遷移行列に関して不変部分空間を二つ特徴づけ、それに基づいて整数値制御に関するシステムの標準形を導く。この標準形はシステムの制御可能性および、制御に必要とされる時間に関するシステムの特性を明らかにするものである。また、実数体上のシステムの制御可能性の問題が有理数体上のシ

† 第18回自動制御連合講演会で発表(昭50・11)

* 東京農工大学工学部 小金井市中町 2-24-16

* Faculty of Engineering, Tokyo University of Agriculture and Technology, Koganei

(Received October 7, 1976)

(注1) 本論文ではシステムを表現する行列 A, B の要素が実数(有理数)である場合、そのシステムを実数体(有理数体)上のシステムと呼ぶ。表現行列が有理数要素の場合にも、状態空間としては実ベクトル空間 $\mathbf{R}^n$ を考えていることに注意されたい。

テムのそれに帰着されることがわかる。

2. 準 備

この節に用語、記号、数学的事実をまとめておく。

整数環を $\mathbf{Z}$, 有理数体を $\mathbf{Q}$, 実数体を $\mathbf{R}$ で表わす。

n 次元線形空間 $\mathbf{R}^n$ の点 $x=(x_1, \dots, x_n)'$ に対してそのノルムを $\|x\|=(x_1^2+\dots+x_n^2)^{1/2}$ で定義する。 $\mathbf{R}^n$ はこのノルムによって位相空間になる。弧立点, 閉集合, 閉包などの用語は, この位相に関して用いられる。集合 M の閉包を $\bar{M}$ で表わす。

$\mathbf{R}^n$ の部分集合 S が与えられたとき, S で張られる部分線形空間とは, S の点の実数係数線形結合の全体のことであり, 一方, S で生成される $\mathbf{Z}$ -加群とは, S の点の整数係数線形結合全体のことである。前者を $\mathbf{R}(S)$, 後者を $\mathbf{Z}(S)$ で表わす。行列 T に対して, その列ベクトルから生成される $\mathbf{Z}$ -加群も $\mathbf{Z}(T)$ で表わす。 $\mathbf{Z}$ -加群 M は, それを生成する有限集合が存在する場合, 有限生成, そうでない場合, 無限生成といわれる。

線形独立性は作用域に依存するため, 常に作用域を明示して $\mathbf{Q}$ -線形独立, $\mathbf{R}$ -線形独立などの語を用いる。 $\mathbf{R}$ に関して線形独立ならば $\mathbf{Q}$ に関して線形独立であるが, 逆は正しくない。たとえば $\mathbf{R}^1$ において二つの数 1 と $1/\sqrt{2}$ は $\mathbf{R}$ -線形従属であり $\mathbf{Q}$ -線形独立である。

$\mathbf{R}^n$ の線形変換 A に対して, $\mathbf{R}^n$ の部分集合 S が A -不変であるとは, 任意の $x \in S$ に対して $Ax \in S$ が成り立つことをいう。

M を $\mathbf{R}^n$ の部分 $\mathbf{Z}$ -加群とすれば, M の閉包 $\bar{M}$ も $\mathbf{R}^n$ の部分 $\mathbf{Z}$ -加群である。 $\mathbf{R}^n$ の閉部分加群の構造についてつぎの結果は有用である⁶⁾。

[補題 1] ($\mathbf{R}^n$ の閉部分 $\mathbf{Z}$ -加群の構造)

M を $\mathbf{R}^n$ の閉部分 $\mathbf{Z}$ -加群とする。 M は「互いに平行に等間隔に並んだ線形多様体の合併」として特徴づけられる。すなわち $\mathbf{R}^n$ の基底 $\{a_i\} i=1, \dots, n$ でつきの性質をもつものが存在する。 M は

$$\sum_{i=1}^p t_i a_i + \sum_{j=p+1}^l n_j a_j \quad t_i \in \mathbf{R}, \quad n_j \in \mathbf{Z} \quad (1)$$

の形の全体に等しい。 (補題終)

$\{a_i\} i=1, \dots, p$ で張られる部分空間は基底の取り方に依存せず M だけによってきまる。これは M に含まれる最大の部分空間である。この部分空間を M の連続部分空間とよび, $C(M)$ で表わす。

[補題 2] (有限生成 $\mathbf{Z}$ -加群の集積性)²⁾ $\mathbf{R}^n$ の l 個の点 $x_1, \dots, x_l$ が $\mathbf{Q}$ -線形独立かつ $\mathbf{R}$ -線形従属とする。このとき, $C(\mathbf{Z}(x_1, \dots, x_l)) \supseteq \{0\}$

3. 整数値制御システム

本論文の対象は次式で表現される実数体上の定係数, 線形, 離散時間システムで, 制御入力が整数ベクトルに制限されたものである。

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (2)$$

ここに $k \in \mathbf{Z}$, $x(k) \in \mathbf{R}^n$, $u(k) \in \mathbf{Z}^m$, $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbf{R}^{n \times m}$ 。本論文では, 第 5 節を除いて, 対象とするシステムは実数値入力に対して可到達であるとする。すなわち,

$$\text{rank}_{\mathbf{R}} [B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n \quad (3)$$

状態 0 から t -ステップで到達可能な状態の集合を M_t で, その和集合 (到達可能な状態の集合) を M_∞ で表わす。両者とも $\mathbf{Z}$ -加群の構造をもつ。

$$M_t = \mathbf{Z}[B, \dots, A^{t-1}B]$$

$$M_\infty = \bigcup_{t \geq 1} M_t$$

集合 M_∞ は $\mathbf{Z}$ -加群として一般に無限生成であるが, その点集合としての濃度はたかだか可算無限であるので, システムは通常の意味では可到達になり得ない。

[定義 3] 状態 $x \in \mathbf{R}^n$ が “ほとんど可到達” であるとはその任意の近傍の中に少なくとも一つ可到達な状態が存在する場合をいう。すなわち $\bar{M}_\infty$ に属する状態が “ほとんど可到達” な状態である。 $x \in \mathbf{R}^n$ が有限時間で “ほとんど可到達” とは, ある $k \geq 0$ が存在して, $x \in \bar{M}_k$ となる場合をいう。

$\bar{M}_\infty$ の構造についてはつぎの事がわかっている²⁾。

[補題 4] $\bar{M}_\infty$ は互いに平行に, 等間隔に並んだ線形多様体の合併であり, その原点を含む成分は A -不変部分空間である。状態空間の基底を適当に選ぶことによりシステムの表現式はつぎのようになる。

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} (k+1) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ * & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} (k) + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(k)$$

ここに A_1, B_1 は整数要素の行列であり, ベクトル x_2 が上の A -不変部分空間に対応する部分である。

4. 制御時間について

(2) 式で表わされるシステムを実数値入力で制御する場合, ある状態が可到達ならば, その状態へはたかだか長さ n の入力列によって到達できる。入力を整数値だけに限るとこのことはもはや成立しない。本節では, システムの制御時間について考察し, 新しい A -不変部分空間を特徴づける。

有限時間で “ほとんど可到達” な状態の集合をつくる $\mathbf{R}^n$ の閉部分加群の増大列 $\bar{M}_1 \subseteq \bar{M}_2 \subseteq \dots$ を考える。各加群の連続部分空間もこれと同じ向きの増大列をな

す。

$$C(\bar{M}_1) \subseteq C(\bar{M}_2) \subseteq \cdots \subseteq C(\bar{M}_i) \subseteq \cdots$$

【補題 5】 上の増大列において、ある i に対して $R(\bar{M}_i) = R_n$ かつ $C(\bar{M}_i) = C(\bar{M}_{i+1})$ が成立すれば、 $C(\bar{M}_i)$ は A -不変部分空間であり、任意の $h \geq 0$ に対して $C(\bar{M}_i) = C(\bar{M}_{i+h})$ が成り立つ。

(証明) $M_{i+1} = AM_i + M_i$ より $\bar{M}_{i+1} \supseteq A\bar{M}_i + \bar{M}_i$. これより $C(\bar{M}_i) = C(\bar{M}_{i+1}) \supseteq C(A\bar{M}_i) \supseteq AC(\bar{M}_i)$. したがって $C(\bar{M}_i)$ は A -不変である。

閉加群 $\bar{M}_i$ に補題 1 を適用すると、

$$\bar{M}_i = \sum_{k=1}^l t_k a_k + \sum_{k=l+1}^n n_k b_k = C(\bar{M}_i) + \sum_{k=l+1}^n n_k b_k$$

$C(\bar{M}_i)$ が A -不変であることに注意すれば、

$$\begin{aligned} \bar{M}_{i+1} &\supseteq A\bar{M}_i + \bar{M}_i \\ &= C(\bar{M}_i) + \left(\sum_{k=l+1}^n n_k b_k + \sum_{k=l+1}^n n_k A b_k \right) \end{aligned}$$

これより $C(\bar{M}_{i+1}) = C(\bar{M}_i)$ が成り立つためには、

$$C\left(\sum_{k=l+1}^n n_k b_k + \sum_{k=l+1}^n n_k A b_k\right) \subseteq C(\bar{M}_i)$$

が心要であることがわかる。【補題 2】に注意すれば、 $A b_k (k=l+1, \dots, n)$ は $b_{l+1}, \dots, b_n$ の Q -係数 $a_1, \dots, a_l$ の R -係数線形結合として表わされることがわかる。 $C(\bar{M}_i)$ は A -不変であるから、これから任意の $h \geq 0$ に対して $A^h b_k (k=l+1, \dots, n)$ は $b_{l+1}, \dots, b_n$ の Q -係数 $a_1, \dots, a_l$ の R -係数線形結合となることが結論される。すなわち、任意の $h \geq 0$ に対して、 $C(\bar{M}_i) = C(\bar{M}_{i+h})$. (証明終)

システムの実数値入力に対する可到達性指標を j で表わす。 j はつぎの関係を満足する最小の整数である。

$$\text{rank}_R [B, AB, \dots, A^{j-1}B] = n$$

【補題 6】 システムの次元を n 、可到達性指標を j とする。任意の $h \geq j+n$ に対して $C(\bar{M}_h) = C(\bar{M}_{j+n})$ が成立し、この部分空間は A -不変である。

(証明) 部分空間の増大列 $C(\bar{M}_1) \subseteq C(\bar{M}_2) \subseteq \cdots$ において、 $i \geq j$ に対しては $R(\bar{M}_i) = R^n$ が成り立つ。また、 n 次元線形空間の中の部分空間の真の増大列の長さはたかだか n であるから、 $C(\bar{M}_{j+n}) = C(\bar{M}_{j+n+1})$ が成立し、したがって前補題により、任意の $h \geq 0$ に対して $C(\bar{M}_{j+i}) = C(\bar{M}_{j+n})$ となる。 (証明終)

つぎの例題は、補題 6 の限界値 $j+n$ が一般には、これより小さくできないことを示している。

【例題 7】 つぎの整数値制御システムを考える。

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(k)$$

可到達性指標 $j=1$, $j+n=3$ である。

$$C(\bar{M}_3) = C\left(Z \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 1 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 3 \end{bmatrix}\right) = R^2$$

$$C(\bar{M}_2) = C\left(Z \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}\right) = R \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(例題終)

(注意) 有限生成 Z -加群の閉包の連続部分空間 (の基底) は古典位相群におけるクロネッカーの近似定理の拡張を利用して、具体的に計算することができる (付録 A-1~A-3 を参照)。

補題 6 をシステムの制御という観点から解釈するとつぎようになる。『システムのある状態 (成分) が有限時間内で“ほとんど可到達”ならば、すなわち、ある T が存在して、任意の $\varepsilon > 0$ に対して T -単位時間内でその ε 近傍に到達できるならば、その状態は $(j+n)$ 単位時間内で“ほとんど可到達”である。』

システムを実数値入力で制御する場合、可到達な状態へはたかだか j 単位時間内に (最も必要制御時間の長いシステムでも n -単位時間内で) 到達できる。制御入力を実数値 (連続値) から整数値 (離散値) だけに制限すると、この時間は $(j$ から $j+n$ に) 長くなるのである (注 2)。

上の解釈において「ある状態が有限時間内で“ほとんど可到達”ならば」という仮定は一般的には成り立たないことに注意されたい。たとえば有理数体上のシステムでは T は一般に ε に依存し、この条件を満足する状態は本当に可到達な状態のみである。

補題 5 の証明からわかるとおり、閉 Z -加群 $\bar{M}_{j+n}$ の補題 1 の意味での標準基底に関するシステムの表現式においては、行列 A, B の $C(\bar{M}_{j+n})$ の補空間に対応する部分の要素はすべて有理数となる (B の要素は整数)。次節の整数値制御システムの標準形を参照のこと。 $C(\bar{M}_{j+n})$ の部分は明らかに“ほとんど可到達”であり、したがってシステムが“ほとんど可到達”か否かは有理数要素の部分の性質できまる。すなわち、実数体上のシステムの“ほとんど可到達”性の議論は、有理数体上のシステムの“ほとんど可到達”性の議論に帰着される。有理数体上のシステムの“ほとんど可到達”性は状態遷移行列 A の特性根の性質だけに依存することがわかっている (付録 A-4, A-5 参照)。

有理数体上のシステムでは、たとえば状態 x が“ほとんど可到達”であっても、要求される近似精度があがればあがるほど、その近似精度でシステムを状態 x に

(注 2) この説明は、システムの状態すべてでなく部分空間 $C(\bar{M}_{j+n})$ に属する状態についてだけ適用されるものであることに注意。例題 8 あるいは第 5 章参照。

遷移させるに必要な時間は長くなる。このことはつぎの簡単な例からもわかる。

【例題 8】 つぎの整数値制御システムを考える。

$$x(k+1) = \frac{1}{10}x(k) + u(k) \quad u(k) \in \mathbf{Z}$$

このシステムの t -ステップ可到達状態の集合 M_t は

$$M_t = \mathbf{Z} + \left(\frac{1}{10}\right)\mathbf{Z} + \dots + \left(\frac{1}{10}\right)^{t-1}\mathbf{Z}$$

で表わされ、したがって $\varepsilon > 0$ に対して、 ε の精度でシステムを制御するには、 $\varepsilon \geq (1/10)^k$ を満足する最小の k だけの制御時間が必要である。(例題終)

5. システムの標準形

本節では、システムの可到達状態の集合、“ほとんど可到達”な状態の集合などの構造を直観的な形で示す整数値制御システムの標準形を与える。本節で扱うシステムは $\mathbf{R}$ -入力で必ずしも可到達とは限らないものとする。

【補題 9】 整数値入力で可到達な状態の集合 M_∞ の張る $\mathbf{R}$ -線形空間は、実数値入力で可到達な状態の集合のつくる部分空間に等しい。この空間は A -不変である。

(証明) 略

【補題 4】、有理数体上のシステムに関する結果 A-4, A-5, 【補題 6】 および 【補題 9】 をまとめるとつぎの結果が得られる。

《定理 10》 状態空間の基底を適当に選ぶことにより、システム(2)は、状態変数 $x(k)$ がつぎのように四つの部分に直和分解された形に表現される (整数値制御に関するシステムの標準形)。

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & A_2 & 0 & 0 \\ * & A_{32} & A_3 & 0 \\ * & * & * & A_4 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix} u(k) \quad \begin{matrix} \uparrow X_1 \\ \uparrow X_2 \\ \uparrow X_3 \\ \uparrow X_4 \end{matrix} \quad (4)$$

- (i) X_1 : 制御入力の影響のまったく及ばない部分空間。
- (ii) $X_2 + X_3 + X_4$: 可到達状態の集合 M_∞ の張る部分空間。 A -不変
- (iii) $X_3 + X_4$: “ほとんど可到達”な部分空間。 A -不変
- (iv) X_4 : $(j+n)$ 単位時間内で“ほとんど可到達”な部分空間。 A -不変。ここに j はシステムの可到達性指標、 n はシステムの次元。

(v) 部分空間 X_2 の内部では可到達状態が離散的に分布している。

(vi) 部分空間 $X_3 + X_4$ の内部では可到達状態が稠密に分布している。すなわち $X_3 + X_4$ に属す状態は“ほとんど可到達”

(vii) 部分空間 X_3 に属す状態は“ほとんど可到達”であるが、近似の精度をあげるには時間がかかる。

(viii) A_2, B_2 は整数要素の行列。

(ix) A_{32}, A_3, B_3 は有理数要素の行列で、 A_3 はその特性根として代数的整数をもたない。

(x) A_4, B_4 は必ず無理数を含む実数要素の行列。

【例題 11】 《定理 10》の具体例としてつぎの整数値制御システムを考える。

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 3 & \sqrt{2}-3 \\ -1 & 1 & \sqrt{2}-1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$M_\infty = \mathbf{Z} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{11}{4} & \frac{43}{8} \\ 1 & 2 & 5 & \frac{21+2\sqrt{2}}{2} & \frac{93+10\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5+2\sqrt{2}}{2} & \frac{29+10\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix}$$

クロネッカーの近似定理の拡張に基づくアルゴリズム (付録 A-3) に従って $C(\overline{M}_6) = X_4$ の基底を求め、これを延長して $\mathbf{R}^3$ の基底を構成し、この基底に関するシステムの表現式を求める。紙面の都合上、結果だけを述べると、正則行列 T による座標変換によってシステムはつぎようになる。

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad TB = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \uparrow X_4$$

ただし

$$T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

部分システム

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

は有理数体上のシステムで、状態遷移行列の特性根は 2 と 1/2 である。1/2 に対応する固有空間は直線 $y = -(1/2)x$ で A -不変である。固有ベクトル $(-2, 1)'$ と、これに $\mathbf{R}$ -線形独立な入力ベクトル $(1, 0)'$ を新しい基底ベクトルとし、この基底に関するシステムの表現式を求めると

Fig. 1 Expansion of the set of reachable states

$$\hat{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \hat{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

結局全体のシステムはつぎの標準形に変換される。

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

このシステムの入力ステップ数の増加に伴う可到達状態集合の拡がり方を Fig. 1 に示す。

図からわかるとおり、長さ1の制御入力によって可到達な状態 M_1 は x 軸上に等間隔に並び、長さ2の制御入力列で可到達な状態 M_2 は xy 平面上に離散的に分布している。 M_3 で3次元空間内の格子点を形成する。ここまでは $M_i = \bar{M}_i$ である。

長さ4の制御入力列によって可到達な状態 M_4 は z 軸に平行な直線群 ($\bar{M}_4$) の上に稠密に並んでいる。 $C(\bar{M}_4)$ は z 軸に一致し、 Z -成分は有限時間でほとんど可到達な成分である (Z -成分は長さ4の入力列で任意の精度で近似できる)。

$M_4, M_5, M_6, \dots$ 制御入力列の長さ i が長くなるにつれ $\bar{M}_i$ を構成する直線群の y 軸方向の間隔が狭くなっていき、最終的に $\bar{M}_\infty$ は yz 平面に平行で互いに距離1だけ離れた平面の集合となる。 M_∞ はこれらの平面内に稠密に分布している。 $C(\bar{M}_\infty) = yz$ 平面。

6. おわりに

実数体上の定係数、離散時間、線形システムを整数値入力力で制御する整数値制御システムに関して、その可到達性および制御に必要な時間について考察し、整数値制御システムの標準形を導いた。可到達性に関して重要な二つの A -不変部分空間が得られた。ここに A はシステムの状態遷移行列である。

整数値制御システムの可到達状態の集合 M_∞ の構造はつぎの三つの1次元システムに代表される。

$$(i) \quad x(k+1) = 2x(k) + u(k)$$

$$(ii) \quad x(k+1) = \frac{1}{2}x(k) + u(k)$$

$$(iii) \quad x(k+1) = \sqrt{2}x(k) + u(k)$$

(i) は整数環上のシステムでその可到達状態の集合 M_∞ は状態空間内に離散的に分布。

(ii) は有理数体上のシステムでその可到達状態の集合 M_∞ は状態空間内で稠密であるが、制御の精度をあげるには時間がかかる。

(iii) は実数体上のシステムで、その可到達状態の集合は状態空間内で稠密であり、有限時間で任意の精度で制御できる。

一般のシステムは(i), (ii), (iii)の特徴をもつシステムの組合せであり、(iii)および(ii)+(iii)が二つの A -不変部分空間、すなわち“有限時間でほとんど可到達”な状態の集合がきめる A -不変部分空間と、“ほとんど可到達”な状態の集合がきめる A -不変部分空間にそれぞれ対応している。

システムの整数値制御に関する標準形は、上の二つの A -不変部分空間、および可到達状態集合によって張られる A -不変部分空間が状態空間の直和因子になるような基底を選択することにより自然に導かれる。

末言ながら、本研究を進めるにあたりご指導、ご鞭撻をいただいた東京工業大学情報工学科 深尾毅教授ならびに深尾研究室の諸氏に感謝する次第である。

参考文献

- 1) Y. Anzai: A note on Reachability of Discrete-Time Quantized Control System, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-19**, 575/577 (1974)
- 2) 宮道, 深尾: 離散値制御システムの制御可能性, 計測自動制御学会論文集, **12-2**, 145/150 (1976)
- 3) 宮道, 深尾: 離散値によるシステムの制御 - 状態構造と制御可能性について, 第18回自動制御連合講演会前刷, 227/228 (1975)
- 4) 宮道: 離散値によるシステムの制御に関する研究, 東京工業大学 博士課程論文 (1976)
- 5) 宮道, 深尾: 単項イデアル環上のシステムの構造と実現, 計測自動制御学会論文集, **10-5**, 631/636 (1974)

- 6) ブルバキ: 数学原論, 位相, 第7章
 7) R.E. Kalman, R.L. Falb and M.A. Arbib: Topics in Mathematical System Theory, McGraw-Hill, New York (1969)
 8) S. Eilenberg: Automata, Languages and Machines, Vol. A, Academic Press, New York (1974)
 9) L. Padulo and M.A. Arbib: System Theory, W.B. Sanders, Philadelphia (1974)

《付 録》

〈A-1〉 (クロネッカーの近似定理)⁶⁾ H を $\mathbf{R}^n$ の自然な基 $e_1=(1, 0, \dots, 0)', \dots, e_n=(0, \dots, 1)'$ と $\theta=(\theta_1, \dots, \theta_n)$ から生成される $\mathbf{R}^n$ の $\mathbf{Z}$ -部分加群とする。このとき H が $\mathbf{R}^n$ で稠密であるための必要十分条件は, $\theta_1, \dots, \theta_n, 1$ が $\mathbf{Q}$ -線形独立であること。

〈A-2〉 (近似定理の拡張)²⁾ H を $\mathbf{R}^n$ の自然な基 $e_1, \dots, e_n$ と $a=(a_1, \dots, a_n)', b=(b_1, \dots, b_n)', \dots, c=(c_1, \dots, c_n)'$ から生成される $\mathbf{R}^n$ の有限生成 $\mathbf{Z}$ -部分加群とする。このとき H が $\mathbf{R}^n$ で稠密であるための必要十分条件は, $\mathbf{Q}$ 上の正則行列 T, S が存在して, 行列 $F=[e_1, \dots, e_n, a, b, \dots, c]$ がつぎの形に変形されることである。

$$TFS = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & \alpha & * & \\ & \ddots & & \beta & \dots & * \\ & & 1 & 0 & & * \\ & & & \gamma & & \end{array} \right]$$

ここに $\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_i)', \beta=(\beta_{i+1}, \dots, \beta_i)', \dots, \gamma=(\gamma_i, \dots, \gamma_n)'$ はそれぞれ A-1 の θ の条件を満足するベクトルである。たとえば $\alpha_1, \dots, \alpha_i, 1$ は $\mathbf{Q}$ -線形独立である。

〈A-3)⁴⁾ $\mathbf{R}^n$ の有限生成 $\mathbf{Z}$ -加群 M の生成元を並べた行列を F とする。実数要素の正則行列 G および整数要素の可逆行列 P によって F はつぎの形に変形される。

$$GFP = \left[\begin{array}{c|c} 1 & * \\ \hline & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 0 \end{array} \right]$$

行列 F_1 に対して A-2 を適用すると, 行列 GFP は有理数要素の正則行列 T, S によってつぎのようになる。

$$T(GFP)S = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & \alpha & * & \\ & \ddots & & \beta & \dots & * \\ & & 1 & 0 & & * \\ & & & \gamma & & \\ \hline 0 & & 0 & & 1 & L \\ & & & & & 1 \\ 0 & & 0 & & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \updownarrow X_1 \\ \\ \updownarrow X_2 \\ \updownarrow \end{array}$$

ここに L は有理数要素の行列である。 X_1 の部分が $\bar{M}$ の連続部分空間であり, この基底は $(TG)^{-1}$ の列ベクトルとして具体的に求められる。

〈A-4)²⁾ 本文(2)式のシステムにおいて A, B がともに $\mathbf{Q}$ 上の行列であるとする。このとき A の特性根がすべて代数的整数ならば, M_∞ は弧立点のみからなる。ここに代数的整数とは最高次係数が1の整数係数多式の根 (一般に複素数) のことである。

〈A-5)²⁾ A-4 と同じ条件のもとで, システムが“ほとんど可到達”であるための必要十分条件は, A の特性根に代数的整数が含まれないことである。