結合非線形系の最適制御のためのアルゴリズム†

— 評価関数の変形を伴う干渉ベクトル調整法 —

小 鹿 丈 夫*・西 川 禎 一**・島 筒 博 章***・奥 平 雅 士**

An Interaction Coordination Algorithm with Modified Performance Index for Optimal Control of Coupled Nonlinear Systems

Takeo OJKA*, Yoshikazu NISHIKAWA**, Hiroaki SHIMAZUTSU***
and Masashi OKUDAJRA**

This paper proposes a computational algorithm for the optimal control of coupled nonlinear systems. The dynamical system under consideration is composed of several subsystems with relatively strong interconnections and/or relatively strong nonlinearities. The objective is to minimize a performance index of quadratic type.

The basic idea of the present algorithm is to remove the interconnections and nonlinearities from system variables, and then the overall problem is decomposed into a number of smaller and linear subproblems. At the same time, the performance index is modified by using the interaction variables. Parameters, called weights, are introduced in the modified performance index. The values of these parameters have significant influence on the rate of convergence of the algorithm, and they are major factors determining the total computing time necessary to reach a converged result.

On the other hand, the interaction variables are adjusted directly by a gradient algorithm until the interaction balances are satisfied.

In the paper, a sufficient condition for convergence of the iterative algorithm is discussed in detail, and several features of the present algorithm are illustrated by examining an example.

1. はじめに

この論文は、非線形多変数システムの最適制御問題に対して分割手法¹⁾を適用する際に、サブシステム間の統合を能率よく達成するための一つのアルゴリズムを提案したものである。ここでは特に、サブシステム間の結合あるいは非線形性の強い問題に対して有効なアルゴリズムを開発することに主眼をおいた。開発したアルゴリズムを従来のアルゴリズムと比較しながら、優れた収束性などについて詳細に検討した結果を述べる。

非線形システムの最適制御問題に対する数値解法としては、従来から幾つかの提案がなされている^{2), 3)}。しかし、サブシステム間の結合あるいは非線形性が強い場合には、繰返し計算が収束しないことがあり、これらの解法は必ずしも有効とはいえない。筆者らは先に、非線形2次形式問題に対して、ラグランジュ乗数を導入せず干渉変数を直接に調整変数として用いる統合のアルゴリズム(干渉ベクトル調整法)を提案した^{4), 5)}。この干渉ベクトル調整法によっても、サブシステム間の結合あるいは非線形性が強い場合には繰返し計算の収束速度が低下し、場合によっては収束しないことがある。また、この調整法では一種のこう配法を用いており、最適な歩み幅を1次元探索によって求めているので、そのためにかなりの計算時間を要する。

この論文では、あらかじめ干渉ベクトルを用いて評価関数を適当に変形した後、一定歩み幅の干渉ベクトル調整法を適用し、解への収束速度を速め、あるいは収束させよう問題の範囲を拡張することを試みる。変形評価関数には重みと呼ぶ2個のパラメータを導入し、この重みを適当に選ぶことにより、繰返し計算の初期の段階では評価関数の値を大きくすることなく、

† 第14回計測自動制御学会学術講演会で発表(昭50・8)

* 大阪教育大学 大阪市天王寺区南河堀町 43

** 京都大学工学部 京都市左京区吉田本町

*** 三菱重工業(株) 広島市観音新町 4-8-2

* Osaka Kyoiku University, Osaka

** Faculty of Engineering, Kyoto University, Kyoto

*** Mitsubishi Heavy Industries, Ltd., Hiroshima

(Received December 10, 1976)

みかけ上大きな制御を用いることが可能となる。その結果、繰返し計算の収束性を改良することができる⁶⁾。

第2節で考察の対象とする問題を明記し、第3節では最適性の必要条件を求める。第4節では分割・統合の2レベル・繰返しアルゴリズムを提案し、第5節で上記の重みを用いて評価関数を変形した場合(変形アルゴリズム)を変形しない場合(原アルゴリズム)と対比させながら、繰返し計算の収束条件の改善について検討する。また、重みの実際的な決め方についても一つの提案を行った。さらに第6節では例題によって、原アルゴリズムあるいは準線形化法では解へ収束しないが、本論文のアルゴリズムでは収束させることを具体的に示す。

2. 問題の記述

次式で記述される非線形系

$$\dot{x} = A(t; \varepsilon)x + B(t)u + \varepsilon f(t, x), \quad \begin{matrix} x(t_0) = x_0 \\ x(t_f): \text{free} \end{matrix} \quad (1)$$

において、つぎのような2次形式の評価関数

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x'Q(t; \varepsilon)x + u'R(t)u] dt \quad (2)$$

を最小にする問題を考察する。ここで初期時刻 t_0 および終端時刻 t_f は固定されているものとする。 x は n 次元の状態変数、 u は m 次元の制御変数であり、 f は n 次元のベクトル関数であって C^2 に属するとする。 A および B はそれぞれ $n \times n$ および $n \times m$ 次元の行列、 Q および R はそれぞれ $n \times n$ 次元半正定値および $m \times m$ 次元正定値行列で、いずれも t に関して連続であるとする。(1)および(2)式における ε はサブシステム間の結合および非線形性の程度を表わすスカラー・パラメータである。

簡単のために、以下では全体システムは二つのサブシステムから構成されているものとし、

$$\begin{aligned} x &= (x_1', x_2')', \quad u = (u_1', u_2')' \\ f &= [f_1'(t, x_1, x_2), f_2'(t, x_1, x_2)]' \\ A(t; \varepsilon) &= \begin{bmatrix} A_{11} & \varepsilon A_{12} \\ \varepsilon A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \\ Q(t; \varepsilon) &= \begin{bmatrix} Q_{11} & \varepsilon Q_{12} \\ \varepsilon Q_{12}' & Q_{22} \end{bmatrix} \\ B &= \text{diag}(B_{11}, B_{22}), \quad R = \text{diag}(R_{11}, R_{22}) \\ E &\triangleq BR^{-1}B' = \text{diag}(E_{11}, E_{22}) \end{aligned} \quad (3)$$

の場合を考える。ここに、 x_i は n_i 次元 ($n_1 + n_2 = n$) および u_i は m_i 次元 ($m_1 + m_2 = m$) の状態および制御変数である。

3. 最適性の必要条件

サブシステム間の結合あるいは非線形性が強い場合における繰返し計算の収束性を改善するために、(2)式で与えられる評価関数を

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\kappa x'Qx - (\kappa - 1)y'Qy \\ &\quad + \frac{1}{\beta}u'Ru + \left(1 - \frac{1}{\beta}\right)q'Eq] dt \end{aligned} \quad (4)$$

のように書き改める。ここに y および q は n 次元のベクトルで、 $w(t) \triangleq (y', q')'$ を干渉変数と呼ぶ。(4)式において、 $x = y$ および $Ru = -B'q$ の場合には $J = \hat{J}$ となり、(4)式は(2)式と一致する。また、 κ および β は正のスカラー・パラメータで、重みと呼ぶことにする。そして $\kappa = \beta = 1$ の場合を原問題と呼び、 $\kappa \neq 1$ あるいは $\beta \neq 1$ の場合を変形問題と呼ぶことにする。

いま、(1)および(4)式により与えられる問題に対して、ハミルトン関数 H を

$$\begin{aligned} H &\triangleq \frac{1}{2} [\kappa x'Qx - (\kappa - 1)y'Qy \\ &\quad + \frac{1}{\beta}u'Ru + \left(1 - \frac{1}{\beta}\right)q'Eq] \\ &\quad + p'(Ax + Bu + \varepsilon f) + \lambda'(x - y) \\ &\quad + \pi'(u + R^{-1}B'q) \end{aligned} \quad (5)$$

とする。ここに p, λ , および π はそれぞれ n, n および m 次元のラグランジュ乗数である。最適性の必要条件から次式を得る。

$$H_x = 0 : \quad \pi = -\frac{1}{\beta}Ru - B'p \quad (6)$$

$$H_y = 0 : \quad \lambda = -(\kappa - 1)Qy \quad (7)$$

$$H_q = 0 : \quad \left(1 - \frac{1}{\beta}\right)Eq + BR^{-1}\pi = 0 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -H_x : \quad \dot{p} = -\left[A' + \varepsilon \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)'\right]p \\ &\quad - \kappa Qx - \lambda, \quad p(t_f) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

(6)~(8)式を(1)および(9)式に代入すれば、最適解の満たすべき条件として、つぎの非線形2点境界値問題 (TPBVP)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax - \beta E p + (\beta - 1)Eq + \varepsilon f, \quad x(t_0) = x_0 \\ \dot{p} &= -\kappa Qx - A'p + (\kappa - 1)Qy - \varepsilon \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)'p, \\ p(t_f) &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

が得られる。

4. 2-レベル法の適用

(10)式は非線形 TPBVP であるから、まずサブシステム間の結合変数とすべての非線形項の変数を干渉変数で置き換えることにより、(10)式を分割し、かつ線形化する。つぎに、これらの低次元の部分線形 TPBVP を、結合条件が満足されるまで繰返し解くことによって、逐次非線形 TPBVP の解へ収束させる。すなわち、以下に述べるような 2-レベル構造を有する計算方法が有効である。

4.1 第1レベルの計算

各サブシステムに関する独立した線形 TPBVP を得るために、(10)式において ε を含む項の x および p を、干渉変数 w_i ($i=1, 2$) を用いて

$$\dot{z}_i = \hat{D}_{ii} z_i + (D_{ii} - \hat{D}_{ii}) w_i + \varepsilon D_{ij} w_j + \varepsilon h_i(t, w_1, w_2) \quad (11)$$

$$L_{ii} z_i(t_0) = x_0, \quad L_{ii} z_i(t_f) = 0 \quad (i=1, 2) \quad (12)$$

のように書き改める。ここに

$$z_i \triangleq (x_i', p_i')',$$

$$\hat{D}_{ii} \triangleq \begin{bmatrix} A_{ii} & -\beta E_{ii} \\ -\kappa Q_{ii} & -A_{ii}' \end{bmatrix} \quad (i=1, 2)$$

$$D_{ij} \triangleq \begin{bmatrix} A_{ij} & -E_{ij} \\ -Q_{ij} & -A_{ij}' \end{bmatrix} \quad (i, j=1, 2)$$

$$h_i \triangleq \left[f_i'(t, y, q), -q_i' \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \right) - q_j' \left(\frac{\partial f}{\partial y_j} \right) \right]' \quad (13)$$

$$(i, j=1, 2; i \neq j)$$

$$L_{ii} \triangleq (I_{n_i}, 0), \quad L_{ii} \triangleq (0, I_{n_i}) \quad (i=1, 2)$$

であり、 $\hat{D}_{ii}$ をサブシステム i のシステム行列と呼ぶ。

干渉変数 w_i は第2レベルより与えられるものとすれば、(11) および (12) 式の i ごとに独立した線形 TPBVP は、第1レベルで容易に解くことができる。

いま、 $\phi_i(t, t_0)$ は次式で与えられる変形問題に対する基本解行列で、 $\phi_i(t_0, t_0) = I_{2n_i}$ を満足しているものとする。

$$\dot{\phi}_i(t, t_0) = \hat{D}_{ii} \phi_i(t, t_0) \quad (i=1, 2) \quad (14)$$

同様に、原問題に対する基本解行列を $\Phi_i(t, t_0)$ とする。

k 回目の繰返し計算における z_i の値を ${}^k z_i$ と表わせば、(11) および (12) 式の解は

$$\begin{aligned} {}^k z_i(t) &= \phi_i(t, t_0) z_{i0}({}^k w_1, {}^k w_2) \\ &+ \int_{t_0}^t \phi_i(t, \tau) \{ (D_{ii} - \hat{D}_{ii}) {}^k w_i \\ &+ \varepsilon [D_{ij} {}^k w_j + h_i(\tau, {}^k w_1, {}^k w_2)] \} d\tau \end{aligned} \quad (15)$$

で与えられる。ここに、 z_{i0} は第2レベルより ${}^k w_i$ が与えられれば定まる、 $2n_i$ 次元の初期値である。

4.2 第2レベルの計算

第1レベルで計算された $z_i(t)$ はサブシステム間の結合条件式

$$r_i(t) \triangleq z_i(t) - w_i(t) = 0, \quad t \in [t_0, t_f] \quad (i=1, 2) \quad (16)$$

を必ずしも満たしていない。いま、(16)式を用いて、第2レベルの評価関数として、協調誤差 G を

$$G \triangleq \left[\frac{1}{2n(t_f - t_0)} \sum_{i=1}^2 \int_{t_0}^{t_f} {}^k r_i'(t) {}^k r_i(t) dt \right]^{1/2} \quad (17)$$

のように定める。第2レベルでは、この協調誤差 G が $\sigma (> 0)$ 以下になるように、干渉変数 w_i を次式によって逐次修正する。

$$\begin{aligned} {}^{k+1} w_i(t) &= {}^k w_i(t) + \alpha {}^k r_i(t) \\ (i=1, 2; k=0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (18)$$

ここに、 α は $0 < \alpha \leq \bar{\alpha}$ ($\bar{\alpha} \geq 1$) なる一定値の歩み幅である。干渉変数の初期推定値 ${}^0 w_i(t)$ は、一つの方法として、(12)式の境界条件のもとで(14)式から得られる解 $z_i(t)$ を用いるものとする。

5. 繰返し計算の収束性

ここでは、変形問題に干渉ベクトル調整法を適用する際の繰返し計算(変形アルゴリズム)の収束性について、原問題に対するそれと比較しながら検討する。

いま閉領域 Ω をつぎのように定義する。

$$\Omega \triangleq \left\{ (w_1, w_2) \left| \sum_{i=1}^2 \|w_i(t) - z_i(t)\| \leq 2\delta \right. \right\}, \quad \delta > 0 \quad (19)$$

ここに、

$$\|x(t)\| \triangleq \max_{t \in [t_0, t_f]} (x'x)^{1/2},$$

$$\|A(t)\| \triangleq \max_{t \in [t_0, t_f]} (\text{trace } A'A)^{1/2}$$

である。

行列 A, B, Q, R および関数 f は仮定により連続であるから、つぎの条件を満足する各定数が存在する。

$$\begin{aligned} a_1 &\triangleq \max_i \|A_{ii}(t)\|, \quad a_2 \triangleq \max_i \|Q_{ii}(t)\| \\ a_3 &\triangleq \max_i \|E_{ii}(t)\|, \quad a_4 \triangleq \max_{i, j; i \neq j} \|D_{ij}(t)\| \\ \max_i \|h_i(t, w_1^1, w_2^1) - h_i(t, w_1^2, w_2^2)\| \\ &\leq b_1 [\|w_1^1(t) - w_1^2(t)\| + \|w_2^1(t) - w_2^2(t)\|], \\ (w_1^1, w_2^1) &\in \Omega \quad (l=1, 2) \end{aligned} \quad (20)$$

$$a \triangleq \exp [\sqrt{2a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}(t_f - t_0)]$$

$$\hat{a} \triangleq \exp [\sqrt{2a_1^2 + \kappa^2 a_2^2 + \beta^2 a_3^2}(t_f - t_0)]$$

このとき、まずつぎの補題が成立する。

【補題 1】 原問題および変形問題における基本解行列のノルムは、それぞれつぎの関係を満たす。

$$\begin{aligned} \max_i \max_{t, \tau \in [t_0, t_f]} \|\Phi_i(t, \tau)\| &\leq a \\ \max_i \max_{t, \tau \in [t_0, t_f]} \|\hat{\Phi}_i(t, \tau)\| &\leq a \end{aligned} \quad (21)$$

補題 1 は Bellman-Gronwall の不等式⁷⁾を用いることにより、容易に証明できる。

さらに、以下の議論において、つぎの補題 2 は重要である。

[補題 2] 重み κ および β は不等式

$$\kappa^2 a_2^2 + \beta^2 a_3^2 < a_2^2 + a_3^2 \quad (22)$$

を満たしているものとすれば、

$$\frac{\sqrt{2a_1^2 + \kappa^2 a_2^2 + \beta^2 a_3^2}}{\sqrt{2a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} < \gamma < 1 \quad (23)$$

なる γ が存在し、(20)式で与えられる a および $\hat{a}$ の間には、

$$\hat{a} < a^\gamma \quad (24)$$

なる関係が成立する。

補題 2 の証明は容易であるから、ここでは省略する。

いま、 κ および β, γ は補題 2 の条件を満たしているものとする。さらに変形問題に対してつぎの諸量を定義する。

$$\begin{aligned} \mu &\triangleq a^\gamma(t_f - t_0)(|\varepsilon|c_1 + c_2) \\ c_1 &\triangleq a_4 + 2(b_1 + b_2) \\ c_2 &\triangleq [1 - \kappa|a_2 + [1 - \beta|a_3 + 2b_3] \end{aligned} \quad (25)$$

ここに、 b_2 および b_3 は

$$\begin{aligned} &\|\Phi_i(t, t_0)[z_{i0}({}^{k+1}w_1, {}^{k+1}w_2) - z_{i0}({}^k w_1, {}^k w_2)]\| \\ &\leq \alpha a^\gamma(t_f - t_0)(|\varepsilon|b_2 + b_3) \left[\sum_{i=1}^2 \|{}^k r_i(t)\| \right] \end{aligned} \quad (26)$$

なる関係を満たす定数である。同様に、原問題に対して、

$$\mu \triangleq |\varepsilon|a(t_f - t_0)c_3, \quad c_3 \triangleq a_4 + 2(b_1 + b_4) \quad (27)$$

を定義する。ここに b_4 は (26)式と同様の関係を満たす定数である。

ここで、 ${}^k z_i$ と ${}^{k+1}z_i$ の差のノルムは、(15)および (18), (20), (21), (24), (25)式から

$$\sum_{i=1}^2 \|{}^{k+1}z_i(t) - {}^k z_i(t)\| \leq \alpha \beta \sum_{i=1}^2 \|{}^k r_i(t)\| \quad (28)$$

となる。一方、(15)および (18)式より ${}^k z_i$ と ${}^k w_i$ の差 ${}^k r_i$ は、(20)および (25), (26)式を考慮することにより、

$$\sum_{i=1}^2 \|{}^k r_i(t)\| \leq \hat{\phi}(\alpha) \sum_{i=1}^2 \|{}^{k-1}r_i(t)\| \quad (29)$$

を満足することがわかる。ここに、

$$\hat{\phi}(\alpha) \triangleq [1 - \alpha] + \beta \alpha \quad (30)$$

である。(28)および (29)式からわかるように、 β あるいは $\hat{\phi}$ は収束性の一つの目安を与えるものと考えられる。

以上の議論に基づいて、つぎの定理が得られる。

《定理 1》 (23)式を満足する γ に対して、

$$(t_f - t_0)c_2 < a^{-\gamma} - a^{-1}, \quad c_1 \leq c_3 \quad (31)$$

が満足されているものとすれば、

$$\frac{a^\gamma c_2}{a^{1-\gamma} - 1} < |\varepsilon|a^\gamma c_1 < \frac{1 - a^\gamma(t_f - t_0)c_2}{t_f - t_0} \quad (32)$$

なる関係が成立し、また

$$\hat{\mu} < \min[\mu, 1] \quad (33)$$

なる関係が成立する。

(証明) 定義より $0 < \gamma < 1$ および $a > 1$ であるから、

(31)式より、

$$a^\gamma(t_f - t_0)c_2 < 1 - a^{-1} < 1 \quad (34)$$

を得る。したがって、(31)および (34)式より、

$$\frac{a^{-\gamma} - (t_f - t_0)c_2}{(t_f - t_0)c_1} - \frac{c_2}{a^{1-\gamma}c_3 - c_1} > 0 \quad (35)$$

が成立するから、(32)式を満足する ε が存在することは明らかである。

つぎに、(32)式を満たす ε に対して、同式左辺の関係より、

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= a^\gamma(t_f - t_0)(|\varepsilon|c_1 + c_2) \\ &< |\varepsilon|a(t_f - t_0)c_3 = \mu \end{aligned} \quad (36)$$

を得る。一方、(32)式右辺の関係より、

$$|\varepsilon|a^\gamma(t_f - t_0)c_1 < 1 - a^\gamma(t_f - t_0)c_2 \quad (37)$$

であるから、 $\hat{\mu} < 1$ が成立する。

(証明終)

定理 1 は、重みを適当に定めれば (33)式を満たすような ε が存在し、この ε に対しては収束性を改良できることを示している。

[系 1] 補題 2 および定理 1 の条件が満足されているものとすれば、

$$\frac{1}{a^{1-\gamma}(t_f - t_0)} \leq |\varepsilon|a^\gamma c_1 < \frac{1 - a^\gamma(t_f - t_0)c_2}{t_f - t_0} \quad (38)$$

を満たす ε に対して

$$\mu \geq 1, \quad \hat{\mu} < 1 \quad (39)$$

なる関係が同時に成立する。

系 1 は、原アルゴリズムでは収束が保証されないような ε に対しても、変形アルゴリズムでは重みを適当に定めることにより、収束させうる場合があることを示している。

変形アルゴリズムにおける歩み幅 α に関して、つぎの系が有用である。

[系 2] 補題 2 および定理 1 の条件が満足されているものとすれば、

$$\hat{\phi}(\alpha) < \min[\mu, 1] \quad (40)$$

を満足する歩み幅 α ($\alpha_1^* < \alpha < \alpha_2^*$) が存在する。ここに

$$\alpha_1^* \triangleq \max \left[\frac{(1-\mu)}{(1-\beta)}, 0 \right],$$

$$\alpha_2^* \triangleq \min \left[\frac{(1+\mu)}{(1+\beta)}, \frac{2}{(1+\beta)} \right]$$

である。

系2は、変形問題においては重みを適当に定めることにより、広い範囲の α の値に対して収束性を改良できることを示している。

〔補題3〕 系2の条件を満足する α に対して、 $\beta \triangleq \max \|{}^0 r_i(t)\| \leq \delta[1-\phi(\alpha)]/\alpha$ とすれば、(28)および(29)式よりつぎの関係を得る。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \|{}^{k+1} w_i(t) - {}^0 w_i(t)\| &\leq 2\delta \\ \sum_{i=1}^2 \|{}^k r_i(t)\| &\leq 2\delta[\phi(\alpha)]^k \\ \sum_{i=1}^2 \|{}^{k+1} z_i(t) - {}^k z_i(t)\| &\leq 2\delta\beta[\phi(\alpha)]^k \end{aligned} \quad (41)$$

$$(k=0, 1, 2, \dots)$$

(証明) (41)式の関係を数学的帰納法により証明する。まず、 $({}^0 w_1, {}^0 w_2) \in Q$ であるから、 $k=0$ のとき(18)式から $({}^1 w_1, {}^1 w_2) \in Q$ が示される。したがって、 $k=0$ に対して(28)および(29)式を用いることができ、(41)式が成り立つことが示される。

つぎに、(41)式が $k-1$ まで成立するものと仮定すれば、(18)式の関係を用いて

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \|{}^k w_i(t) - {}^0 w_i(t)\| &\leq \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^k \|{}^j w_i(t) - {}^{j-1} w_i(t)\| \\ &\leq \alpha \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^k \|{}^{j-1} r_i(t)\| \leq \frac{2\alpha\delta}{1-\phi(\alpha)} \leq 2\delta \end{aligned} \quad (42)$$

となる。したがって、 $({}^k w_1, {}^k w_2) \in Q$ である。さらにその結果 $k=k$ に対して(28)および(29)式を用いることができるから、

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \|{}^k z_i(t) - {}^{k-1} z_i(t)\| &\leq \alpha\beta \sum_{i=1}^2 \|{}^{k-1} r_i(t)\| \\ &\leq 2\alpha\beta\delta[\phi(\alpha)]^{k-1} \\ \sum_{i=1}^2 \|{}^k r_i(t)\| &\leq \phi(\alpha) \sum_{i=1}^2 \|{}^{k-1} r_i(t)\| \leq 2\delta[\phi(\alpha)]^k \end{aligned} \quad (43)$$

が成り立つ。よって(41)式はすべての k に対して成立する。(証明終)

補題3よりつぎの定理が得られる。

《定理2》 補題3の条件がすべて成り立つとき、(18)式による繰返し計算で $k \rightarrow \infty$ とすれば、変形問題に対する関数列 $\{z_i\}$ および $\{w_i\}$ ($i=1, 2$) は一致し、唯一の極限関数 z_i^* に一様収束する。この $z_i^*(t)$ は(1)および(2)式で与えられる問題の解である。

(証明) 補題3から明かなように、 $0 < \phi(\alpha) < 1$ であるから、(41)式において $k \rightarrow \infty$ とすれば、

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^2 \|{}^k z_i(t) - {}^k w_i(t)\| \\ = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^2 \|{}^{k+1} z_i(t) - {}^k z_i(t)\| = 0 \end{aligned} \quad (44)$$

となる。したがって $k \rightarrow \infty$ においては、 ${}^k z_i(t)$ と ${}^k w_i(t)$ ($i=1, 2$) はすべての $t \in [t_0, t_f]$ において一致する。また、(11)および(12)式の解 $z_i(t)$ は $t \in [t_0, t_f]$ で連続であり、ノルム $\|\cdot\|$ の定義より、関数 z_i に関する空間は完備である。したがって、 $k \rightarrow \infty$ においては極限関数 z_i^* ($i=1, 2$) が存在し、(41)式より $(z_1^*, z_2^*) \in Q$ である。この $z_i^*(t)$ を(15)式に代入すれば明らかなように、この $z_i^*(t)$ は(10)式で与えられる非線形2点境界値問題の解、すなわち(1)および(2)式で与えられる問題の解である。さらに縮小写像の原理より、この解 $z_i(t)$ は唯一であることも容易に証明される。(証明終)

この定理は、変形問題に対し適当な条件のもとでは、(18)式によって干渉変数を調整するアルゴリズムが収束することを保証したものである。

なお、実際問題を解くと、重み κ および β の値によって、収束の状況は著しく異なる。一つの方法として、 κ (または β) を1に固定し β (または κ) の値を適当に定めることが多くの場合に有効である。また β (または κ) の値を選定する際には、数値計算上の誤差も考慮して、

$$E_r \triangleq \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^2 \|L_{i2} {}^0 z_i(t_f) - 0\|^2 \right]^{1/2} \quad (45)$$

で定義される値が $E_r \leq \sigma$ を満たす範囲内で β (または κ) の値をできるだけ大きく選ぶことが望ましい。

6. 例題

以上に述べた分割・統合のアルゴリズムは、本来、システム変数の数が多い場合に有効に対処するために開発された。しかし、ここではアルゴリズムの検討と説明のために、比較的小変数のつぎの非線形系、すなわち空間飛翔体の三軸姿勢制御系⁵⁾

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & \dot{x}_2 &= \varepsilon x_4 + \varepsilon x_4 x_6 + \varepsilon x_3 u_3 + u_1 \\ \dot{x}_3 &= x_4, & \dot{x}_4 &= -\varepsilon x_2 - \varepsilon x_2 x_6 - \varepsilon x_1 u_3 + u_2 \\ \dot{x}_5 &= x_6, & \dot{x}_6 &= \varepsilon x_2 x_4 + \varepsilon x_1 u_2 + u_3 \end{aligned} \quad (46)$$

において評価関数

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left(\sum_{i=1}^6 x_i^2 + \sum_{i=1}^3 u_i^2 \right) dt \quad (47)$$

を最小にする問題を考える。 $\varepsilon=1$ の場合が実際の物理系に対応する。

第3節の(4)式に従って J を書き直した変形問題において、サブシステム1の線形TPBVPはつぎのよ

うになる。

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\beta p_2 + (\beta-1)q_2 \\ &\quad + \varepsilon[\gamma_4(1+y_6) - \gamma_3(\varepsilon y_3 q_2 - \varepsilon y_1 q_4 + q_6)] \\ \dot{p}_1 &= -\kappa x_1 + (\kappa-1)y_1 \\ &\quad + \varepsilon^2[-\gamma_3 q_2 q_4 + \gamma_1(q_4^2 + q_6^2)] \\ \dot{p}_2 &= -\kappa x_2 - p_1 + (\kappa-1)y_2 + \varepsilon[q_4(1+y_6) - \gamma_4 y_6] \end{aligned} \quad (48)$$

ここに、 y_i ($i=1, 3, 4, 6$) および q_i ($i=2, 4, 6$) はそれぞれ x_i および p_i に対応する干渉変数である。なお、サブシステム2および3についても同様の方程式が得られるがここでは省略する。

一例として、 $t_0=0$, $t_f=2$, $\sigma=5 \times 10^{-5}$ とし、初期条件を $x_1(0)=x_3(0)=x_5(0)=1$, $x_2(0)=x_4(0)=x_6(0)=0$ とする。Fig. 1 は歩み幅 α (一つの繰返し計算では一定値) と収束に要した全計算時間 T_c との関係を、原アルゴリズム (破線) および変形アルゴリズム (実線) について示したものである。図から明らかなように、 $\varepsilon=1$ および2の値に対して変形アルゴリズムのほうが原アルゴリズムよりも広い範囲の α で速く収束している。なお $\varepsilon=3$ の場合には、原アルゴリズムでは収束が得られなかった。ここでは、いずれも κ を1に固定し β を大きくしたが、 $\kappa=1/\beta$ としてもある程度の改善が得られた。

Fig. 2 は、 $\varepsilon=1, 2, 3$ について、計算時間 T に対する G の変化の様子を示したものである。Fig. 3 は $\varepsilon=3$ として重みを変えたときの G の収束状況を示す。同図における α は零回目の値を表わし、 $G/G^{(k-1)} > 1.2$ の場合には α の値を前回の0.9倍にした。Table 1 は

Fig. 1 Variations of the total computing time T_c with the step size α for the various values of ε and β

Fig. 2 Variations of G with the computing time T

Fig. 3 Variations of G with the computing time T for the various values of the weights β and ε ($\varepsilon=3$)

$\varepsilon=3$, $\kappa=1$ として $\beta=10, 15, 20$ の各場合の繰返し過程における終端精度 E_r ((45)式参照) を示したものである。この表からわかるように、 $\beta=15$ は精度の限界に近く、 $\beta=20$ では限界を越えている。このため、 $\beta=15$ の場合には $\beta=10$ の場合よりも G の収束状況が悪くなっており、また、 $\beta=20$ では Fig. 3 に示されているように収束が得られなかった。なお、Fig. 2 および Fig. 3 における α はいずれも全計算時間 T_c を最小にしたときの値を用いた。

Fig. 4 は本論文のアルゴリズムと準線形化法とを比較したものである。繰返し計算の初期推定値には、 $\varepsilon=0$ として得られる線形 TPBVP の解を用いた。本

Table 1 Variation of E_r for the various values of the weight β ($\epsilon=1$)

weight β	10	15	20
iteration			
0	1.1×10^{-6}	1.6×10^{-6}	9.8×10^{-6}
5	3.1×10^{-6}	4.1×10^{-6}	1.5×10^{-4}
10	3.3×10^{-6}	5.0×10^{-6}	1.5×10^{-4}
15	4.8×10^{-6}	4.3×10^{-6}	4.8×10^{-6}
20	6.0×10^{-6}	1.3×10^{-5}	3.0×10^{-4}
25	3.3×10^{-6}	3.6×10^{-6}	3.9×10^{-4}
30	—	4.5×10^{-6}	3.7×10^{-4}
35	—	7.1×10^{-6}	1.8×10^{-4}

Fig. 4 A comparison between the quasilinearization method and the present algorithm ($\epsilon=5$)

論文のアルゴリズムでは、ヤコビ行列を計算していないにもかかわらず $\epsilon=5$ の場合でも収束が得られているのに対して、準線形化法では得られなかった。

7. おわりに

この論文では、非線形多変数システムの最適制御問題に分割手法を適用するに当って、あらかじめ干渉変数を用いて評価関数を適当に変形した後、干渉ベクトル調整法を適用する一つのアルゴリズムを提案した。このとき、評価関数に導入した重みパラメータの値が収束性を決める重要な要因となる。変形アルゴリズムと原アルゴリズムとを対比しながら、変形アルゴリズムにおける収束条件について種々の検討を加え、また重みの決め方についても実際的な一つの方法を示した。さらに、本論文のアルゴリズムおよび準線形化法

とによって例題を解き、収束性について具体的な比較を行った。

その結果、一定の条件のもとで、重みを適当に定めることにより、(i)原アルゴリズムでは収束が保証されない場合でも、変形アルゴリズムでは収束が保証される、(ii)変形アルゴリズムにおける収束速度が原アルゴリズムのそれよりも改善される、(iii)変形アルゴリズムでは、原アルゴリズムよりも広い範囲の歩み幅に対して収束性の改善が期待できる、(iv)準線形化法では収束しない場合でも、変形アルゴリズムでは収束が得られる場合がある、ことが明らかとなった。

例題でも示したように、パラメータ ϵ がさらに大きい、あるいは制御区間 $(t_f - t_0)$ がきわめて長い問題においては、重み β の値を十分大きく選ぶ必要がある。しかし、数値計算上の誤差、すなわち、打ち切り誤差あるいは丸め誤差のために、(45)式の E_r の値を十分小さくすることが不可能となり、したがって(11)および(12)式で与えられる線形 TPBVP の解を精度よく求めることが困難となる。その結果、本論文で述べた、評価関数に重みを導入するアルゴリズムでも解への収束が悪くなる。このような場合には、制御区間を幾つかの部分区間に分割した後、本論文のアルゴリズムを適用することが有効であると考えられる。これについては、稿を改めて発表する予定である。

なお、例題の数値計算は京都大学大形計算機センター FACOM 230-75 によった。

参考文献

- 1) D.A. Wismer(ed.): Optimization Methods for Large-Scale Systems, with Applications, McGraw-Hill Book Co., New York (1971)
- 2) P. Dyer and S.R. McReynolds: The Computation and Theory of Optimal Control, Academic Press, New York (1970)
- 3) P.L. Falb and J.L. deJong: Some Successive Approximation Methods in Control and Oscillation Theory, Academic Press, New York (1969)
- 4) 西川, 三宮, 小鹿: 非線形系の多重レベル制御における干渉ベクトル調整法, 計測自動制御学会論文集, 10-1, 15/21 (1974)
- 5) Y. Nishikawa, N. Sannomiya and T. Ojika: An Algorithm of Interaction Coordination in Multilevel Control of Nonlinear Systems, Memoirs of Faculty of Engineering, Kyoto Univ., XXXVI, Part 1, 46/59 (1974)
- 6) 小鹿, 西川, 奥平, 島筒: 非線形系の最適制御における分割と統合のアルゴリズム(I), 第14回 SICE 学術講演会予稿集, 43/44 (1975)
- 7) G.H. Meyer: Initial Value Methods for Boundary Value Problems, Academic Press, New York (1973).