分権的最適化システムとある種の輸送問題への応用[†]

志 水 清 孝*・相 吉 英太郎*・上 野 哲 男**

Decentralized Optimization Systems and Their Application to a Class of Transportation Problem

Kiyotaka SHIMIZU*, Eitaro AIYOSHI* and Tetsuo UENO**

We are concerned with a class of organizations composed of a coordinating central system and plural semi-autonomous subsystems, such that each of them has a decision-making unit. Such a problem is regarded as that of a decentralized two-level optimization. The basic principle of planning for this organization is that the central system allocates resources so as to optimize its own objective, while the subsystems optimize their own objectives using the given resources.

Within this framework of decision making, we consider a transportation problem in which N transport agents transport their own commodity. Each transport agent n , $n=1, \dots, N$, finds optimal flow patterns of the associated commodity n so that the transportation cost is minimized based on its own objective function under the arc capacity restriction imposed by the central agent. The coordinating central agent governs the transport agents through the way of allocating the arc capacity so that the optimality of whole network system is achieved. Here, the lower level problem is composed of a set of single commodity minimum cost flow problems of the transport agents, each of which can be easily solved separately by the subsystem.

The decentralized optimization problem is solved in principle by a parametric approach. A feasible direction algorithm using directional derivative and application of a constraint simplex method are proposed to solve the formulated network flow problem.

1. はじめに

複数の部分システムとそれを統合する上位の中央システムからなる階層制分権システムの最適化問題を研究する。各システムはそれぞれ独自の目的をもつ決定システムである。部分システムはそれぞれ中央から課せられる拘束のもとで自己の最適性を追求する自治権が与えられており、一方中央システムは中央独自の目的に従って部分システムのパラメータを決定することにより、部分システム全体を統合し支配する。ここでパラメータとは、具体的には部分システムへ配分する資源量、予算などを意味し、これを抽象的な意味で資源と総称する。

このようなシステムは分権的2レベル最適化システムである。この場合、独自の目的関数に基づく部分システムの部分的最適化問題は、加法的に分離可能な単一の数理計画問題から、分割原理によって生成される部分問題とは根本的に異なるものである。

はじめに一般的な形の分権的2レベル最適化問題を定式化し、つぎにその具体的意味をもつ問題として、階層的決定機構による最適化の対象がネットワークシステムの場合を考える。この場合、部分システムは互いに独立した複数のネットワーク使用者であり、中央はネットワーク全体の管理者であって、ネットワークの弧容量配分を決める。

以上のような分権的2レベル最適化問題は、上位問題の制約条件の一部にパラメータ化された下位の部分的最適化問題を含むため、下位問題のパラメトリック最適解が陽的に求められる場合⁶⁾を除き、一般的な解法は与えられていない。そこでこのような問題の解法として、方向導関数を用いた許容方向法および制約つきシンプレックス法を適用した数値解法を提案する。前者は Geoffrion²⁾, Silverman⁷⁾ によって加法的に分離可能な数理計画問題を資源配分形分割法で解く計算

[†] 第5回制御理論シンポジウムで発表(昭 51・5)

* 慶応義塾大学工学部 横浜市港北区日吉町 832

** 旭化成工業(株) 延岡市旭町 2-2-1

* Faculty of Engineering, Keio University, Yokohama

** Asahi Chemical Industry Co. Ltd., Nobeoka

(Received January 12, 1977)

方法として提案されたが、彼らとはその問題意識の点でまったく異なるわれわれの問題に対しても、適当な仮定のもとで使うことができ、さらに下位がネットワーク問題の場合には、特に有効であることを示す。後者はいわゆる直接探索法だが、2 レベル最適化問題に対してもきわめて有効な手法であることを、前者と同じ問題で確認する。

2. 分権的 2 レベル最適化問題の定式化

資源配分形分権的 2 レベル最適化問題を定式化する。下位レベルは N 個の部分システムからなり、部分システムはそれぞれ決定変数 x_n 、目的関数 f_n 、制約式 $g_n \leq 0$ を有する。このとき、部分システム n は配分された資源 α_n のもとで自己の目的関数 f_n の最小化を行う自由度があり、分権的な（あるいは半自治権を有する）システムである。

上位レベルの中央システムは目的関数 Φ に基づいて、部分問題のパラメータつまり資源配分 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ の値を決定する。ここで α は部分システム n へ配分する資源 α_n の合成ベクトルである。上位レベルは各部分システムの提案するパラメトリック最適解 $\{x_n^*(\alpha_n)\}_{n=1}^N$ と資源 $\{\alpha_n\}_{n=1}^N$ の関数である Φ を最小にするように最適な資源配分 α^* を決める。

このような問題はつぎのように定式化される。

$$\min_{\alpha} \Phi(x^*(\alpha), \alpha) \quad (1. a)$$

$$\text{subj. to } G(x^*(\alpha), \alpha) \leq 0 \quad (1. b)$$

$$f_n(x_n^*(\alpha_n), \alpha_n) = \min_{x_n} f_n(x_n, \alpha_n) \quad (1. c)$$

$$\text{subj. to } g_n(x_n, \alpha_n) \leq 0 \quad (1. d)$$

$$n=1, \dots, N$$

ここで $x_n^*(\alpha_n)$ は通常のパラメトリック最適解を意味し、 $x^*(\alpha) = (x_1^*(\alpha_1), \dots, x_N^*(\alpha_N))$ 、 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ である。

問題 (1) において部分システムの最適化問題 (1. c) (1. d) は、中央の最適化問題の制約条件とみなされ、 α を固定すれば互いに分離した問題であるが、上位レベルからみるとときには (1. b) 式を介して互いに干渉しあっている。上の問題は、典型的な資源配分問題のとき、つぎのようになる。

$$\min_{\alpha} \Phi(x^*(\alpha), \alpha) \quad (2. a)$$

$$\text{subj. to } \sum_{n=1}^N \alpha_n \leq b \quad (b; \text{total resources}),$$

$$G_1(x^*(\alpha)) \leq 0 \quad (2. b)$$

$$f_n(x_n^*(\alpha_n)) = \min_{x_n} f_n(x_n, \alpha_n) \quad (2. c)$$

$$\text{subj. to } g_n(x_n) \leq \alpha_n,$$

$$x_n \in S_n \quad (2. d)$$

$$n=1, \dots, N$$

下位問題 (2. c), (2. d) は N 個の部分最適化問題の集合であり、おのおのは通常のパラメトリック最適化問題である。このとき、 N 個の部分問題は (2. b) 式を通して干渉しあっている。(2. b) 式の第 1 式は資源の総量の制約で、第 2 式は下位レベル全体の生産量に対する条件である。(2. d) 式の第 1 式は部分システムが生産に利用できる資源の上限を表し、第 2 式は部分システム固有の制約である。

上の 2 レベル計画法は原理的にはパラメトリックアプローチである。その特徴は上位問題の解が決まると下位問題のパラメータが固定でき、その結果下位問題が完全に規定された最適化問題として解けることである。

問題 (1) あるいは (2) は N 個の部分システムの目的関数 $\{f_n\}$ と中央の超目的関数 Φ をもつ階層制分権システムである。さらに上位の制約の中に下位の制約つき最適化問題を制約式として含んでおり、いずれにする標準の数値計画問題ではない。このような問題を解くに当たって、下位問題のパラメトリック最適解を陽的に求めることは非常にむずかしい。そこで本論文では陽的に表現されたパラメトリック最適解を求めることなく、資源配分を改良していく反復的計算方法を考える。すなわち固定された α に対する下位問題の最適解を情報として、資源配分を逐次改良していくような許容方向法あるいは直接探索法を考える。

特に Φ が f の関数で $\Phi(f(x^*(\alpha), \alpha))$ の形のとき、 $v_n(\alpha_n) = f_n(x_n^*(\alpha_n), \alpha_n)$ の方向導関数を利用することができる。これは資源配分による原分割法的应用であり、許容方向法形のより良い α を求めるための計算手続である。

普通の数値計画問題を資源配分形 2 レベル分割法で解く研究には、LP に対する Kornai らの研究⁵⁾、凸計画に対する Geoffrion²⁾、Silverman^{7), 6)} らの研究がある。分権的な階層的システムにおけるより一般的な資源配分形 2 レベル計画法として Geoffrion³⁾ の研究がある。しかし、以上は Φ が $f_1, \dots, f_N$ の加法和あるいは凸増加関数のような仮定が必要である。 Φ が $x^*(\alpha)$ 、 α の直接関数の場合には、下位問題がマルチパラメトリック LP のとき志水ら⁸⁾ の研究がある。

3. 最小費用ネットワーク流れ系の分権的 2 レベル最適化

2 レベル分権的最適化問題の具体的な応用問題とし

て、最適化の対象がネットワークシステムであり、つぎのような経済的意味をもつ問題を研究する。

弧容量制限のあるネットワークを用いて、 N 社の輸送会社がおのおのの独自に自己の輸送物資を輸送するシステムを考える。すなわち2品種以上の物質を同一の輸送網で輸送する問題を考える。ただしネットワークは節点 $(1, \dots, M)$ と有向弧 $(1, \dots, L)$ をもつ有向ネットワークとする。輸送会社 n は自己の輸送物資（以後品種 n と呼ぶことにする）の需要量 r_n を、指定された供給点 s_n から需要点 t_n へ最小費用で輸送したい。このとき輸送会社 n が使用できる各弧の容量は行政府によって割り当てられる。輸送会社 n は割り当てられた弧容量 $\alpha_n=(\alpha_{n1}, \dots, \alpha_{nL})$ のもとで、輸送費用 f_n を最小にするような品種 n の流れ $x_n=(x_{n1}, \dots, x_{nL})$ を決める。行政府は自己の目的関数 $F+H$ に基づき、各輸送会社 n に弧容量 α_n を割り当てる。このとき行政府が中央システム、輸送会社 n が部分システム n の分権的2レベル決定システムとして、つぎのように定式化される。

中央システム（行政府）：

$$\min_{\{\alpha_n\}} F(f_1(x_1^o(\alpha_1)), \dots, f_N(x_N^o(\alpha_N))) + H(\alpha_1, \dots, \alpha_N) \quad (3. a)$$

$$\text{subj. to } \sum_{n=1}^N \alpha_n = b \quad (3. b)$$

部分システム（輸送会社 n ）：

$$f_n(x_n^o(\alpha_n)) = \min_{x_n} f_n(x_n) \quad (3. c)$$

$$\begin{aligned} \text{subj. to } x_n &\leq \alpha_n \\ x_n &\in S_n \\ &= \{x_n | Bx_n = d_n, x_n \geq 0\} \end{aligned} \quad (3. d)$$

$$n=1, \dots, N$$

ここで $x_n^o(\alpha_n)$ は弧容量 α_n が与えられたもとの輸送会社 n の問題(3. c), (3. d)のパラメトリック最適解である。 b は弧容量ベクトル $(b_1, \dots, b_L)$ である。

下位レベルの問題は互いに分離した N 個の部分最適化問題の集合で、それらは弧容量 α_n が配分されたもとのおのおの単品種の最小費用流れ問題となる。すなわち制約式(3. d)はつぎのネットワーク特有の制約条件をベクトルマトリクス形式で表現したものである。

(1) 弧 l に流すことのできる品種 n の上限

$$x_{nl} \leq \alpha_{nl} \quad l=1, \dots, L \quad (4)$$

(2) 流れの非負性

$$x_{nl} \geq 0 \quad l=1, \dots, L \quad (5)$$

(3) 節点 m での物質収支 $(m=1, \dots, M)$

$$\sum_{l \in A_m} x_{nl} - \sum_{l \in B_m} x_{nl} = \begin{cases} r_n & m=s_n \text{ のとき} \\ 0 & m \neq s_n, t_n \text{ のとき} \\ -r_n & m=t_n \text{ のとき} \end{cases} \quad (6)$$

ここで A_m, B_m はそれぞれ節点 m での流出弧と流入弧の集合

ただし B は $(M-1) \times L$ の節点-弧結合マトリクスで階数は $M-1$ である。ベクトル d_n は(6)式で $m=s_n$ に対応した位置が r_n 、 $m=t_n$ に対応した位置が $-r_n$ 、他はすべて0の列ベクトルである。弧 l の容量制限は(3. b)式からわかるように、 $\sum_{n=1}^N x_{nl} \leq \sum_{n=1}^N \alpha_{nl} = b_l$ で与えられる。

また目的関数 f_n は具体的には、各輸送物資ごとに規定された、弧 $l(l=1, \dots, L)$ の使用料に基づく費用であり、 $f_n(x_n) = \sum_{l=1}^L f_{nl}(x_{nl})$ のように与えられる。各社は自社の輸送量に対応して規定の弧使用料を払う。なおここでいう N 品種という意味は必ずしも異品種である必要はなく、 N 社の輸送物資が混合して同一視されなければ、単品種でもかまわない。問題(3)は弧容量制限で各品種の流れが干渉しあっている以外は品種ごとに分離された N 品種流れ問題であることに注意しておく。

上位レベルの問題は中央の目的関数 $F+H$ を最小にするような容量配分 $\alpha^o=(\alpha_1^o, \dots, \alpha_N^o)$ を決める最適資源配分問題である。もっと一般的にいえば中央の目的関数 Φ は(2. a)式で与えられているように、 $x^o(\alpha) = (x_1^o(\alpha_1), \dots, x_N^o(\alpha_N))$ と $\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ の関数であるが、ここでは中央の目的関数が $f=(f_1, \dots, f_N)$ の関数で(3. a)式のように与えられる場合を考える。中央は部分システムの目的関数 f_n の重みづけ和の最小化や最大成分最小化などを行うことができる。 F の例には以下のようなものが考えられる。

$$F = \sum_{n=1}^N \beta_n f_n(x_n^o(\alpha_n)), \quad F = \sum_{n=1}^N \beta_n f_n(x_n^o(\alpha_n))$$

$$F = \max_n \{\beta_n f_n(x_n^o(\alpha_n))\}, \quad F = \sum_{n=1}^N \beta_n f_n(x_n^o(\alpha_n))^2$$

中央の目的関数の第2項 $H(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ はいかに全容量 b を地方へ配分するかによってかかる費用である。 $H(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ を通していろいろの効果を定式化することができる。たとえばある弧 l は老朽化していたり過密地帯を通過しているの、重量の大きい品種や爆発危険のある品種には容量を割り当てたくない場合があるが、 $H(\alpha)$ を介してそのような効果を与えることができる。

また容量配分に関する等号制約式(3. b)は、中央が

ネットワークの容量のすべてを部分システムへ配分してしまうという状況を表しており、配分された弧容量 α_n がすべて使用されるか否かは各部分システムの問題による。

2 レベル決定システム(3. a)～(3. d)では各部分システムは独自の目的に従って最適化できるが、このようなシステムは文献 8), 9) の中で階層的な分権の中央-地方システムとして定式化されたものと同種である。

4. 許容方向計算法

われわれの分権的 2 レベル決定システムは、アルゴリズムのみに関しては原理的に資源配分による原分割法と共通しているから、文献 2), 7), 6) の結果を拡張し、方向導関数を用いた許容方向法を、最適容量配分 α^0 を決定することに応用できる。特に下位レベルがネットワーク流れ問題であることから、後述のようにいくつかの計算上の難点が解決され、ラベリング手法、線形計画法、凸計画法に基づくアルゴリズムをうることができる。

3 節で定式化した 2 レベル決定問題(3)に対して、一つの許容な容量配分 α を選び最適かどうかをテストし、最適でなかったら改良し新たな配分を選ぶという反復的計算方法を考える。部分システム n に α_n が割り当てられたときの部分問題はつぎようになる。

$$\begin{aligned} \text{部分問題 } P_n(\alpha_n): \min_{x_n} f_n(x_n) \\ \text{subj. to } x_n \leq \alpha_n, \quad x_n \in S_n \end{aligned} \quad (7)$$

この部分問題は品種ごとに分割されているから単品種の最小費用流れ問題であり、既存のラベリング手法を用いて解ける。 $f_n(x_n)$ が線形の場合には最短経路問題のラベリング手法¹⁾で簡単に解ける。

容量配分問題の許容性条件から、(3. b)式がなりたたねばならない。また α_n は部分問題 $P_n(\alpha_n)$ が許容解をもつように選択される必要がある。そのような α_n の集合を V_n とすると、

$$\alpha_n \in V_n = \{\alpha_n | x_n \leq \alpha_n \text{ となる } x_n \in S_n \text{ が存在する}\} \quad (8)$$

このときの部分問題の最小目的関数値を

$$w_n(\alpha_n) = \min_{x_n} \{f_n(x_n) | x_n \leq \alpha_n, \quad x_n \in S_n\} \quad (9)$$

とすると、2 レベル決定問題(3)はつぎのように表せる。

$$\text{主問題: } \min_{\{\alpha_n\}} F(w(\alpha)) + H(\alpha) \quad (10. a)$$

$$\text{subj. to } \sum_{n=1}^N \alpha_n = b, \quad (10. b)$$

$$\alpha_n \in V_n, \quad n=1, \dots, N \quad (10. c)$$

ここで $w(\alpha) = (w_1(\alpha_1), \dots, w_N(\alpha_N))$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ である。

上で定式化した問題に対して数値計画法が適用しやすいものにするためにつぎのような仮定をおく。

- (i) $F(w(\alpha))$ は $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_N$ 上で凸で微分可能である。
- (ii) $f_n(x_n)$ は S_n 上で凸で微分可能である。
- (iii) $H(\alpha)$ が α に関して凸で微分可能である。

仮定(i)が成り立つための十分条件としてつぎの二つの有益なケースがある。

- (a) $F(f)$ が $f_1, \dots, f_N$ に関して凸で微分可能かつ各 $f_n(x_n)$ が線形。
- (b) $F(f)$ が $f_1, \dots, f_N$ に関して単調増加凸関数で微分可能かつ各 $f_n(x_n)$ が凸で微分可能。

この結果 f_n, x_n, S_n の凸性から V_n が凸で、 w_n が V_n 上で $(\alpha_n$ に関して) 凸であることが保証され、主問題(10)は凸計画となる。すべてのこれら理想化された仮定にもかかわらず、 w_n は V_n のいたるところで微分可能とはならず²⁾、このことが主問題(10)を解くうえで根本的な困難の原因になっている。

主問題の目的関数(10. a) の陽的表現式を得ることは非常に困難である。しかし部分問題(7)を解くことにより α における $F(w(\alpha)) + H(\alpha)$ の値とその方向導関数(注1)の値の情報がえられる。そこで許容性条件(10. b, c)のもとで主問題の目的関数(10. a)の容量配分 α における方向導関数値を最小にする方向を選ぶことによって容量配分 α を最も改良する有効許容方向 s を見つける方向発見問題を構成する。もし α が最適でないならば、 s 方向にステップを取り新しい配分を決め、この過程を繰返す。

さて、 $F(w(\alpha)) + H(\alpha)$ の方向導関数はつぎようになる。

《定理 1》 $F(w(\alpha)) + H(\alpha)$ の方向導関数は

$$\begin{aligned} DF(\alpha; s) + \frac{\partial H(\alpha)}{\partial \alpha} s \\ = \sum_{n=1}^N \left[\frac{\partial F(w(\alpha))}{\partial w_n} D w_n(\alpha_n; s_n) + \frac{\partial H(\alpha)}{\partial \alpha_n} s_n \right] \end{aligned} \quad (11)$$

で与えられる。ここで $D w_n(\alpha_n; s_n)$ は $w_n(\alpha_n)$ の方向導関数である(証明は付録参照)。

(注1) $Df(x; s) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(x + \lambda s) - f(x)}{\lambda}$
を x に関する f の s 方向への方向導関数という。

分権的な最小費用ネットワーク流れ問題に対する許容方向計算方法は、目的関数の方向導関数が定理1の(11)式のように与えられるときにも、文献2), 7), 6)の結果をそのまま利用できる。要点はつぎの3点である。

(i) 方向導関数の具体的な表現, (ii) V_n の陽的な表現, (iii) 方向 $\mathbf{s}$ が許容であるための条件の陽的な表現。

方向導関数 $Dw_n(\alpha_n; \mathbf{s}_n)$ は α_n における $w_n(\alpha_n)$ の亜こう配の集合を $\partial w_n(\alpha_n)$ とするとき、 $Dw_n(\alpha_n; \mathbf{s}_n) = \max_{\mathbf{x}^* \in \partial w_n(\alpha_n)} \mathbf{x}^{*T} \mathbf{s}_n = \max_{\lambda_n \in A_n} (-\lambda_n^T \mathbf{s}_n)$ となる⁶⁾。ここで A_n は $P_n(\alpha_n)$ に対するすべての最適 Lagrange 乗数の集合である。Silverman⁷⁾ の許容方向計算法では、最適 Lagrange 乗数の存在を保証するために、 α_n は V_n の内点であるという仮定が設けられている。しかしわれわれのネットワーク流れ問題では、部分問題の制約式が線形であるために、この仮定を設ける必要はない。

許容ベクトル α_n は条件(3. b), (8)を満足しなければならない。部分問題が一般の最適化問題ならば、 V_n の陽的な表現をうるのは困難であるが、われわれの問題では部分問題がネットワーク流れ問題であるために、制約集合 V_n は最大流れ-最小切断定理を用いて容易に陽的に表現できる。品種 n に関する与えられたネットワークでの切断の集合を H_n とする。 $h \in H_n$ なる切断 h で、 C_n^h を切断容量を形成する弧の集合とする。最大流れ-最小切断定理より、ある配分された弧容量 α_n のもとでネットワークに要求流量 r_n を流すことのできる必要十分条件は、配分された容量 α_n に関する切断容量の最小値が r_n 以上であることである。よって品種 n の許容配分に対する制約式 (V_n の表現式) は

$$\sum_{l \in C_n^h} \alpha_{nl} \geq r_n, \quad \text{for all } h \in H_n \quad (12)$$

$$\alpha_n \geq 0 \quad (13)$$

となる。(12)式をベクトル表示で $\alpha_n^{hT} \alpha_n \geq r_n$ と書く。

つぎに探索方向 $\mathbf{s}$ が許容であるためには、 δ のある正の値域に対してつぎを満足せねばならない。

$$\delta \sum_{n=1}^N \mathbf{s}_n = \mathbf{b} - \sum_{n=1}^N \alpha_n = 0 \quad (14)$$

$$\alpha_n + \delta \mathbf{s}_n \in V_n, \quad n=1, \dots, N \quad (15)$$

(14), (15)式を具体的に表現したものと定理1から、局所的に最良な有効許容方向はつぎの問題で与えられる。

方向発見問題

$$\min_{\mathbf{s}} \sum_{n=1}^N \left[\frac{\partial F(\mathbf{w}(\alpha))}{\partial w_n} Dw_n(\alpha_n; \mathbf{s}_n) + \frac{\partial H(\alpha)}{\partial \alpha_n} \mathbf{s}_n \right] \quad (16. a)$$

$$\text{subj. to } \sum_{n=1}^N s_{nl} = 0, \quad l=1, \dots, L \quad (16. b)$$

$$\alpha_n^{hT} \mathbf{s}_n \geq 0, \quad h \in J_n^1, \quad n=1, \dots, N \quad (16. c)$$

$$s_{nl} \geq 0, \quad l \in J_n^2, \quad n=1, \dots, N \quad (16. d)$$

$$-1 \leq s_{nl} \leq 1, \quad l=1, \dots, L, \quad n=1, \dots, N \quad (16. e)$$

ここで $J_n^1 = \{h | \alpha_n^{hT} \alpha_n = r_n\}$, $J_n^2 = \{l | \alpha_{nl} = 0\}$ である。

《定理2》 α が主問題の許容解のとき、もし $\mathbf{s} = 0$ が方向発見問題の最適解ならば、 α は主問題の解である(証明省略。文献6)を参照)。

この定理は最適性のテストである。これが満たされないならば、 $F(\mathbf{w}(\alpha)) + H(\alpha)$ の方向導関数(11)の値を負にするような方向 $\mathbf{s}$ がつくられる。この方向 $\mathbf{s}$ が α における $F(\mathbf{w}(\alpha)) + H(\alpha)$ に対する有効許容方向である。

$Dw_n(\alpha_n; \mathbf{s}_n)$ の、部分問題(7)の最適 Lagrange 乗数による表現は簡単な計算により誘導できる。方向発見問題は、 F が $\mathbf{w}$ に関して単調増加関数であるとき、定理1の(11)式から最終的につぎようになる。

$$\min_{\mathbf{s}, \mathbf{z}} \sum_{n=1}^N \left[\frac{\partial F(\mathbf{w}(\alpha))}{\partial w_n} \frac{\partial f_n(\mathbf{x}_n^0)}{\partial \mathbf{x}_n} \mathbf{z}_n + \frac{\partial H(\alpha)}{\partial \alpha_n} \mathbf{s}_n \right] \quad (17)$$

$$\text{subj. to } \left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^N s_{nl} &= 0, \quad l=1, \dots, L \\ \alpha_n^{hT} \mathbf{s}_n &\geq 0, \quad h \in J_n^1, \quad n=1, \dots, N \\ s_{nl} &\geq 0, \quad l \in J_n^2, \quad n=1, \dots, N \\ -1 \leq s_{nl} &\leq 1, \quad l=1, \dots, L, \\ &\quad n=1, \dots, N \\ z_{nl} &\leq s_{nl}, \quad l \in C_n, \quad n=1, \dots, N \\ Bz_n &= 0, \quad n=1, \dots, N \\ z_{nl} &\geq 0, \quad l \in D_n, \quad n=1, \dots, N \\ -1 \leq z_{nl} &\leq 1, \quad l=1, \dots, L, \\ &\quad n=1, \dots, N \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

ただし J_n^1, J_n^2 は前述のとおり、 $C_n = \{l | x_{nl}^0 - \alpha_{nl} = 0\}$, $D_n = \{l | x_{nl}^0 = 0\}$ である。

上の線形計画を解いて最適解 $\mathbf{s}$ を求める。この線形計画は対角ブロック構造をしており、各種の分解原理^{6), 10)}を用いて効率よく解くことができる。有効許容方向 $\mathbf{s}_n$ が与えられたとき、新しい点 α^{k+1} はつぎのステップ幅 δ を決定する凸1次元最小化問題を解くことによって与えられる。

$$\min_{\alpha} \{F(w(\alpha^k + \delta s^k)) + H(\alpha^k + \delta s^k) | \alpha_n^k + \delta s_n^k \in V_n, n=1, \dots, N\} \quad (19)$$

ここで α^k, s^k はベクトル α, s のイテレーション k における値を表す。

ところで部分問題は容量配分 α における単品種の凸関数最小流れ問題であるが、これに対する解法には文献 4) がある。

以上の計算方法は原分割法である資源割当による分割法と同様の計算方法であるから、イテレーション途中の解はすべて制約条件を満たすいわゆる許容解法である。

数値例 計算方法の理解と収束の確認のために以下のような簡単な例を考える。Fig. 1 のようなネットワークを管理する行政府のもとに二つの輸送会社が存在し、会社 1 は品種 1 を会社 2 は品種 2 を輸送するものとする。各弧に付した数字は左側が弧番号、右側括弧内が弧容量を表す。品種 1, 2 の要求量はそれぞれ 3.0, 2.0, また品種 1 の流入点、流出点はそれぞれ節点 1, 4、品種 2 の流入点、流出点はそれぞれ節点 2, 4 とする。

輸送会社 n ($n=1, 2$) は品種 n に配分された容量 α_n のもとで輸送費用 f_n を最小にする。行政府は $F(f_1, f_2)$ に基づいて輸送会社の費用を評価することによって、間接的ではあるが全体的な経済性を追求すると同時に、 $H(\alpha)$ によって容量配分 α_n をある目標 α_n^* にできるだけ近づけようとする独自の目的も追求するも

Fig. 1 Arc number and arc capacity

Fig. 2 Optimal capacity allocation and optimal flows

のとする。 f_n, F, H をつぎのように設定する。

$$f_1(x_1) = x_{11}^2 + 2x_{12}^2 + x_{13}^2 + 5x_{14}^2 + x_{15}^2$$

$$f_2(x_2) = x_{21}^2 + x_{22}^2 + x_{23}^2 + 10x_{24}^2 + x_{25}^2$$

$$F(w_1(\alpha_1), w_2(\alpha_2)) = \{w_1(\alpha_1)\}^2 + 3\{w_2(\alpha_2)\}^2$$

$$H(\alpha_1, \alpha_2) = 100 \sum_{n=1}^2 \sum_{l=1}^5 (\alpha_{nl} - \alpha_{nl}^*)^2$$

$$\text{ただし } \alpha_1^* = (2, 2, 0, 3, 1)^T, \alpha_2^* = (0, 0, 3, 0, 2)^T$$

この例の特徴は行政府が F によって各会社の費用を 2 乗的に評価すると同時に、 H により品種 2 を弧 4 を通さず節点 3 を経由させるため弧 3 は品種 2 の専用に、弧 4 は品種 1 の専用にしたいという目標を表していることである。

初期容量配分 $\alpha_1^1 = (2, 1, 2, 2, 2)$, $\alpha_2^1 = (0, 1, 1, 1, 1)$ より計算を開始し、このときの $F+H$ は 2088. (ただし $F=688.$, $H=1400.$) であったが 9 回のイテレーションの後、最適値として $f_1=20.56$, $f_2=6.79$, $F+H=641.8$ (ただし $F=561.1$, $H=80.7$) が得られた。このとき最適容量配分と最適流れは Fig. 2 のとおりである。

5. 制約つきシンプレックス法による解法

前節の許容方向計算法は解析的な方法だが、方向導関数を用いるため F の f に関する微分可能性や単調増加性の仮定などが必要であり、アルゴリズムもかなり複雑なものであった。

こう配を利用しない試行探索法に Spendley らのシンプレックス法と呼ばれるものがある。シンプレックスとは n 次元空間における $(n+1)$ 個以上の点を頂点とする幾何学的図形のことだが、シンプレックス法の中心的考え方は、シンプレックスの頂点の中で最悪の目的関数値をとる点の、残りの頂点の中心に関する鏡映点は、目的関数値を改善させることが期待できるという考え方で、この期待が正しければこの鏡映のプロセスを続けていくことにより、シンプレックスを最適点に近づけることができる。このアイデアにいろいろ改良を加え、制約つき問題に対する制約つきシンプレックス法のアルゴリズムが開発されている¹⁰⁾。

制約つきシンプレックス法は原理が簡単で、適用する問題に対する仮定 (たとえば分離可能性や単調増加性) もほとんどなく、変数の数があまり多くない場合には有効な手法である。

手続は $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ の最適値を求めるのに用いられる。

まず試行的に選ばれた $K=2 \dim \alpha$ 個の点 $\{\alpha^k\}_{k=1}^K$ でシンプレックスを形成する。資源配分 α^k が与えられれば、 N 個の部分問題 (1. c), (1. d) は適当な非線形計画法で解けるから、 α_n^k が与えられたもとの $\{x_n^o(\alpha_n^k)\}_{n=1}^N$ や $\{f_n(x_n^o(\alpha_n^k))\}_{n=1}^N$ を計算できる。そうすれば (1. a) 式の目的関数や (1. b) 式の制約式 $G(x^o(\alpha), \alpha)$ の値を計算できるからそれらを用いて制約つきシンプレックス法を実行できる。制約つきシンプレックス法はこう配などをまったく必要としないのでどのように複雑な構造の問題でも数値的に解くことができる。

数値例 4 節と同じ数値例に対して制約つきシンプレックス法を適用した。制約つきシンプレックス法は最適容量配分を決定する中央（行政府）の問題（上位問題）に適用される。弧容量制約式 (7. b) が等式制約なので $\alpha_1=(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{15})$ を独立変数、 $\alpha_2=(\alpha_{21}, \dots, \alpha_{25})$ を α_1 の従属変数 $b-\alpha_1$ とみなし、 α_1 空間内の不等号制約領域 $\{\alpha_1 | \alpha_1 \in V_1, b-\alpha_1 \in V_2\}$ を満たす 10 個 ($2 \times \dim \alpha_1$ 個) の点でシンプレックスを形成する。初期点として $\alpha_1^1=(2, 2, 0, 3, 1)$ をとり、他の九つの頂点 α_1^k は一様乱数を用いて発生させた。

$$\alpha_1^2=(2.00, 2.00, 0.50, 2.50, 1.50)$$

$$\alpha_1^3=(1.88, 1.88, 0.38, 2.52, 1.20)$$

$$\alpha_1^4=(1.92, 1.78, 0.38, 2.52, 1.20)$$

$$\alpha_1^5=(1.91, 1.68, 0.45, 2.14, 1.38)$$

$$\alpha_1^6=(1.83, 1.80, 0.22, 2.43, 1.31)$$

$$\alpha_1^7=(1.79, 1.82, 0.12, 2.43, 1.25)$$

$$\alpha_1^8=(1.85, 1.83, 0.26, 2.51, 1.22)$$

$$\alpha_1^9=(1.84, 1.83, 0.30, 2.49, 1.21)$$

$$\alpha_1^{10}=(1.86, 1.84, 0.23, 2.45, 1.19)$$

このときこれらのシンプレックス頂点に対応した下位レベルの最適値、上位レベルの目的関数値は Table 1 のとおりである。

以上のような初期シンプレックスを制約つきシンプレックス法の手続で 56 回更新することにより最適解に収束した。結果はつぎのとおり。

$$\alpha_1^o=(1.96, 1.89, 0.16, 2.56, 1.43),$$

$$\alpha_2^o=(0.04, 0.11, 2.84, 0.44, 1.57)$$

$$f_1(x_1^o)=20.57, f_2(x_2^o)=6.79, F+H=645.9$$

対応した最適流れ $x_n^o(\alpha_n^o)$, $n=1, 2$ は Fig. 2. a, 2. b とほとんど差がないので紙面の都合上割愛する。

6. おわりに

中央システムと複数の部分システムからなる分権的 2 レベル最適化問題を定式化し、その具体的な問題としてネットワーク流れ問題を上げ、その解法を与えた。このようなシステムは実社会に多く存在し、上で定式化した方法や計算方法はこれらにもきわめて有効である。

参考文献

- 1) R.G. Busacker and T.L. Saaty (矢野, 伊理訳): グラフ理論とその応用, 培風館 (1965)
- 2) A.M. Geoffrion: Primal Resource-Directive Approaches for Optimizing Nonlinear Decomposable Systems, *Opns. Res.*, **18**-3, 375/403 (1970)
- 3) A.M. Geoffrion and W.W. Hogan: Coordination of Two-Level Organizations with Multiple Objectives, *Techniques of Optimization* (A.V. Balakrishnan), 455/466, Academic Press, (1972)
- 4) 岸田, 志水: 凸関数コストをもつ最小コストネットワークフロー問題の解法, 第 12 回 SICE 学術講演会予稿集, No. 3313 (1973)
- 5) J. Kornai: Mathematical Planning of Structural Decisions, North-Holland, (1975)
- 6) L.S. Lasdon (志水訳): 大規模システムの最適化理論, 9 章, 日刊工業新聞社 (1973)
- 7) G.J. Silverman: Primal Decomposition of Mathematical Programs by Resource Allocation; II-Computational Algorithm with an Application to the Modular Design Problem, *Opns. Res.*, **20**-1, 58/74 (1972)
- 8) 志水, 安西: 地方自治権をもつ階級制システムの最適化, 計測自動制御学会論文集, **10**-1, 63/70 (1974)
- 9) K. Shimizu: Optimization Algorithms for Multiple Objective Programs and Decentralized Hierarchical Systems, IFAC Symposium, Milano, (1976)
- 10) 志水: システム最適化理論, 92/99, 3 章, コロナ社 (1976)

付 録

定理 1 の証明

$H(\alpha)$ は微分可能だから (11) 式の第 2 項 $(\partial H(\alpha)/\partial \alpha_n)s_n$ はあきらかである。したがって第 1 項のみを考えればよい。方向導関数の定義より

$$DF(\alpha; s) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{F(w(\alpha + \lambda s)) - F(w(\alpha))}{\lambda}$$

Table 1

	α_1^1	α_1^2	α_1^3	α_1^4	α_1^5
$f_1(x_1^o)$	27.00	19.69	23.74	22.50	21.10
$f_2(x_2^o)$	8.00	7.00	6.67	6.67	6.70
$F+H$	921.0	684.6	786.7	704.0	820.8
	α_1^6	α_1^7	α_1^8	α_1^9	α_1^{10}
$f_1(x_1^o)$	22.10	23.06	23.40	23.58	23.82
$f_2(x_2^o)$	6.67	6.67	6.67	6.67	6.67
$F+H$	729.7	760.7	762.2	778.8	787.4

今, $w(\alpha + \lambda s) = w(\alpha) + h$ とおくと, F は w に関して微分可能なので

$$F(w(\alpha + \lambda s)) - F(w(\alpha)) = \frac{\partial F(w(\alpha))}{\partial w} h + o(h)$$

が成り立つ. ここで $\|h\| \rightarrow 0$ のとき $o(h)/\|h\| \rightarrow 0$ である. 両辺を λ で割り, $\lim$ をとると,

$$DF(\alpha; s) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\partial F(w(\alpha))}{\partial w} h + o(h)}{\lambda}$$

ここで $\lambda \rightarrow 0$ のとき $\|h\| \rightarrow 0$ なので $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} o(h)/\lambda = 0$ となる. ゆえに

$$\begin{aligned} DF(\alpha; s) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{1}{\lambda} \frac{\partial F(w(\alpha))}{\partial w} (w(\alpha + \lambda s) - w(\alpha)) \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^N \frac{\partial F(w(\alpha))}{\partial w_n} (w_n(\alpha_n + \lambda s_n) - w_n(\alpha_n)) \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{\partial F(w(\alpha))}{\partial w_n} D w_n(\alpha_n; s_n) \end{aligned}$$